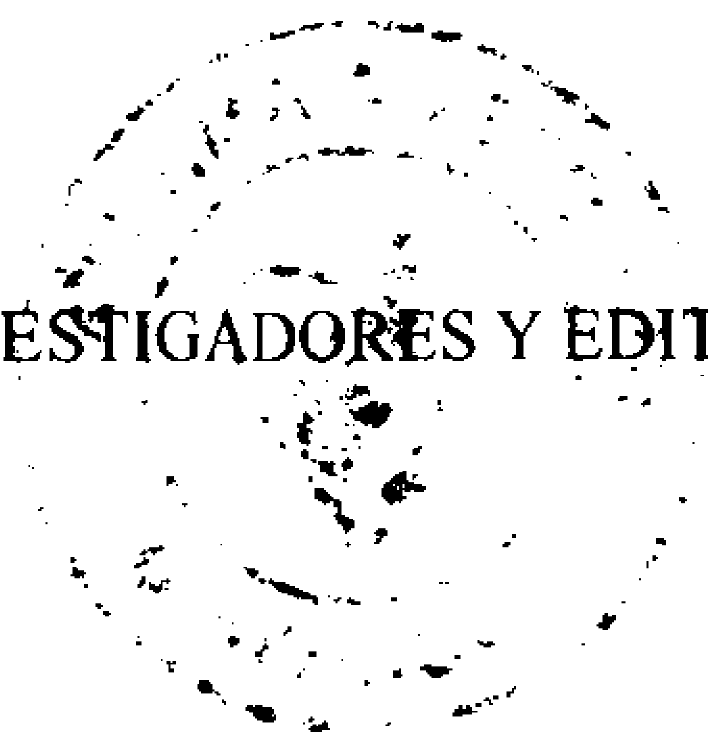
PROBLEMAS RESUELTOS DE ARITMÉTICA

ANÁLISIS DEL NÚMERO Y SUS APLICACIONES

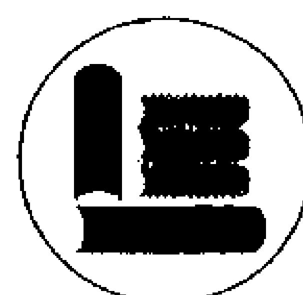
LUMBRERAS
Editores



ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

PROBLEMAS RESUELTOS DE ARITMÉTICA

ANÁLISIS DEL NÚMERO Y SUS APLICACIONES



LUMBRERAS
Editores

PROBLEMAS RESUELTOS DE ARITMÉTICA, análisis del número y sus aplicaciones

Autor : Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Editor : Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Diseño gráfico : Área de cómputo y publicaciones de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Av. Alfonso Ugarte N.º 1426 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 332-3786
Para su sello editorial **Lumbreras Editores**
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: septiembre de 2009
Primera reimpresión: mayo de 2010
Segunda reimpresión: julio de 2011
Tiraje: 3000 ejemplares
ISBN: 978-612-4036-75-0
Registro del proyecto editorial N.º 31501051100862
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú"
N.° 2011-08266

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la
Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de julio de 2011
Calle de las Herramientas N.º 1873 - Lima-Perú. Teléfono: 336-5889

Presentación

Asociación Fondo de Investigadores y Editores (AFINED), promotora de Lumbreras Editores, tiene el agrado de presentar el texto **Problemas resueltos de Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones,** libro que forma parte de una nueva serie de publicaciones que aportan al desarrollo dinámico de los contenidos educativos que brindamos a la sociedad, sobre todo en un contexto en el que la enseñanza de las ciencias y las humanidades ha ido perdiendo su valor analítico-crítico.

La serie de Problemas resueltos es el complemento ideal para los libros de la colección de Ciencias y Humanidades, trabajo desarrollado por Lumbreras Editores en conjunto con las planas de profesores del **Instituto de Ciencias y Humanidades** –promotor de las academias ADUNI y César Vallejo–, quienes se han dedicado durante generaciones a formar estudiantes con criterio realista y capacidad analítica, además de impartir conocimientos objetivos y de rigor científico a través de las publicaciones de Lumbreras Editores con una sólida presencia en los diversos lugares del Perú, cumpliendo así una tarea vital en el acercamiento de material bibliográfico de calidad a miles de estudiantes y profesores en todo el país. De esta manera reafirmamos nuestro compromiso firme de aportar en el desarrollo de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

Problemas resueltos de Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones presenta el desarrollo didáctico de cada uno de los problemas propuestos del libro **Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones**, y ofrece un acercamiento dinámico a todos los contenidos necesarios para obtener dominio del curso. Este libro es también un recorrido a través de lineamientos metodológicos que anhelan construir puentes sólidos entre el estudiante y el aprendizaje de esta materia.

La búsqueda por aportar publicaciones más didácticas y novedosas ha hecho posible este libro y la serie de Problemas resueltos que le seguirán en el campo de las ciencias; también revela nuestro compromiso

profesional de seguir impulsando un trabajo editorial y académico que no esté alejado de las grandes mayorías. Lumbreras Editores quiere reconocer el esfuerzo conjunto que ha significado esta publicación, en la cual ha participado un gran grupo de profesionales de primer nivel, cuyo esfuerzo es un apoyo fundamental a nuestro anhelo de conseguir una educación científica y humanística integral. Finalmente, deseamos reconocer el apoyo de la plana de Aritmética de las academias ADUNI y César Vallejo, por su labor en la elaboración de este material, gracias a su valiosa trayectoria en la enseñanza preuniversitaria de calidad. De manera especial, AFINED desea agradecer a los profesores que participaron en la sistematización del presente libro.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

Prólogo

En nuestra vida diaria, nos enfrentamos a diversos problemas matemáticos, y para resolverlos nos basamos en nuestra experiencia. En muchos casos, sin darnos cuenta, desarrollamos un conjunto de razonamientos lógicos, ayudándonos mediante operaciones aritméticas básicas como el contar con los dedos u operaciones como la adición, sustracción, multiplicación, etcétera.

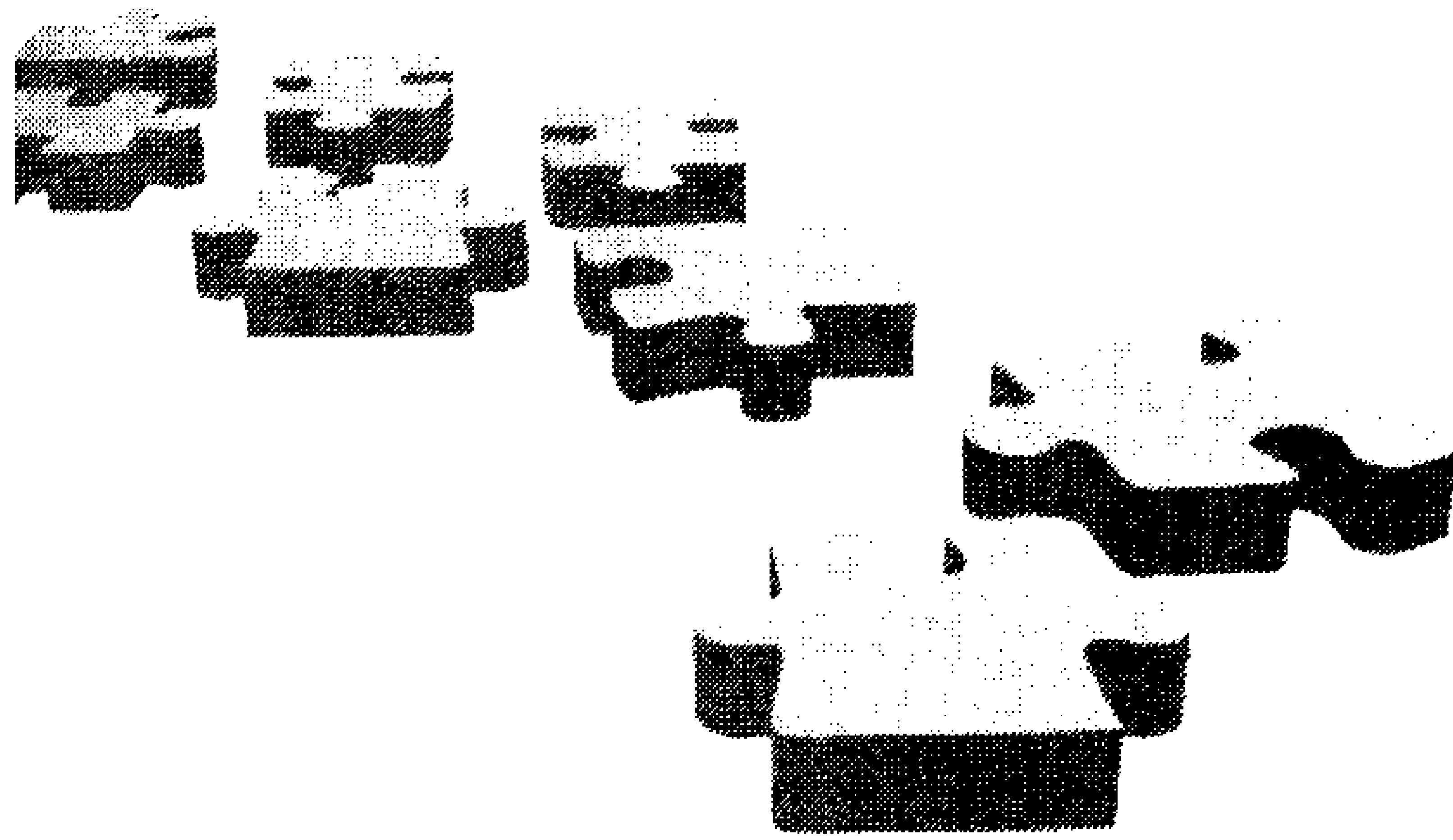
El nivel de complejidad que puede presentarse en los distintos problemas requiere, en muchos casos, tener un mayor marco teórico, el cual, partiendo de nuestra realidad, de nuestras necesidades cotidianas, se va sistematizando en un conjunto de conceptos, definiciones, principios, axiomas y propiedades. Esta sistematización nos permite enfrentar los problemas de manera más directa, ágil y didáctica.

Problemas resueltos de Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones complementa la teoría del libro **Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones**, pues contiene la resolución de sus problemas propuestos; los cuales han sido desarrollados de manera didáctica, producto de la experiencia adquirida en las aulas, enfocados con métodos distintos, que no busquen mecanizarse o "aprender fórmulas", sino por el contrario razonar y resolver los problemas de manera creativa.

Se desarrollan 19 capítulos, con más de 950 problemas, reforzados con notas y observaciones que te ayuden a comprenderlos de manera rápida, no solo para que tengas un abanico de posibilidades para enfrentarlos, sino para que a través de la comparación desarrolles tu capacidad de análisis y puedas sacar conclusiones de cada problema, y así afrontar con éxito los que se te presenten en el futuro.

De esta manera, esperamos cubrir tus expectativas y atraparte en el maravilloso mundo de la Aritmética.

Los autores



Página

Página

Capítulo

2

Lógica proposicional

El nacimiento de la lógica propiamente dicha está directamente relacionado con el nacimiento intelectual del ser humano. La lógica emerge como mecanismo espontáneo en el enfrentamiento del hombre con la naturaleza, para comprenderla y aprovecharla.

Desde el año 600 a. n. e. hasta el 300 a. n. e. se desarrollaron en Grecia los principios formales de las matemáticas. Este periodo clásico es protagonizado por Platón, quien propone ideas o abstracciones; Aristóteles, quien resuelve el razonamiento deductivo y sistematizado, y Euclides, quien establece el método axiomático.

La lógica proposicional es la más antigua y simple de las formas de la lógica, pues al utilizar una representación primitiva del lenguaje, permite representar y manipular afirmaciones sobre el mundo que nos rodea. También permite el razonamiento, a través de un mecanismo que primero evalúa sentencias simples y luego sentencias complejas, formadas mediante el uso de conectivos lógicos. Este mecanismo determina la veracidad de una sentencia compleja, analizando los valores de veracidad asignados a las sentencias simples que la conforman.

Capítulo 2

Lógica proposicional

PROBLEMA N.° 1

Si $p \square q \equiv \sim p \wedge q$

reduzca $[(p \square \sim p)] \rightarrow \{(p \square q) \square q\}$.

A) F B) V
C) p
D) q E) $\sim p$

Resolución

Se define

$p \square q \equiv \sim p \wedge q$

Nos piden

$$\underbrace{[(p \square \sim p)]}_{(*)} \rightarrow \underbrace{\{(p \square q) \square q\}}_{(**)} \qquad \text{(I)}$$

1.° Reducimos (*)

$p \square \sim p \equiv \sim p \wedge \sim p$

$\equiv \sim p$

2.° Reducimos (**)

$(p \square q) \square q \equiv (\sim p \wedge q) \square q$

$\equiv \sim(\sim p \wedge q) \wedge q$ Ley de D' Morgan

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge q$ Ley de absorción

$\equiv p \wedge q$

Tenemos en (I)

$\sim p \rightarrow (p \wedge q)$ Ley de la condicional

$\equiv \sim(\sim p) \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \vee (p \wedge q)$ Ley de absorción

$\equiv p$

Clave C

PROBLEMA N.° 2

Dados los siguientes esquemas tautológicos:

$(p \,\Delta\, q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow t)$

$\sim(q \rightarrow \sim q)$

Calcule los valores veritativos de p; q y t.

A) VVV B) VFF
C) FVF
D) FVV E) FFF

Resolución

Se tiene que

$(p \,\Delta\, q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow t) \equiv \text{V}$

$\sim(q \rightarrow \sim q) \equiv \text{V}$

Analizamos convenientemente

$\sim(q \rightarrow \sim q) \equiv \text{V}$

q: V, $\sim q$: F

$q \rightarrow \sim q$: F

Luego

$(p \,\Delta\, q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow t) \equiv V$

$\underbrace{F \quad V}_{V} \qquad \underbrace{V \quad V}_{V}$ sí cumple

$(p \,\Delta\, q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow t) \equiv V$

$\underbrace{V \quad V}_{F} \qquad \underbrace{F \quad\quad}_{F}$ no cumple

Por lo tanto, p es F, q es V y t es V.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Si se sabe que $p \wedge q \equiv F$ y $q \rightarrow r \equiv F$, dé el valor de verdad de:

I. $[(p \rightarrow r) \wedge q] \rightarrow (r \vee q)$

II. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim q)$

III. $[(p \wedge r) \vee q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FFV E) VFV

Resolución

Se sabe:

- $q \rightarrow r \equiv F$: q es verdadero
  r es falsa
- $p \wedge \underbrace{q}_{V} \equiv F$: p es falsa

Tenemos: $p \equiv F$; $q \equiv V$; $r \equiv F$

Luego, reemplazamos en los esquemas:

I. $[(p \rightarrow r) \wedge q] \rightarrow (r \vee q)$

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{F \rightarrow F}_{V} \quad \wedge V}_{V} \rightarrow \underbrace{F \vee V}_{V}}_{V}$

II. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim q)$

$\underbrace{\underbrace{F \rightarrow V}_{V} \quad \wedge \quad \underbrace{V \rightarrow F}_{F}}_{F}$

III. $[(p \wedge r) \vee q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(F \wedge F)}_{F} \vee V}_{V} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{F \rightarrow V}_{V}}_{V}$

Por lo tanto, la respuesta es VFV.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 4

Reduzca la siguiente proposición:

No es cierto que Luis sea una persona tranquila y un doctor, entonces Luis es maestro o no es una persona tranquila; además Luis es maestro.

A) Luis es tranquilo.
B) Luis es doctor.
C) Luis es tranquilo y doctor.
D) Luis es maestro.
E) Luis es doctor y maestro.

Resolución

Sean las proposiciones:

p: Luis es una persona tranquila
q: Luis es un doctor.
r: Luis es maestro.

Simbolizamos el enunciado:

$[\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)] \wedge r$ Ley de la condicional

$[(p \wedge q) \vee (r \vee \sim p)] \wedge r$ Ley asociativa

$\underbrace{\left[\{(p \wedge q) \vee \sim p\} \vee r\right] \wedge r}_{r}$ Ley de absorción

Por lo tanto, Luis es maestro.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 5

Si se cumple que

$p * q \equiv \sim p \wedge q$

$p \nabla q \equiv p \vee q$

reduzca

$\{q \nabla [(p \vee (r * s)) \wedge p]\} \rightarrow [(\sim p * \sim q) \nabla \sim q]$

A) p
B) $p \vee q$
C) $\sim p$
D) q
E) $\sim q$

Resolución

Nos definen

$p * q \equiv \sim p \wedge q$

$p \nabla q \equiv p \vee q$

Luego, reemplazamos en el esquema

$\{q \nabla [\underbrace{(p \vee (r * s)) \wedge p}_{\text{Ley de absorción}}]\} \rightarrow [\underbrace{(\sim p * \sim q)}_{\sim(\sim p) \wedge \sim q} \nabla \sim q]$

$q \nabla p \qquad\qquad \underbrace{(p \wedge \sim q) \vee \sim q}_{\text{Ley de absorción}}$

$\equiv (q \vee p) \rightarrow \sim q$ Ley de la condicional

$\equiv \sim(q \vee p) \vee \sim q$

$\equiv \underbrace{(\sim q \wedge \sim p) \vee \sim q}_{\text{Ley de absorción}}$

$\equiv \sim q$

Clave E

PROBLEMA N.° 6

Simplifique

$\sim\{[p \wedge (q \vee \sim r \vee s \vee p)] \rightarrow [p \vee (p \wedge r)]\} \rightarrow (r \wedge s \wedge \sim t)$

A) V
B) F
C) $p \vee q$
D) $p \rightarrow q$
E) $(r \wedge s) \vee \sim t$

Resolución

Sea

$R: \sim\{\underbrace{[p \wedge (q \vee \sim r \vee s \vee p)]}_{A} \rightarrow \underbrace{[p \vee (p \wedge r)]}_{B}\}$

$\rightarrow \underbrace{(r \wedge s \wedge \sim t)}_{C}$

Analizando tenemos

$A: p \wedge (q \vee \sim r \vee s \vee p)$ Ley asociativa

$\underbrace{p \wedge (p \vee \{q \vee \sim r \vee s\})}_{p}$ Ley de absorción

$B: \underbrace{p \vee (p \wedge r)}_{p}$ Ley de absorción

Reemplazamos en

$R: \underbrace{\underbrace{\sim\underbrace{\{p \rightarrow p\}}_{V}}_{F} \rightarrow C}_{V}$

$\therefore R \equiv V$

Clave A

PROBLEMA N.° 7

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas:

I. $(p \wedge q) \vee [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \wedge r \wedge s)]$

II. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

III. $(p \rightarrow q) \vee \sim(p \nleftrightarrow q)$

A) I y II
B) solo II
C) solo III
D) II y III
E) todos

Resolución

Analizamos:

I. $(p \wedge q) \vee [(\sim p \vee \underbrace{\sim q) \vee (\sim q \wedge r \wedge s}_{\sim q})]$

Ley de absorción asociando convenientemente

$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

$\equiv \underbrace{(p \wedge q) \vee \sim p}_{} \vee \sim q$ Ley de absorción

$\equiv q \vee \sim p \vee \sim q$

$\equiv \underbrace{\underbrace{q \vee \sim q}_{V} \vee \sim p}_{V}$ Tautología

II. $\underbrace{\underbrace{(p \rightarrow q)}_{a} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow q)}_{a}}_{V}$ Tautología

III. $(p \rightarrow q) \vee \underline{\sim(p \nleftrightarrow q)}$

$(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$

$\underbrace{(p \rightarrow q) \vee [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]}_{p \rightarrow q}$ Consistente

Por lo tanto, solo I y II son tautológicas.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Esquematice la siguiente proposición utilizando el lenguaje lógico.

Si James no trabajara podría estudiar; para que ello le suceda, su hermano Ronald debe trabajar, por ende, dejaría de estudiar.

A) $\sim(r \vee \sim s) \rightarrow (p \vee q)$
B) $(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow \sim s)$
C) $(r \rightarrow s) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
D) $\sim(r \rightarrow \sim s) \vee (p \wedge q)$
E) $(r \rightarrow \sim s) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Resolución

Sean las proposiciones:

p: James trabaja
q: James estudia
r: Ronald trabaja
s: Ronald estudia

Simbolizamos el enunciado

$(r \rightarrow \sim s) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

No aprendí Lógica dado que no aprendí Matemática; ya que aprendo Matemática o Lógica.

De lo anterior, se concluye que

A) no aprendo Matemática ni Lógica.
B) aprendo Matemática y Lógica.
C) aprendo Matemática o Lógica.
D) no es cierto que aprenda Lógica pero no Matemática.
E) no es cierto que aprenda Matemática pero no Lógica.

Resolución

Sea

p: aprendí Lógica

q: aprendí Matemática

Simbolizamos

No aprendí Lógica dado que no aprendí Matemática;
$\sim p \quad \leftarrow \quad \sim q$

ya que aprendo Matemática o Lógica
$\leftarrow \quad q \quad \vee \quad p$

El esquema molecular será

$(q \vee p) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ — Ley de la condicional

$\equiv \sim(q \vee p) \vee [\sim(\sim q) \vee \sim p]$

$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee (q \vee \sim p)$ — Ley asociativa

$\equiv \underbrace{(\sim q \wedge \sim p) \vee \sim p} \vee q$ — Ley de absorción

$\equiv \quad \sim p \quad \vee q$

$\equiv \sim(p \wedge \sim q)$

Por lo tanto, *No es cierto que aprenda Lógica pero no Matemática.*

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Si $p * q \equiv (q \rightarrow \sim p)$

además, $p \# q = \sim p * \sim q$

reduzca $E = [(p \# \sim q) \# (\sim p * p)] * p$.

A) p B) $\sim p$ C) q

D) $\sim q$ E) $p \vee q$

Resolución

Tenemos:

$p * q \equiv q \rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p \equiv \sim p \vee \sim q$

$p \# q \equiv \sim p * \sim q \equiv p \vee q$

Luego, reemplazamos en la fórmula lógica

$E = [(p \# \sim q) \# (\sim p * p)] * p$

$[(p \vee \sim q) \# \underbrace{(p \vee \sim p)}_{V}] * p$

$\underbrace{[(p \vee \sim q) \vee V]}_{V} \quad * p$

$\underbrace{V \quad * p}_{F \vee \sim p}$

$\downarrow$

p	$F \vee \sim p$
F	V
V	F

$\therefore \ E \equiv \sim p$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Si la proposición

$\{(p \wedge q) \vee \sim r\} \rightarrow q$

es falsa

Las siguientes proposiciones son:

I. $[(\sim p \vee r) \, \Delta \, p] \leftrightarrow \sim q$

II. $\{\sim(r \rightarrow \sim t) \rightarrow p\} \wedge q$

III. $\{(\sim r \vee p) \leftrightarrow \sim q\} \, \Delta \, q$

A) VVV B) VFV C) FFV

D) FVV E) FVF

Resolución

Como la condicional es falsa, se deducen los valores de verdad

$\overbrace{\{(p \wedge q) \vee \sim r\}}^{V} \rightarrow \overbrace{q}^{F}$ es falsa

$(p \wedge q)$: $\underbrace{F}_{F}$; $\sim r$: F, r: V

entonces

$q \equiv$ F; $r \equiv$ F; y de p no se puede determinar su valor de verdad.

Reemplazamos en cada caso:

I. $[(\sim p \vee r)\ \Delta\ p] \leftrightarrow \sim q$

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\sim p \vee r)}_{F}}_{\sim p}\ \Delta\ p}_{V} \leftrightarrow \underbrace{\sim \overset{F}{q}}_{V}}_{V}$

II. $\{\sim(r \to \sim t) \to p\} \wedge q$

$\underbrace{\{\sim(r \to \sim t) \to p\} \wedge \underbrace{q}_{F}}_{F}$

III. $\{(\sim r \vee p) \leftrightarrow \sim q\}\ \Delta\ q$

$\sim F$ ... $\sim F$

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{V}_{} \leftrightarrow V}_{V}\ \Delta\ F}_{V}$

Por lo tanto, la respuesta es VFV.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 12

Simplifique

$R = p \vee [\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge r\} \wedge \{[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)] \vee r\}]$

A) $p \vee r$ B) $p \vee q$ C) $q \vee r$

D) $q \vee \sim r$ E) $q \wedge \sim r$

Resolución

Sea

$R = p \vee [\underbrace{\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge r\}}_{r} \wedge \{[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)] \vee r\}]$ Ley de absorción

$R = p \vee \underbrace{[r \wedge \{[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)] \vee r\}]}_{r}$ Ley de absorción

$\therefore\ R = p \vee r$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

Se definen las operaciones:

$p \otimes q \equiv \sim(p \wedge q)$ y

$p \to q \equiv \sim(\sim p \to q)$

Simplifique la siguiente expresión

$[(p \to q) \otimes (\sim q \to p)] \leftrightarrow [(q \wedge r) \to \sim(r \wedge q)]$.

A) $p \wedge q$ B) $q \wedge \sim q$ C) $p \to q$

D) p E) $p \wedge r$

Resolución

Se definen:

- $p \otimes q \equiv \sim(p \wedge q)$ Ley de D' Morgan

  $p \otimes q \equiv \sim p \vee \sim q$ (I)

- $p \to q \equiv \sim(\sim p \to q)$ Ley de la condicional

  $p \to q \equiv \sim(\sim(\sim p) \vee q)$

  $p \to q \equiv \sim p \wedge \sim q$ (II)

Reemplazamos las equivalencias (I) y (II)

$[\underbrace{(p \to q)} \otimes \underbrace{(\sim q \to p)}] \leftrightarrow [\underbrace{(q \wedge r) \to \sim(r \wedge q)}]$

$(\sim p \wedge \sim q) \otimes (q \wedge \sim p)$ $\sim(q \wedge r) \wedge \sim[\sim(r \wedge q)]$

$\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim(q \wedge \sim p)$ $(\sim q \vee \sim r) \wedge (r \wedge q)$

$(p \vee q) \vee (\sim q \vee p)$ $(\sim q \vee \not\sim r) \wedge r \wedge q$

$p \vee \underbrace{q \vee \sim q}_{} \vee p$ $\underbrace{\underbrace{\sim q} \wedge r \wedge q}$

$\underbrace{\qquad V \qquad}$

$\underbrace{V \leftrightarrow F}_{F}$ Contradicción

De las alternativas del problema, la única que nos da un esquema contradictorio es la alternativa B.

$\therefore\ q \wedge \sim q$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

Si el valor de la siguiente proposición molecular $[(p \wedge \sim q) \wedge (r \rightarrow q)] \wedge [\{(\sim p \vee q) \rightarrow q\} \wedge p]$ es verdadero, determine los valores de verdad de p, q y r (en ese orden).

A) VFF B) VFV
C) VVV
D) FVV E) FFV

Resolución

Se tiene que

$$\underbrace{[(p \wedge \sim q) \wedge (r \rightarrow q)]}_{A} \wedge \underbrace{[\{(\sim p \vee q) \rightarrow q\} \wedge p]}_{B} \equiv V$$

Entonces, A es V y B es V.

A: $(p \wedge \sim q) \wedge (r \rightarrow q)$

p: V; q: F, entonces $\sim q$: V; r: F

$\underbrace{V \wedge V}_{V}$ $\quad$ $\underbrace{F \rightarrow F}_{V}$

Verificamos en

B: $\{(\sim p \vee q) \rightarrow q\} \wedge p$

$\sim p$: F; q: F; p: V

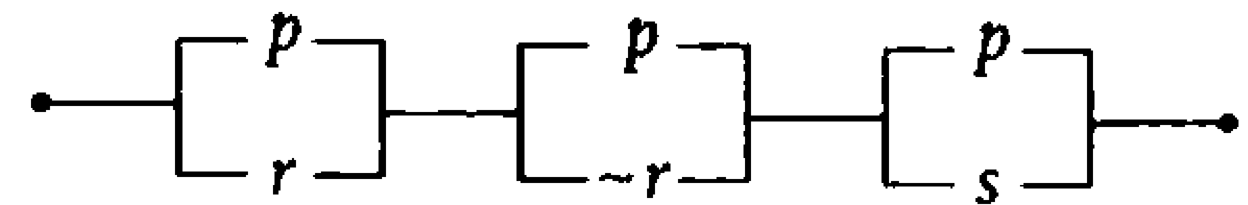
$\underbrace{F \vee F}_{F}$; $\quad \underbrace{F \rightarrow F}_{V}$ $\quad$ V $\quad$ Correcto

Por lo tanto, p es V, q es F y r es F.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

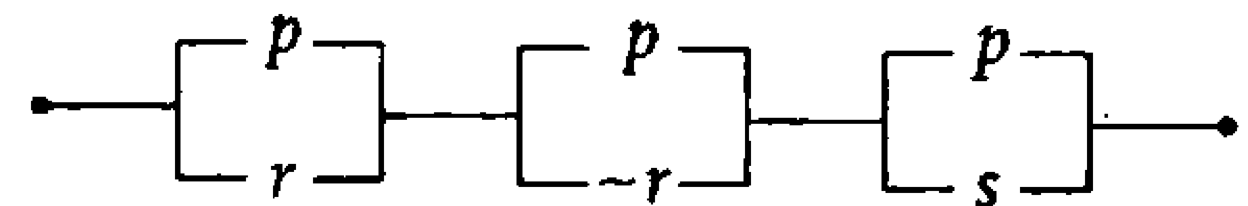
Simplifique el circuito mostrado e indique la proposición más simple que lo represente.



A) p B) $p \vee q$ C) $p \vee s$
D) s E) $\sim r$

Resolución

Del circuito lógico:



Su esquema molecular es

$(\underline{p \vee} r) \wedge (\underline{p \vee} \sim r) \wedge (\underline{p \vee} s)$ Ley distributiva

$\equiv p \vee (\underbrace{\underbrace{r \wedge \sim r}_{F} \wedge s}_{F})$

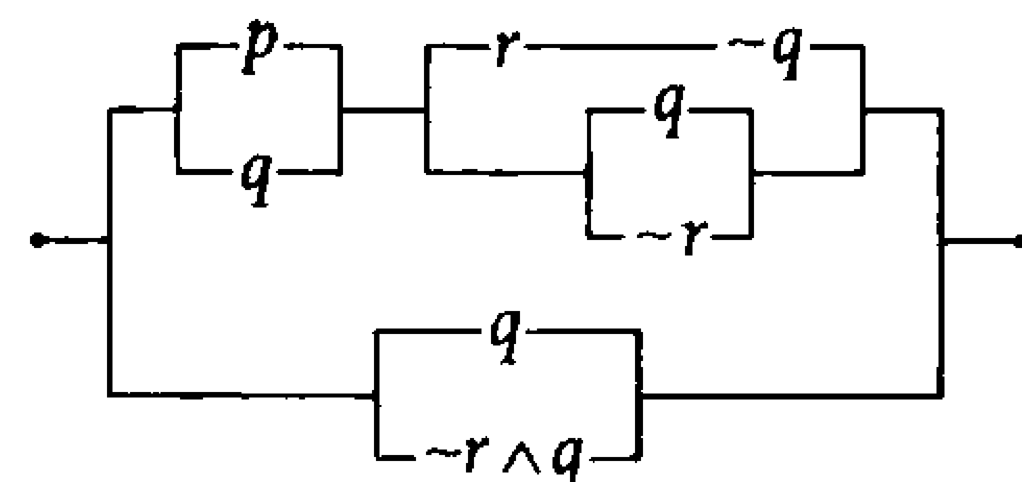
$\equiv p \vee F$

$\equiv p$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

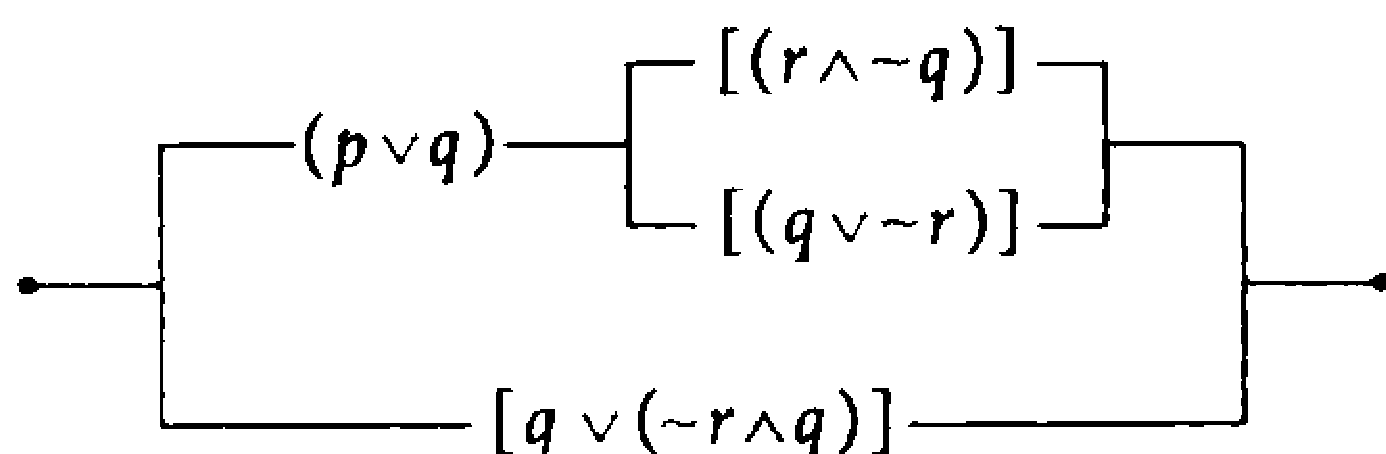
Simplifique el siguiente circuito.

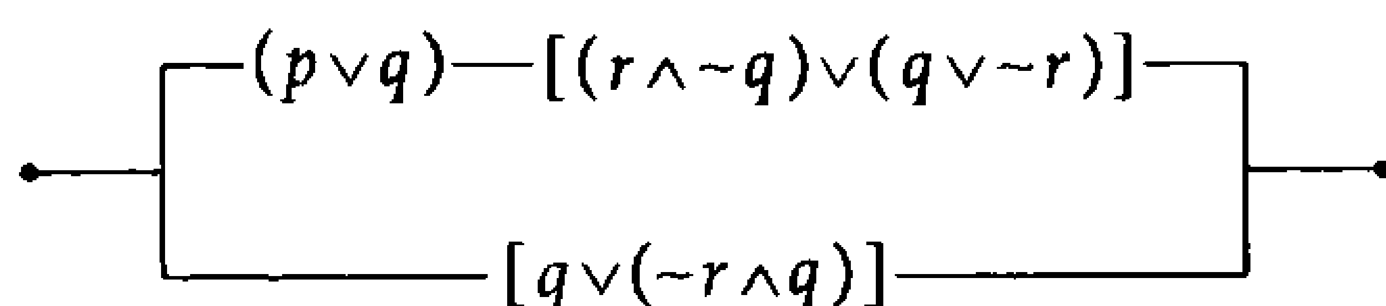


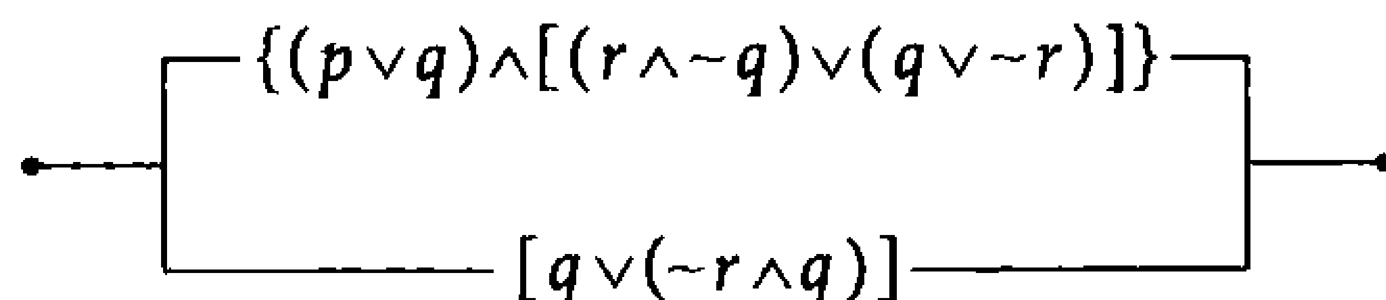
A) p B) q C) $p \vee q$
D) $r \wedge q$ E) $p \wedge q$

Resolución

Reducimos el circuito lógico







Luego tenemos el siguiente esquema molecular

R: $\{(p\vee q)\wedge[\underbrace{(r\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim r)}_{A}]\}\vee[\underbrace{q\vee(\sim r\wedge q)}_{B}]$

Entonces

A: $[(r\wedge\sim q)\vee(q\vee\sim r)]$ Ley de D' Morgan

$[\underbrace{(r\wedge\sim q)\vee\sim(r\wedge\sim q)}_{\text{V}}]$ Ley del complemento

B: $[\underbrace{q\vee(\sim r\wedge q)}_{q}]$ Ley de absorción

Reemplazamos en R

R: $\underbrace{\{\underbrace{(p\vee q)}_{\substack{\text{V}\\ \text{F}}}\wedge \text{V}\}}_{\substack{\boxed{\text{V}}\\ \boxed{\text{F}}}}\vee q$

$(p\vee q)\quad\vee q$ Ley asociativa

$p\vee\quad(q\vee q)$ Ley de idempotencia

$p\vee q$

$\therefore\ R\equiv p\vee q$

Clave C

PROBLEMA N.° 17

De las siguientes proposiciones, halle cuáles son equivalentes:

I. Es necesario que Sofía no vaya al cine para que termine su tarea.

II. No es cierto que Sofía termine su tarea y vaya al cine.

III. Sofía no terminará su tarea y no irá al cine.

A) I y III
B) I y II
C) II y III
D) todas
E) ninguna

Resolución

Simbolizando, las proposiciones simples son:

p: Sofía va al cine.

q: Sofía termina su tarea.

I. Es necesario que $\underbrace{\text{Sofía no vaya al cine}}_{\sim p}$

$\underbrace{\text{para que}}_{\leftarrow}$ $\underbrace{\text{termine su tarea.}}_{q}$

$q\rightarrow\sim p$

$\equiv\sim q\vee\sim p$

$\equiv\sim p\vee\sim q$

II. $\underbrace{\text{No es cierto que}}_{\sim}$ $\underbrace{\text{Sofía termine su tarea}}_{q}$

$\underset{\wedge}{\text{y}}$ $\underbrace{\text{vaya al cine.}}_{p}$

$\sim(q\wedge p)$

$\equiv\sim q\vee\sim p$

$\equiv\sim p\vee\sim q$

III. Sofía no terminará su tarea y no irá al cine.

$\sim q \quad \wedge \quad \sim p$

$\sim q \wedge \sim p$

$\equiv \sim p \wedge \sim q$

Por lo tanto, al comparar, son equivalentes I y II.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Se definen los operadores * y ⊕ mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$p * q$	$r \oplus \sim p$
V	V	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Si consideramos V=1; F=0 y la matriz principal de $p * (q \oplus r)$ como un numeral en base 2, exprese dicho resultado en base 10.

A) 128 B) 126
C) 129
D) 127 E) 191

Resolución

Evaluamos el esquema molecular $p * (q \oplus r)$ en la tabla de verdad:

p	q	r	$\sim p$	$p * q$	$r \oplus \sim p$	$q \oplus r$	p	$*$	$(q \oplus r)$
V	**V**	V	F	**F**	**V**	F	V	**V**	F
V	**V**	F	F	**F**	F	V	V	**F**	V
V	F	**V**	**F**	V	**V**	F	V	**V**	F
V	F	F	F	V	F	F	V	**V**	F
F	V	V	V	V	F	F	F	**V**	F
F	V	F	V	V	F	V	F	**V**	V
F	F	V	V	V	F	F	F	**V**	F
F	F	F	V	V	F	F	F	**V**	F

matriz principal ↑

Por lo tanto, de la matriz principal tenemos:

$10111111_{(2)} = 191$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Si se define $p * q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$, simplifique $\sim[(p * \sim q) \rightarrow \sim q]$.

A) $\sim q \wedge p$ B) $p \vee q$
C) q
D) $\sim p$ E) $q \wedge p$

Resolución

Se define:

$$p * q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$p * q \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$$

$$p * q \equiv \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$p * q \equiv \sim \quad (p \leftrightarrow q)$$

$$p * q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

Simplificamos por las leyes de la lógica:

$\sim[\underbrace{(p * \sim q)} \rightarrow \sim q]$

$\quad \sim(p \leftrightarrow \sim q)$

$\equiv \sim[(p \leftrightarrow \sim q) \vee \sim q]$

$\equiv \sim\underbrace{(p \leftrightarrow \sim q)} \wedge q$

$\quad \sim(p \leftrightarrow q)$ — Ley de la bicondicional

$\equiv \underbrace{(p \leftrightarrow q)} \wedge q$ — Ley de la bicondicional

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge \underbrace{(\sim q \vee p) \wedge q}$

$\equiv \underbrace{(\sim p \vee q) \wedge p} \wedge q$ — Ley de la absorción

$\equiv q \wedge p \wedge q$

$\equiv p \wedge q$

Clave E

PROBLEMA N.° 20

Si sabemos que $(p \wedge q)$ es falso y $(q \rightarrow r)$ también es falso, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $(\sim p \vee r) \vee s$

II. $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

III. $[p \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow [(r \rightarrow q) \vee \sim(q \wedge t)]$

A) I y II
B) II y III
C) I y III
D) I, II y III
E) ninguna

Resolución

Se tiene que

$p \wedge q \equiv F$

$q \rightarrow r \equiv F$

Analizamos convenientemente

$q \rightarrow r \equiv F$

$\downarrow \quad \downarrow$

$V \quad F$

Luego

$p \wedge q \equiv F$

$\downarrow \quad \downarrow$

$F \quad V$

Entonces

I. $(\underbrace{\sim p}_{V} \vee r) \vee s$

$\quad V$

$\quad V$

II. $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

$\quad \downarrow$

$\quad F$

$\quad F$

$\quad V$

III. $[\underbrace{p \vee (q \wedge \sim t)}_{A}] \leftrightarrow [(r \rightarrow q) \vee \sim(q \wedge t)]$

$\quad \downarrow$

$\quad F$

$\quad V$

$\quad V$

A: $[p \vee (q \wedge \sim t)]$ — Ley de la identidad

$\quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad F \quad V \quad \sim t$

$\quad \sim t$

Reemplazamos en (III)

III. $\sim t \leftrightarrow V \equiv \sim t$

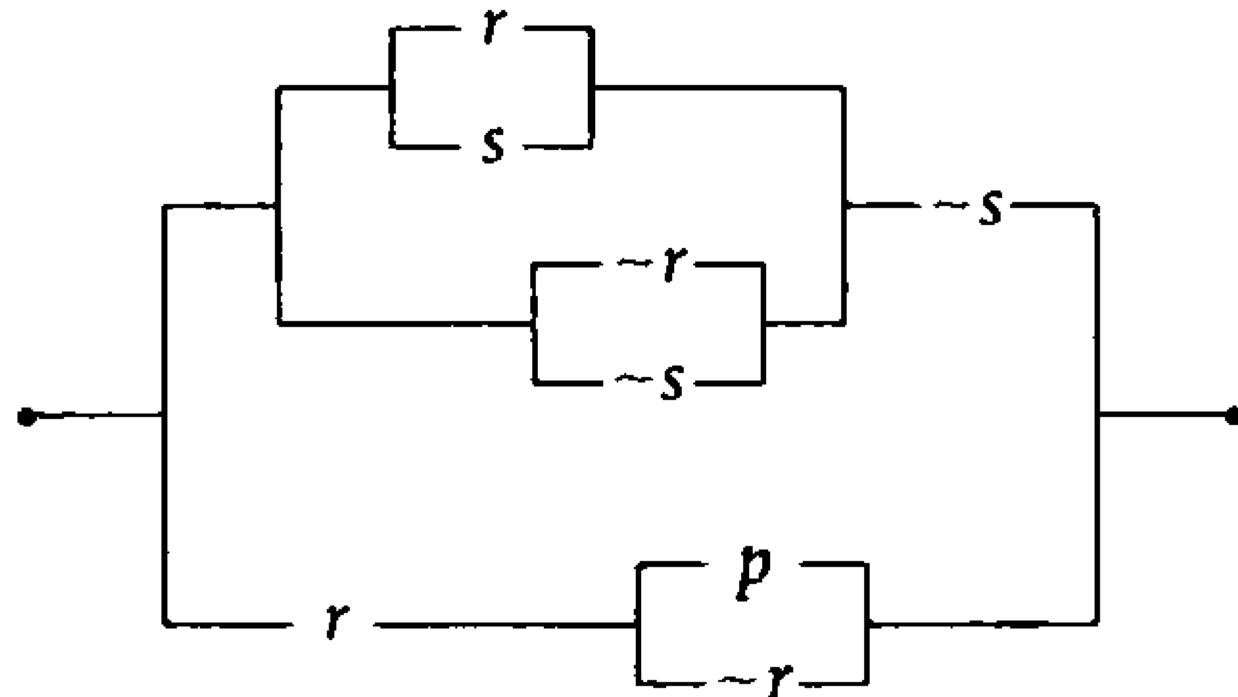
V	V
F	F

Por lo tanto, son verdaderas I y II.

Clave A

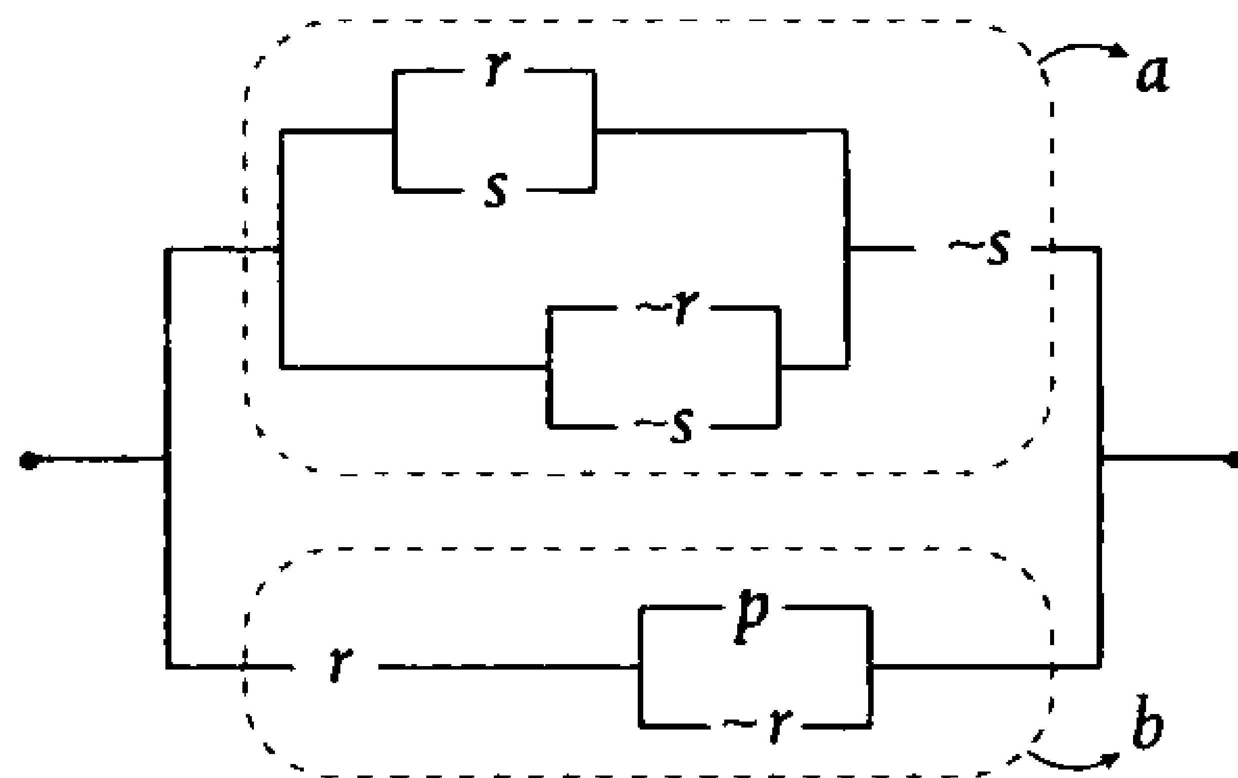
PROBLEMA N.° 21

Halle la forma más simple que represente al siguiente circuito:



A) $(p \wedge r) \vee (\sim s)$
B) $(p \vee r) \wedge (\sim s)$
C) $p \vee \sim s$
D) $r \vee \sim s$
E) $p \vee s$

Resolución



El esquema molecular es

$$\underbrace{\{[(r \vee s) \vee (\sim r \vee \sim s)] \wedge \sim s\}}_{a} \vee \underbrace{\{r \wedge (p \vee \sim r)\}}_{b}$$

asociativa

$$(r \vee s \vee \sim r \vee \sim s) \wedge \sim s$$

absorción: $\sim s$ absorción: $r \wedge p$

$\equiv \sim s \vee (r \wedge p)$

$\therefore\ (p \wedge r) \vee \sim s$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Al simplificar

$[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \rightarrow \sim q)] \vee [p \rightarrow \sim q]$

se obtiene

A) $q \vee p$
B) $\sim q \vee p$
C) $p \wedge q$
D) $\sim p \vee q$
E) $\sim(p \wedge q)$

Resolución

Sea

R: $[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \rightarrow \sim q)] \vee [p \rightarrow \sim q]$

Ley de la condicional

$$[\underbrace{(q \vee \sim p) \wedge \sim(p \vee \sim q)}_{A}] \vee [\sim p \vee \sim q]$$

Luego

A: $(q \vee \sim p) \wedge \sim(p \vee \sim q)$ — Ley de D' Morgan

$(q \vee \sim p) \wedge \sim p \wedge q$ — Ley de absorción

$\sim p \wedge q$

Reemplazamos en

R: $[\sim p \wedge q] \vee [\sim p \vee \sim q]$ — Ley asociativa

$\{[\sim p \wedge q] \vee \sim p\} \vee \sim q$ — Ley de absorción

$\sim p \vee \sim q$ — Ley de D' Morgan

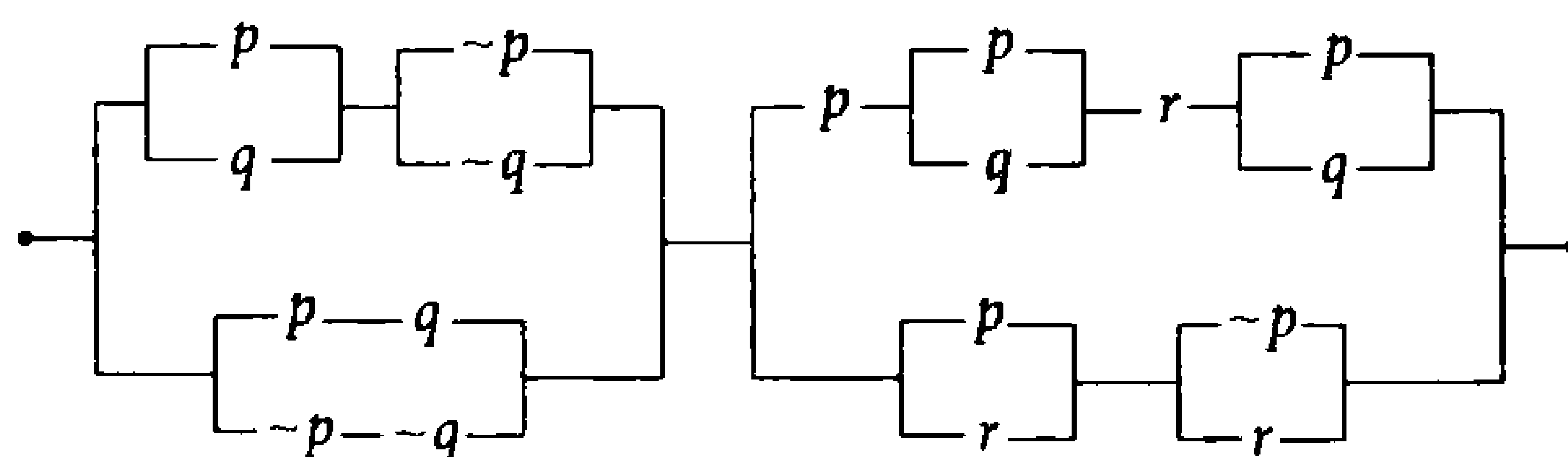
$\sim(p \wedge q)$

$\therefore\ R \equiv \sim(p \wedge q)$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Simplifique el siguiente circuito lógico y dé el equivalente.

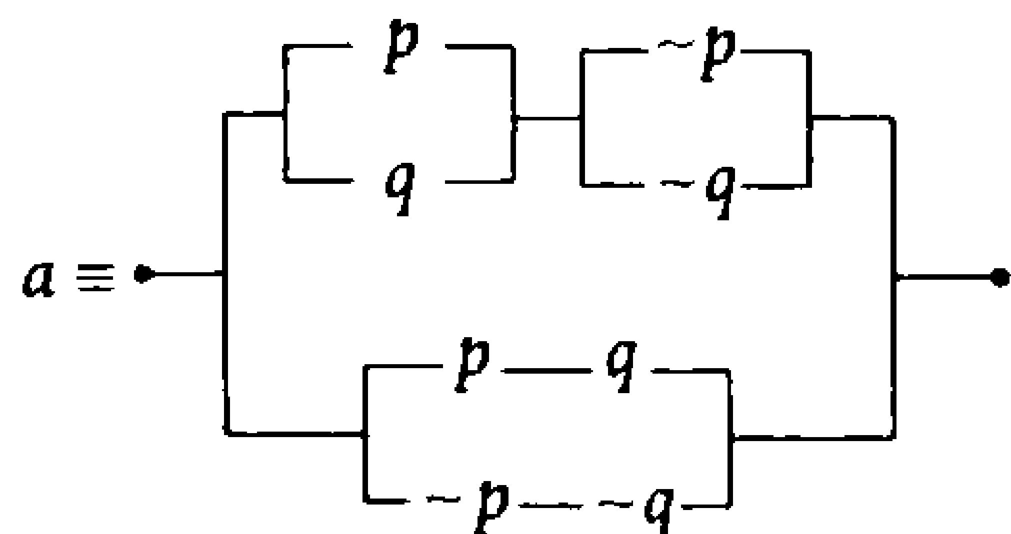


A) p B) q C) r D) $\sim q$ E) $p \sim p$

Resolución

Reducimos por partes

Sea



$a \equiv [(p \vee q) \wedge \underbrace{(\sim p \vee \sim q)}] \vee [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

$a \equiv \underbrace{[(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)] \vee (p \wedge q)} \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$(p \vee q) \vee (p \wedge q)$ Ley de absorción

$a \equiv p \vee q \vee (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ Ley asociativa

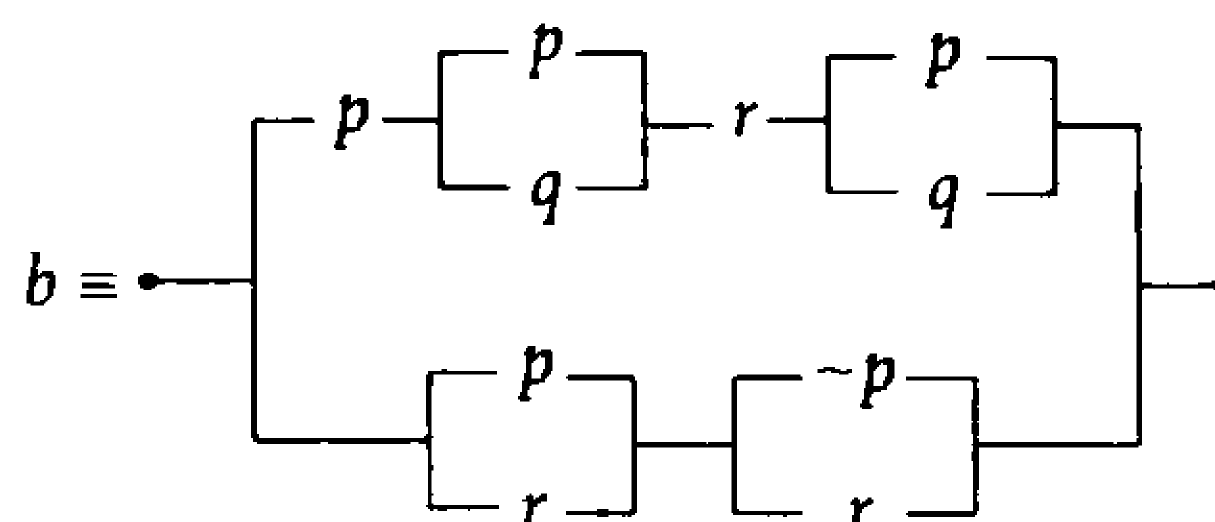
$a \equiv \underbrace{p \vee (p \wedge q)} \vee \underbrace{q \vee (\sim p \wedge \sim q)}$ Ley de absorción

$a \equiv p \vee q \vee \sim p$ Ley comutativa

$a \equiv \underbrace{\underbrace{p \vee \sim p}_{V} \vee q}_{V}$ Ley asociativa

$a \equiv V$

Sea



$b \equiv [\underbrace{p \wedge (p \vee q) \wedge r \wedge (p \vee q)}_{\text{asociativa}}] \vee [\underbrace{(p \vee r) \wedge (\sim p \vee r)}_{\text{distributiva}}]$

$\underbrace{\underbrace{p \wedge (p \vee q)}_{\text{absorción}} \wedge r}$ $\quad$ $\underbrace{\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee r}$

$p \qquad F$

$p \wedge r \qquad r$

$b \equiv (p \wedge r) \vee r$ Ley de absorción

$b \equiv r$

Nos piden

$\bullet\!-a-b-\!\bullet$

$\equiv a \wedge b$

Reemplazando tenemos

$\equiv V \wedge r$

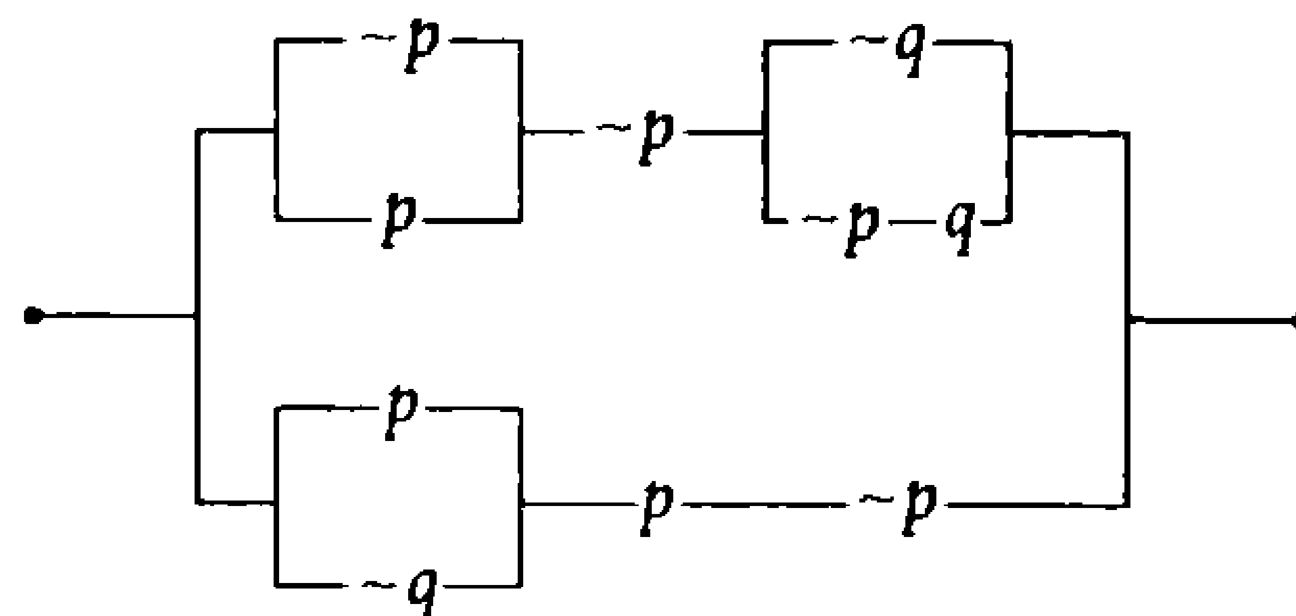
$\equiv r$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

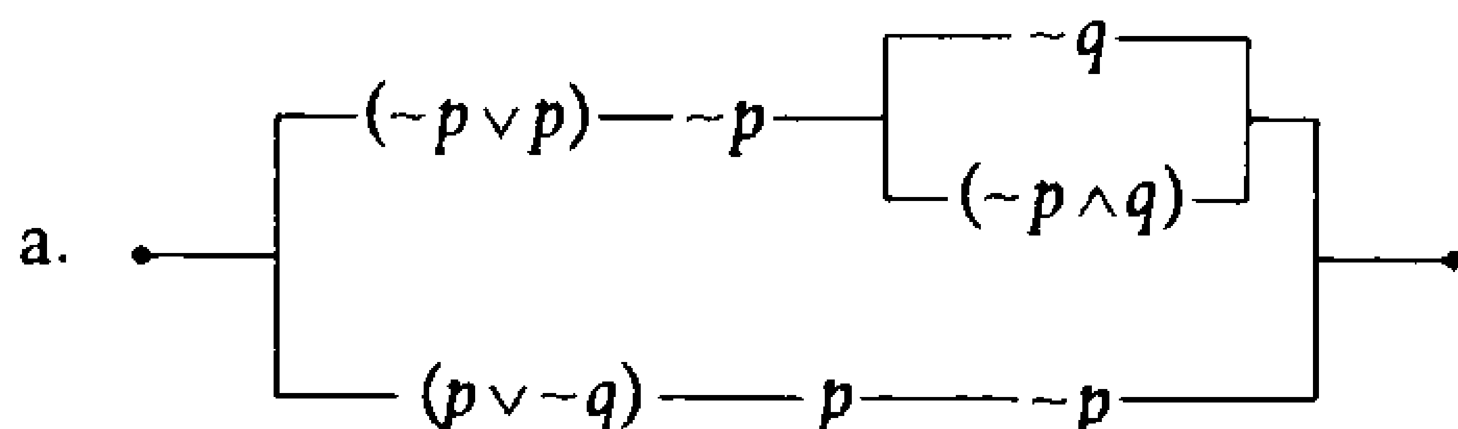
Simplifique y dé el equivalente del siguiente circuito lógico:

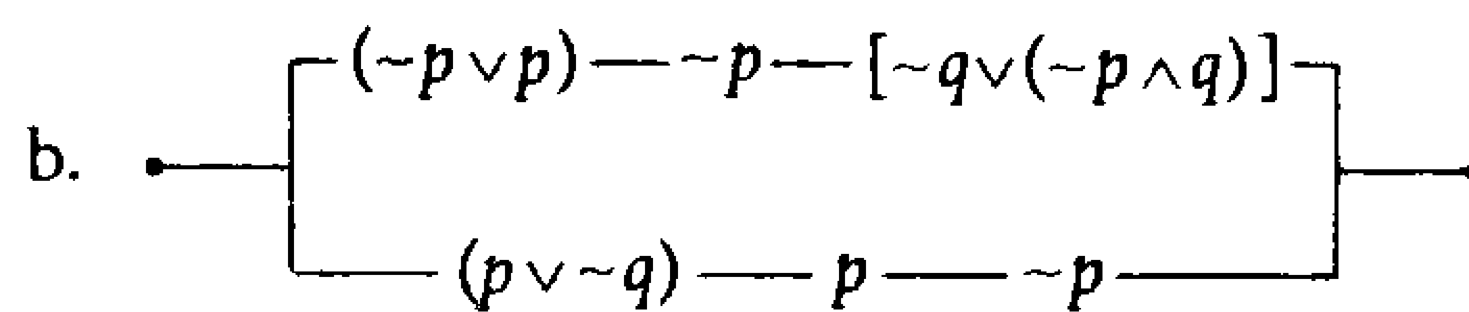
A) $p \wedge \sim q$
B) $p \vee q$
C) $\sim p$
D) $\sim p \vee \sim q$
E) F

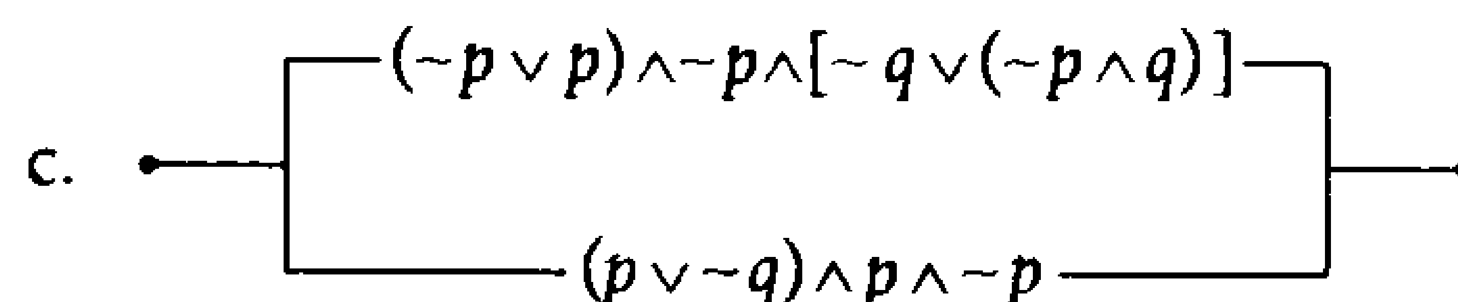


Resolución

Reducimos el circuito lógico

a. 

b. 

c. 

Luego, tenemos el siguiente esquema molecular

R: $\underbrace{\{(\sim p \vee p) \wedge \sim p \wedge [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]\}}_{A} \vee \underbrace{\{(p \vee \sim q) \wedge p \wedge \sim p\}}_{B}$

A: $\{\underbrace{(\sim p \vee p) \wedge \sim p}\wedge [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]\}$ Ley de absorción

$\sim p \wedge \underbrace{[\sim q \vee (\sim p \wedge q)]}$ Ley de absorción

$\underbrace{\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p)}_{\sim p}$ Ley de absorción

B: $\underbrace{(p \vee \sim q) \wedge \underbrace{p \wedge \sim p}_{F}}_{F}$ Ley del complemento / Ley de la identidad

Reemplazamos en

R: $\underbrace{\sim p \vee F}_{\sim p}$ Ley de la identidad

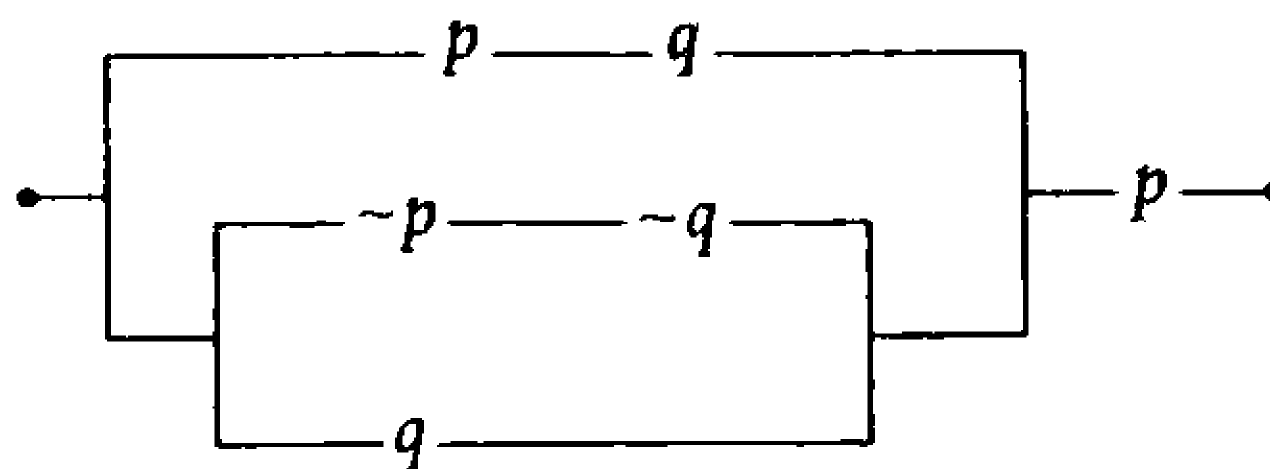
$\therefore\ R \equiv \sim p$

Clave C

PROBLEMA N.° 25

Exprese su esquema molecular y simplifique el siguiente circuito lógico.

A) $p \vee q$
B) $p \wedge q$
C) $\sim p \vee \sim q$
D) $\sim p \wedge \sim q$
E) $p \rightarrow q$



Resolución

Su esquema molecular es (ver el gráfico)

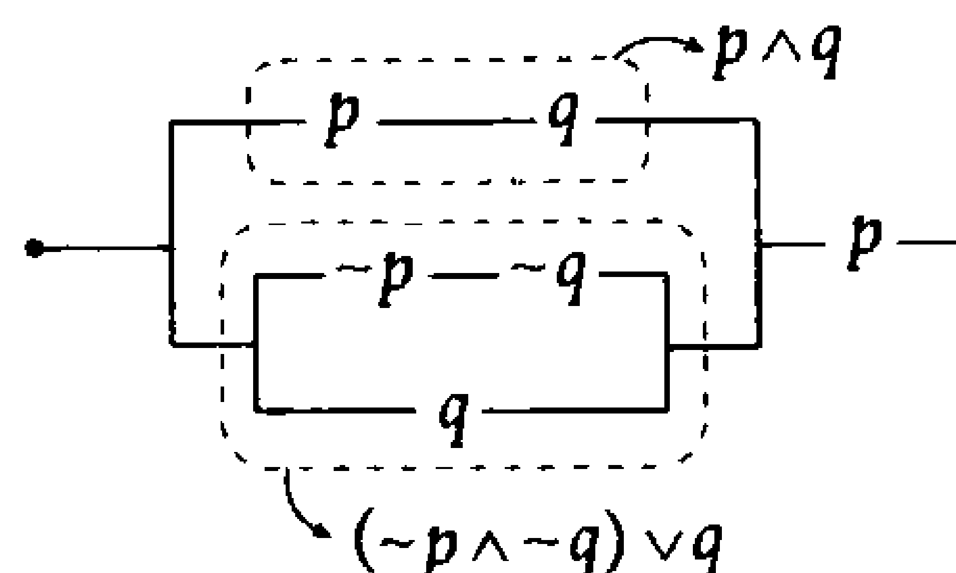
$\{(p \wedge q) \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee q]\} \wedge p$ (absorción: $\sim p \vee q$)

$\equiv \{\underbrace{(p \wedge q) \vee q}_{q} \vee \sim p\} \wedge p$ Ley de absorción

$\equiv (q \vee \sim p) \wedge p$ Ley de absorción

$\equiv q \wedge p$

$\equiv p \wedge q$



Por lo tanto, la respuesta es $p \wedge q$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

Simplifique $[\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee r)] \wedge \sim[\sim q \rightarrow \sim p]$.

A) $(\sim q \vee r)$ B) $(p \wedge \sim q) \vee r$ C) $\sim p \wedge q$ D) $\sim q \wedge p$ E) $p \vee \sim q$

Resolución

Sea

R: $[\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee r)] \wedge \sim[\sim q \rightarrow \sim p]$ Ley de la condicional

$[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r)] \wedge \sim[q \vee \sim p]$ Ley de D' Morgan

$[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r)] \wedge (\sim q \wedge p)$ Ley de absorción

$(\sim q \wedge p)$

$\therefore\ R \equiv \sim q \wedge p$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

De la falsedad de

$(p \to \sim q) \vee (\sim r \to \sim s)$

halle el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares.

I. $\sim(\sim q \vee \sim s) \to \sim p$

II. $\sim(\sim r \wedge s) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$

III. $p \to \sim[q \to \sim(s \to r)]$

A) VFF
B) FVV
C) FFF
D) VFV
E) FVF

Resolución

Por dato, es falso:

$(p \to \sim q) \vee (\sim r \to \sim s) \equiv F$

V F V

V F V F

F F

Entonces, se obtiene

$p \equiv V;$

$q \equiv V;$

$r \equiv F;$

$s \equiv V$

Evaluamos cada esquema:

I. $\sim(\sim q \vee \sim s) \to \sim p$

F F

F

V F

F

II. $\sim(\sim r \wedge s) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$

V V F F

V

F V

F

III. $p \to \sim[q \to \sim(s \to r)]$

V F

F

V V

V

V F

F

Por lo tanto, la respuesta es FFF.

Clave C

PROBLEMA N.° 28

Simplifique el esquema molecular

$\{[\sim(q \to p) \to \sim(p \to q)] \wedge (p \to \sim q)\} \vee \sim q$

A) p B) $\sim p$ C) $p \vee \sim q$
D) $\sim q$ E) q

Resolución

Sea

$R: \{\underbrace{[\sim(q \to p) \to \sim(p \to q)]}_{A} \wedge \underbrace{(p \to \sim q)}_{B}\} \vee \sim q$

Luego

$A: \sim(q \to p) \to \sim(p \to q)$ Ley de la condicional

$(q \to p) \vee \sim(p \to q)$ Ley de la condicional

$(\sim q \vee p) \vee \sim(\sim p \vee q)$ Ley de D' Morgan

$\sim q \vee p \vee (p \wedge \sim q)$ Ley de absorción

$\sim q \vee p$

$B: p \to \sim q$ Ley de la condicional

$\sim p \vee \sim q$

Reemplazamos en

R: $\{(\underline{\sim q} \vee p) \wedge (\sim p \vee \underline{\sim q})\} \vee \sim q$ — Ley distributiva

$\sim q \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}$ — Ley del complemento

$\underbrace{\sim q \vee F}_{\sim q}$ — Ley de la identidad

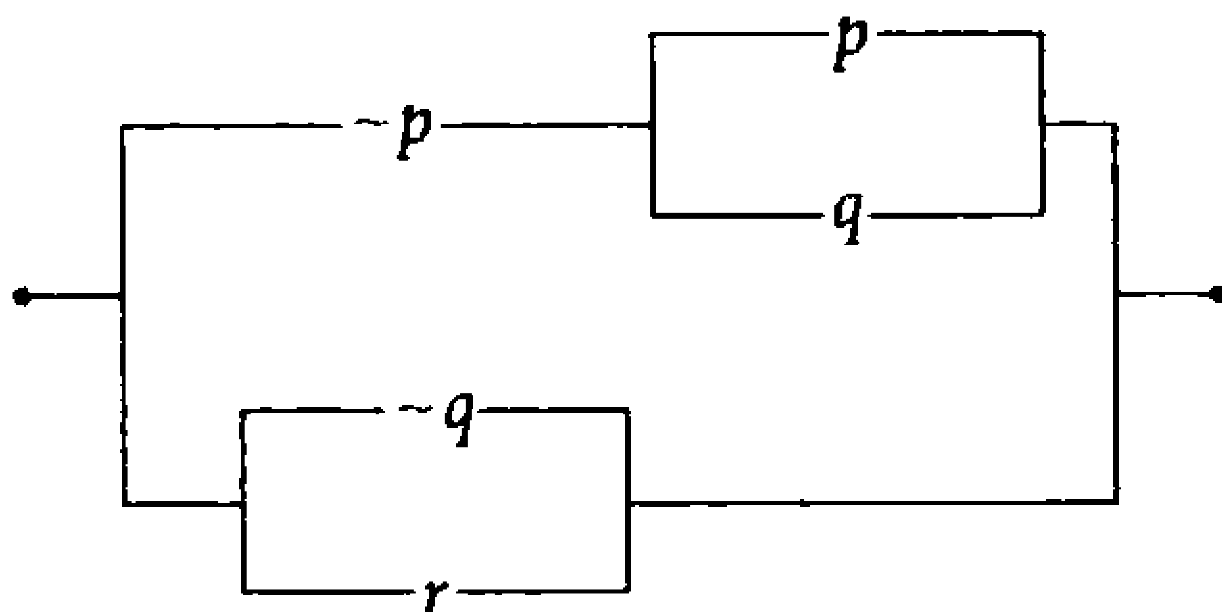
R: $\underbrace{\sim q \vee \sim q}_{\sim q}$ — Ley de idempotencia

$\therefore\ R \equiv \sim q$

Clave D

PROBLEMA N.° 29

Indique la alternativa correcta que represente al siguiente circuito.



A) $(p \vee q) \rightarrow$

B) $(q \vee r) \rightarrow p$

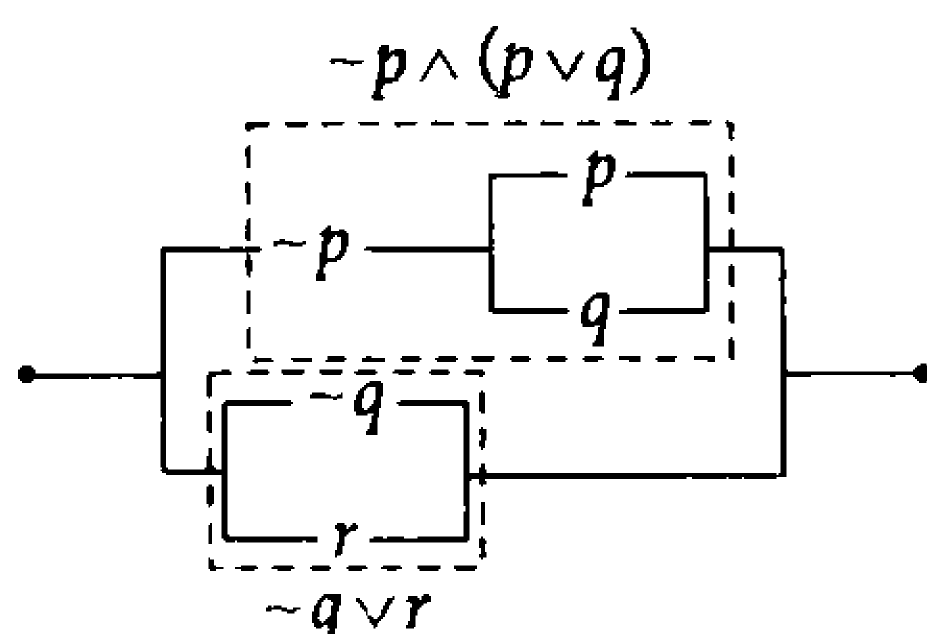
C) $(p \wedge q) \rightarrow r$

D) $(p \vee q) \wedge \sim r$

E) $(p \vee q) \wedge r$

Resolución

Tenemos:



Su esquema molecular es

$[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee (\sim q \vee r)$ — absorción

$\equiv (\sim p \wedge q) \vee \sim q \vee r$ — absorción

$\equiv \sim p \vee \sim q \vee r$ — Ley de D' Morgan

$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$ — Ley de la condicional

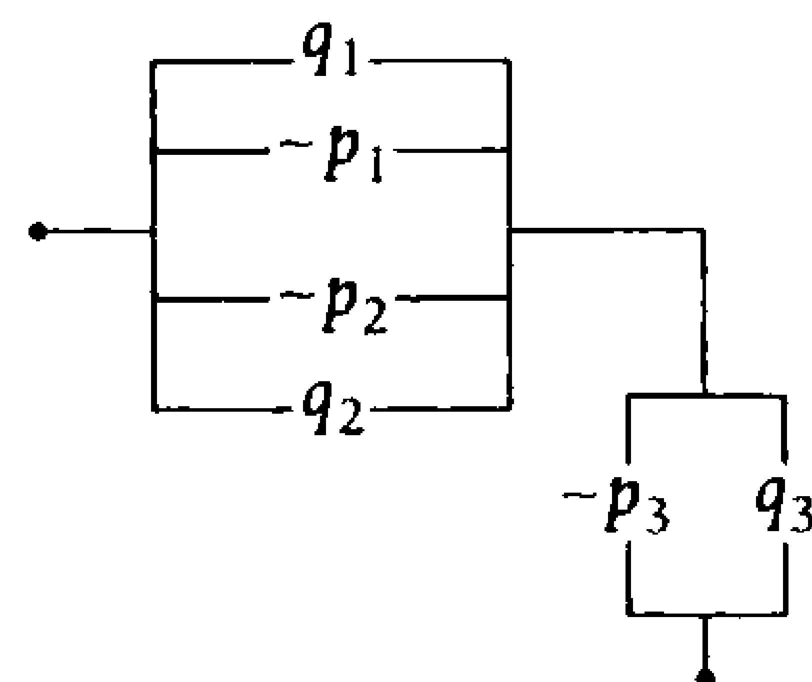
$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

$\therefore\ (p \wedge q) \rightarrow r$

Clave C

PROBLEMA N.° 30

Indique la simbolización correcta del siguiente circuito lógico.



A) $[(p_1 \vee p_2) \rightarrow (q_1 \vee q_2)] \wedge (p_3 \rightarrow q_3)$

B) $[(p_1 \vee p_2) \rightarrow (q_1 \vee q_2)] \vee (p_3 \rightarrow q_3)$

C) $[(q_1 \wedge q_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)] \wedge (q_3 \rightarrow p_3)$

D) $[(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (q_1 \wedge q_2)] \wedge (p_3 \vee q_3)$

E) $[(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (q_1 \vee q_2)] \wedge (p_3 \rightarrow q_3)$

Resolución

Reducimos el circuito lógico

$(q_1 \vee \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee q_2)$

$(\sim p_3 \vee q_3)$

$(q_1 \vee \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee q_2) \wedge (\sim p_3 \vee q_3)$

Luego, tenemos el siguiente esquema molecular:

$$R:\ \underbrace{(q_1 \vee \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee q_2)}_{A} \wedge \underbrace{(\sim p_3 \vee q_3)}_{B}$$

$A:\ q_1 \vee \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee q_2$ — Ley asociativa

$\underbrace{(\sim p_1 \vee \sim p_2)} \vee (q_1 \vee q_2)$ — Ley de D' Morgan

$\sim (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \vee q_2)$ — Ley de la condicional

$(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (q_1 \vee q_2)$

$B:\ \sim p_3 \vee q_3$ — Ley de la condicional

$p_3 \rightarrow q_3$

Reemplazamos en R:

$$R \equiv [(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (q_1 \vee q_2)] \wedge (p_3 \rightarrow q_3)$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 31

Al simplificar

$\sim[\sim(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$, se obtiene

A) $\sim p \wedge q$.
B) $\sim p \vee \sim q$.
C) $\sim p \wedge \sim q$.
D) $p \vee q$.
E) una Tautología.

Resolución

Recuerda

$\sim a \rightarrow b \equiv a \vee b$

Simplifique

$\sim[\sim\underbrace{(p \rightarrow q)}_{\sim p \vee q} \rightarrow p] \rightarrow q$ — Ley de la condicional

$\equiv \underbrace{[(\sim p \vee q) \vee p] \vee q}_{\text{Ley asociativa}}$

$\equiv \sim p \vee q \vee p \vee q$

$\equiv \underbrace{\underbrace{\sim p \vee p}_{V} \vee \underbrace{q \vee q}_{q}}_{V}$

Por lo tanto, es una Tautología.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 32

Reduzca la siguiente expresión:
$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

A) $\sim(p \vee q)$ B) $\sim p \wedge q$ C) $p \vee \sim q$
D) $\sim p$ E) $\sim q$

Resolución

Sea

$$R:\ \underbrace{[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)]}_{A} \wedge \sim(p \wedge q)$$

$A:\ (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ — Ley de la condicional

$\sim(\sim q \rightarrow \sim p) \vee (\sim p \rightarrow \sim q)$ — Ley de la condicional

$\sim(q \vee \sim p) \vee (p \vee \sim q)$ — Ley de D' Morgan

$\underbrace{(\sim q \wedge p) \vee p}_{p} \vee \sim q$ — Ley de absorción

$p \vee \sim q$

Reemplazamos en

$R:\ (p \vee \sim q) \wedge \sim(p \wedge q)$ — Ley de D' Morgan

$\underbrace{(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)}$ — Ley distributiva

$\underbrace{\sim q \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}}_{\sim q}$ — Ley del complemento; Ley de la identidad

$\therefore\ R \equiv \sim q$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 33

Simplifique $(p \vee t \vee r) \wedge (p \vee t \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim t \vee r)$.

A) $p \vee [r \wedge (t \vee \sim q)]$
B) $p \wedge [r \wedge (t \vee \sim q)]$
C) $p \vee [r \vee (t \wedge \sim q)]$
D) $p \vee [\sim r \wedge (\sim t \vee \sim q)]$
E) $p \wedge [r \vee (\sim t \wedge \sim q)]$

Resolución

Simplificando con las leyes, tenemos

$(p \vee t \vee r) \wedge (p \vee t \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim t \vee r)$ Ley distributiva

$\equiv p \vee \{(t \vee r) \wedge (t \vee \sim q) \wedge (\sim t \vee r)\}$

$\equiv p \vee \{\underbrace{(r \vee t) \wedge (r \vee \sim t)}_{r \vee \underbrace{(t \wedge \sim t)}_{F}} \wedge (t \vee \sim q)\}$

$r \vee F \equiv r$

$\equiv p \vee \{ \quad r \quad \wedge (t \vee \sim q)\}$

$\therefore\ p \vee \{r \wedge (t \vee \sim q)\}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Determine el esquema más simple de la proposición $\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$.

A) $p \vee q$
B) $p \wedge q$
C) $p \rightarrow q$
D) $\sim p \vee \sim q$
E) $\sim p \wedge \sim q$

Resolución

Sea

R: $\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$ Ley de la condicional

$\sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$ Ley de absorción

$\sim[\sim q \vee p] \quad \vee p$ Ley de D' Morgan

$(q \wedge \sim p) \quad \vee p$ Ley de absorción

$p \vee q$

$\therefore\ R \equiv p \vee q$

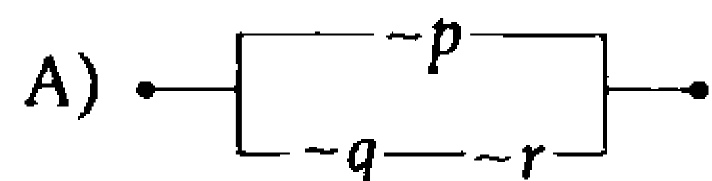
Clave **A**

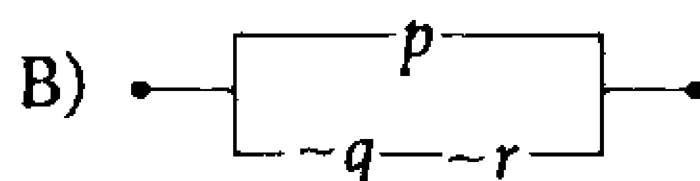
PROBLEMA N.° 35

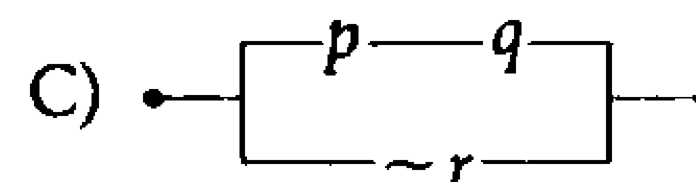
Si

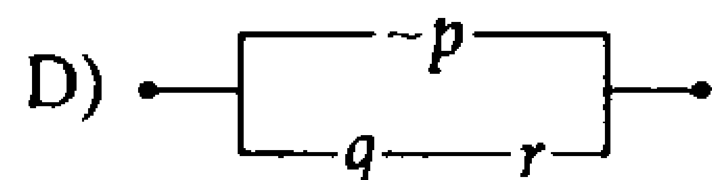
$A \equiv [(p \wedge r) \vee (p \wedge q)] \wedge [(p \wedge \sim s) \vee (p \wedge s)]$; $D \equiv$ (circuito: [$\sim q$ — q en paralelo con $\sim p$ — q] en serie con [$\sim q$ en paralelo con q])

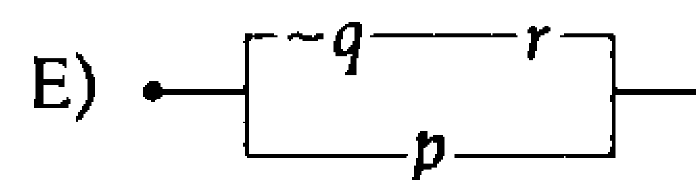
calcule el circuito simplificado de $\sim D \rightarrow \sim A$.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Resolución

Simplificamos:

- $A \equiv [(p \wedge r) \vee (p \wedge q)] \wedge [(p \wedge \sim s) \vee (p \wedge s)]$ Ley distributiva

  $[p \wedge (r \vee q)] \wedge [p \wedge (\sim s \vee s)]$, donde $(\sim s \vee s)$ = V

  $A \equiv [p \wedge (r \vee q)] \wedge p$

  $A \equiv p \wedge p \wedge (r \vee q)$ Ley asociativa

  $A \equiv p \wedge (r \vee q)$

- $D \equiv$ (circuito: [$\sim q$ — q en paralelo con $\sim p$ — q] en serie con [$\sim q$ en paralelo con q])

  $[(\sim q \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (\sim q \vee q)$, donde $(\sim q \wedge q)$ = F

  $(\sim p \wedge q)$ V

  $D \equiv \sim p \wedge q$

El circuito simplificado de

$\sim D \rightarrow \sim A$

$\equiv D \vee \sim A$

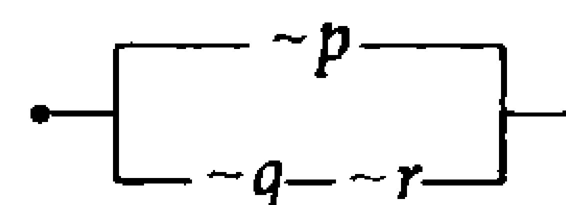
$\equiv (\sim p \wedge q) \vee \sim [p \wedge (r \vee q)]$ Ley de D' Morgan

$\equiv (\sim p \wedge q) \vee [\sim p \vee (\sim r \wedge \sim q)]$

$\equiv (\sim p \wedge q) \vee \sim p \vee (\sim r \wedge \sim q)$ Ley absorción

$\equiv \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$ Ley absorción

Su circuito lógico es



Clave **A**

PROBLEMA N.° 36

Si las siguientes proposiciones:

$(p \vee \sim q)$ y $(p \vee r)$

son falsa y verdadera, respectivamente, determine los valores de verdad de:

I. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \sim r)$

II. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \wedge \sim p)$

III. $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim(q \rightarrow \sim r)$

A) VFF B) VVF C) FVV
D) VVV E) FFV

Resolución

Se tiene que

$(p \vee \sim q) \equiv F$; $(p \vee r) \equiv V$

p: F; $\sim q$: V, luego q: F; p: F, r: V

Luego

I. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \sim r) \equiv F$

$(p \rightarrow r)$: V; $(q \rightarrow \sim r)$: F; V $\wedge$ F: F

II. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \wedge \sim p) \equiv V$

$\sim p$: V; $\sim q$: F; V $\wedge$ F: F; $(p \wedge \sim p)$: F

III. $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim(q \rightarrow \sim r) \equiv V$

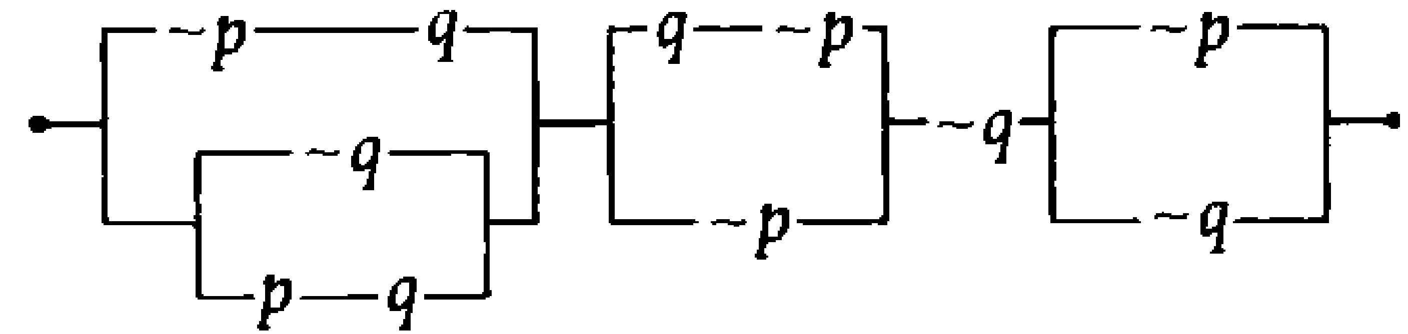
$\sim p$: V; q: F; V $\wedge$ F: F; F $\rightarrow$ ...: V

Por lo tanto, la respuesta es FVV.

Clave C

PROBLEMA N.° 37

Se sabe que el costo de cada llave en la instalación del circuito

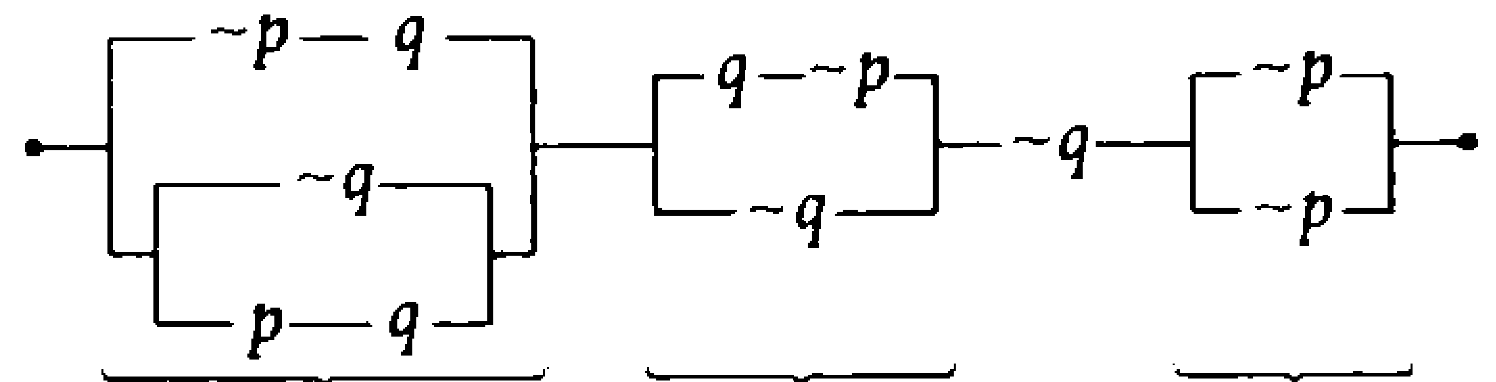


es de S/.30. Determine en cuánto se reducirá el costo de la instalación si se reemplaza este circuito por su equivalente más simple.

A) S/.210
B) S/.240
C) S/.270
D) S/.300
E) S/.180

Resolución

Se observa un circuito con 11 llaves (<>)



$(\sim p\wedge q)\vee[\sim q\vee(p\wedge q)]\wedge[(q\wedge\sim p)\vee\sim p]\wedge\sim q\wedge(\sim p\vee\sim q)$

absorción absorción absorción

$(\sim p\wedge q)\vee(\sim q\vee p)$ $\sim p$ $\sim q$

$(\sim p \wedge q) \vee \sim q \vee p$

$\sim p \vee \sim q \vee p$

$\sim p \vee p \vee \sim q$

V

V

$\equiv V \wedge \sim p \wedge \sim q$

$\equiv \sim p \wedge \sim q$

$\equiv$ •— $\sim p$ — $\sim q$ —•

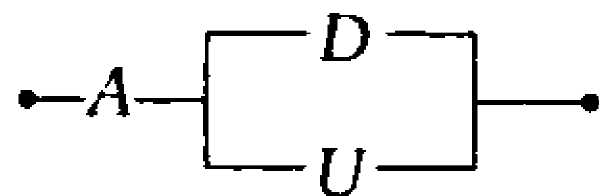
Al principio teníamos un circuito con 11 llaves, y reducido tenemos un circuito con 2 llaves, entonces se reduce en 9 llaves.

Por lo tanto, el costo se reduce en
9(S/.30)=S/.270

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

Si
$A \equiv (\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p)$
$D \equiv \sim p$
$U \equiv \sim q$
simplifique el siguiente circuito:



A) p B) $\sim p$ C) q
D) $\sim q$ E) $p \wedge \sim q$

Resolución

Reducimos el circuito lógico

$\bullet\!\!-\!\!- A -\!\!- (D \vee U) -\!\!-\!\!\bullet$

$\bullet\!\!-\!\!- A \wedge (D \vee U) -\!\!-\!\!\bullet$

Luego, tenemos el siguiente esquema molecular:

R: $A \wedge (D \vee U)$

Donde

$A \equiv (\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p)$ Ley de la condicional
$\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee p)$ Ley de D' Morgan
$(p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee p$ Ley de absorción
$\sim q \quad \vee p$

$A \equiv \sim q \vee p$
$D \equiv \sim p$
$U \equiv \sim q$

Reemplazamos en

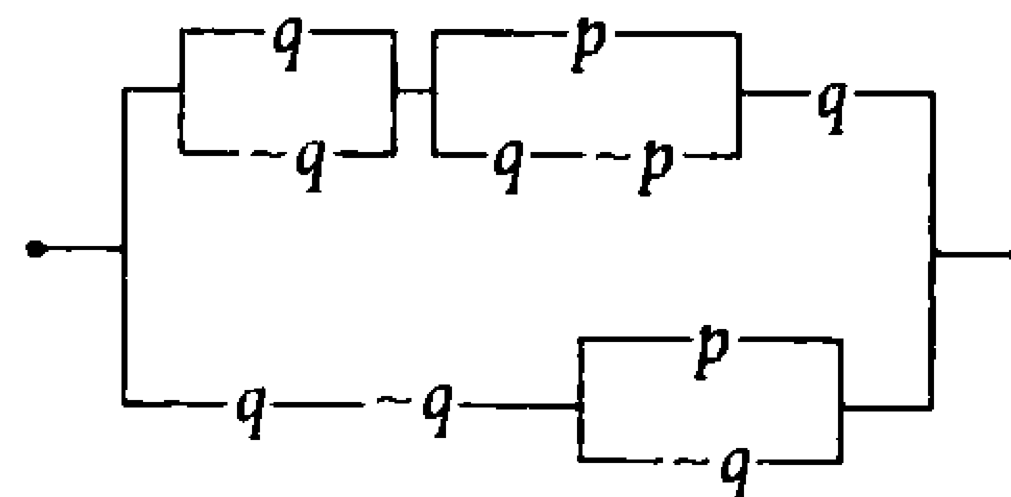
R: $(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Ley distributiva
$\sim q \vee (p \wedge \sim p)$ Ley del complemento
F Ley de la identidad
$\sim q$

$\therefore\ R \equiv \sim q$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 39

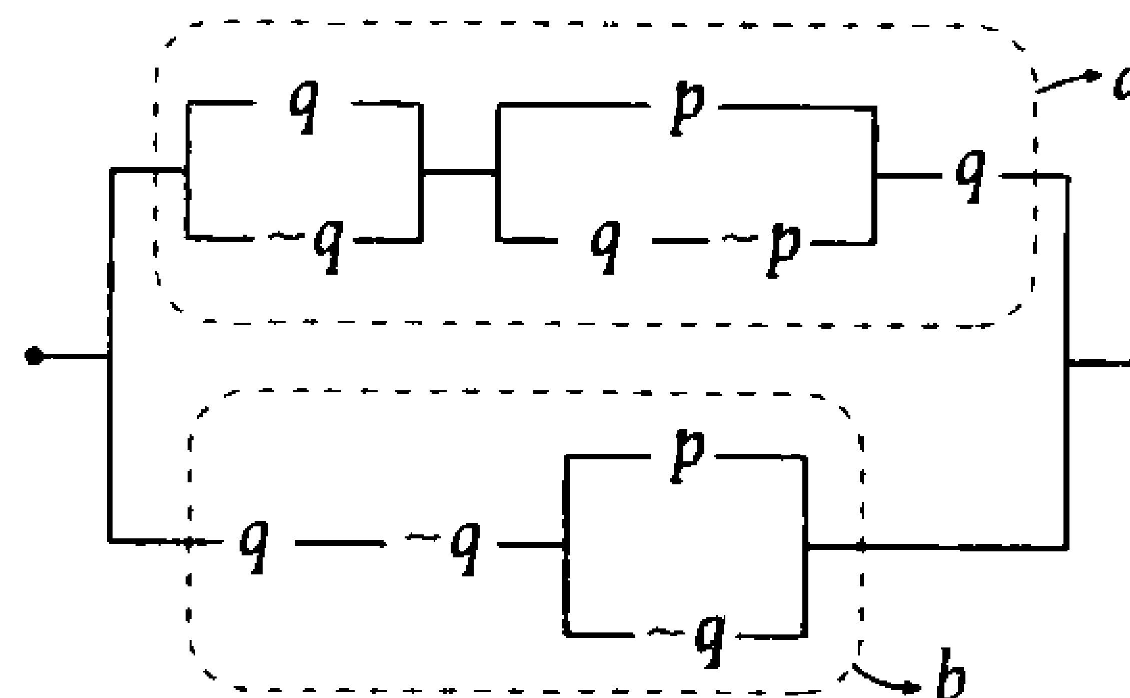
Simplifique y dé el equivalente del siguiente circuito lógico.



A) $\sim q \wedge p$
B) $p \vee \sim q$
C) $\sim p \wedge q$
D) q
E) $\sim p$

Resolución

Esquematizamos y luego simplificamos el circuito lógico



$$\equiv \overbrace{[(q\vee\sim q)\wedge[p\vee(q\wedge\sim p)]\wedge q]}^{a} \vee \overbrace{[q\wedge\sim q\wedge(p\vee\sim q)]}^{b}$$

absorción

$$(p \vee q) \wedge q \qquad F$$

absorción

$$V \qquad q \qquad F$$

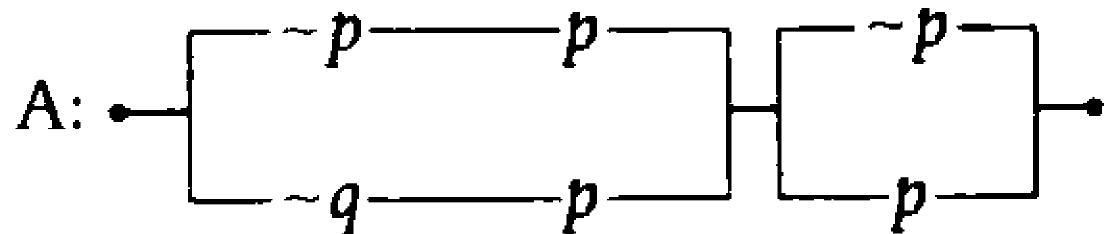
$$\equiv \qquad q \qquad \vee \qquad F$$

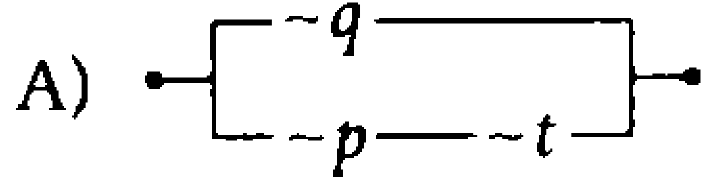
$\equiv q$ Ley de absorción

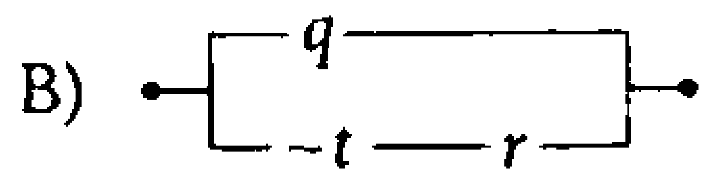
Clave **D**

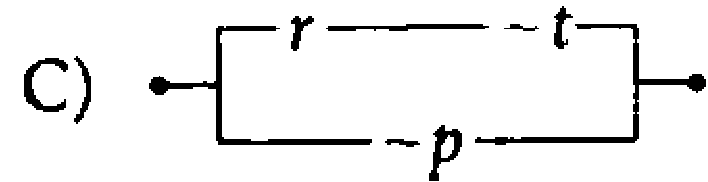
PROBLEMA N.° 40

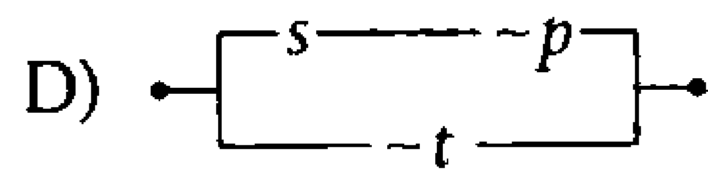
Halle el circuito simplificado de $\sim A \rightarrow \sim B$, si
$B: [(q \wedge t) \vee (q \wedge p)] \wedge [(q \wedge \sim r)\vee(q \wedge r)]$

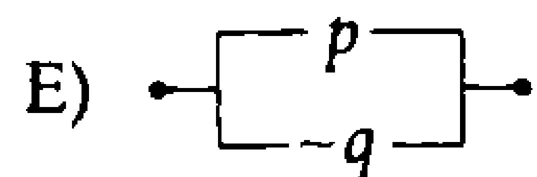
A: 

A) 

B) 

C) 

D) 

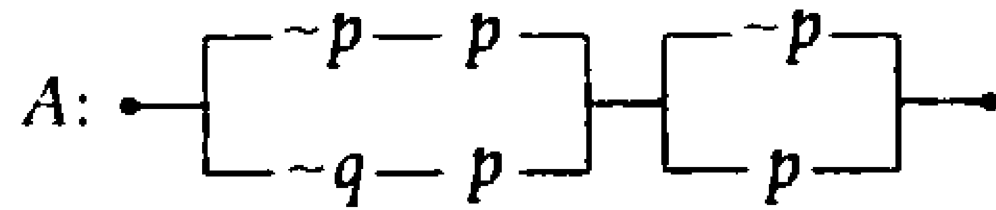
E) 

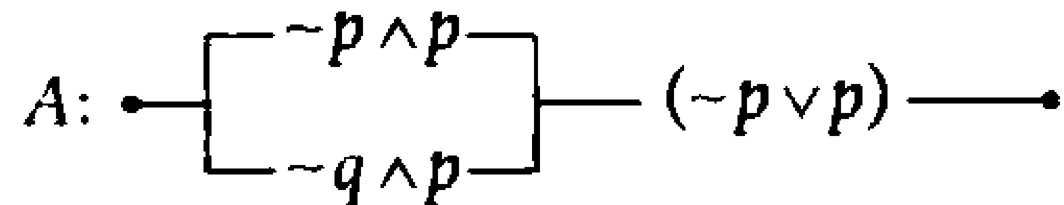
Resolución

Piden el circuito lógico simplificado de

$$\sim A \rightarrow \sim B \equiv A \vee \sim B \qquad (I)$$

Entonces, simplificamos el circuito lógico A y el esquema molecular B:

A: 

A: 

A: $-(\sim p \wedge p)\vee(\sim q \wedge p) - \sim p\vee p -$

Luego, tenemos el siguiente esquema molecular

$$A \equiv [\underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee (\sim q \wedge p)] \wedge \underbrace{(\sim p \vee p)}_{V} \equiv \sim q \wedge p$$

$$(\sim q \wedge p)$$

Además

$$B: \underbrace{[(q \wedge t) \vee (q \wedge p)]}_{q \wedge (t \vee p)} \wedge \underbrace{[(q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)]}_{q \wedge \underbrace{(\sim r \vee r)}_{V}}$$

$$q$$

$$B \equiv q \wedge (t \vee p)$$

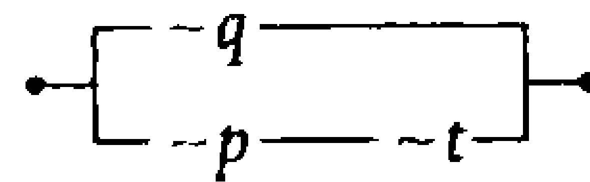
Reemplazamos en (I)

$$(\sim q \wedge p) \vee \sim[q \wedge (t \vee p)]$$

$$\underbrace{(\sim q \wedge p) \vee \sim q}_{\sim q} \vee \sim(t \vee p)$$

$$\sim q \vee \sim(t \vee p) \equiv \sim q \vee [\sim p \wedge \sim t]$$

Por lo tanto, el circuito será



Clave **A**

PROBLEMA N.° 41

Se cumple que

$\sim\{\sim(t \to s) \wedge \sim[(\sim p \wedge q) \to (r \leftrightarrow p)]\} \equiv F$.

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- $[(p \to \sim q) \wedge s] \to (q \leftrightarrow p)$
- $[(w \wedge t) \to w] \to (t \leftrightarrow s)$
- $[(p \to \sim q) \wedge (t \leftrightarrow \sim s)] \to (q \leftrightarrow p)$

A) VFF
B) VVV
C) VVF
D) FVF
E) VFV

Resolución

Tenemos

$\sim\{\sim(t \to s) \wedge \sim[(\sim p \wedge q) \to \overbrace{(r \leftrightarrow p)}^{r\,\Delta\,p}]\} \equiv F$

V F V F

~ F ~ F

V V

V

Entonces

$t \equiv V$

$s \equiv F$

$\sim p \wedge q \equiv V$, entonces $p \equiv F$; $q \equiv V$

$r\,\Delta\,\underbrace{p}_{F} \equiv F$, entonces $r \equiv F$

Reemplazamos en cada esquema molecular:

I. $[(p \to \sim q) \wedge s] \to (q \leftrightarrow p)$

F F V F

V ∧ F V

F V

V

II. $[(w \wedge t) \to w] \to (t \leftrightarrow s)$

w V V F

w w

V V

V

III. $[(p \to \sim q) \wedge (t \leftrightarrow \sim s)] \to (q \leftrightarrow p)$

F F V V V F

V ∧ F V

F

V

Por lo tanto, la respuesta es VVV.

Clave B

PROBLEMA N.° 42

Si la siguiente proposición es falsa

$\{(p \to q) \vee (\sim q \to t)\} \vee (q \leftrightarrow \sim s)$

determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(p \leftrightarrow \sim s) \wedge (p \leftrightarrow q)$
II. $(t \wedge r) \wedge (p \leftrightarrow s)$
III. $(t \leftrightarrow p) \wedge (p \to q)$

A) VFV B) FVF C) FFV
D) FVV E) VFF

Resolución

Se tiene que

$\{(p \to q) \vee (\sim q \to t)\} \vee (q \leftrightarrow \sim s) \equiv F$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

V F V F F F

F F V

F F

Luego

I. $(p \leftrightarrow \sim s) \wedge (p \leftrightarrow q) \equiv V$

$\underbrace{V \quad V}_{V} \quad \underbrace{V \quad F}_{V}$

II. $(t \wedge r) \wedge (p \leftrightarrow s) \equiv F$

$\underbrace{F}_{F}$

III. $(t \leftrightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \equiv F$

$\underbrace{V \quad F}_{F}$

Por lo tanto, la respuesta es VFF.

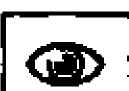
Clave **E**

PROBLEMA N.° 43

Reduzca la siguiente fórmula proposicional: $\sim(p \rightarrow \sim s) \wedge \{[(\sim r \vee q) \rightarrow p] \wedge (p \rightarrow s)\}$

A) $\sim s$ B) $p \vee s$ C) $\sim p \vee s$ D) $p \wedge s$ E) p

Resolución

 **Observación**

Por la ley asociativa:

$p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Reduciendo tenemos

$\sim(p \rightarrow \sim s) \wedge \{[(\sim r \vee q) \rightarrow p] \wedge (p \rightarrow s)\}$

$\equiv \underbrace{\sim(\sim p \vee \sim s)} \wedge \{[\underbrace{\sim(\sim r \vee q)} \vee p] \wedge (\sim p \vee s)\}$

$\equiv (p \wedge s) \wedge \{[(r \wedge \sim q) \vee p] \wedge (\sim p \vee s)\}$

Ley asociativa

$\equiv p \wedge s \wedge [(r \wedge \sim q) \vee p] \wedge (\sim p \vee s)$

asociamos convenientemente

$\equiv \underbrace{p \wedge [(r \wedge \sim q) \vee p]}_{p} \wedge \underbrace{s \wedge (\sim p \vee s)}_{s}$ Ley de absorción

$\therefore \; p \wedge s$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

¿Cuáles de los siguientes esquemas proposicionales son equivalentes?

I. $\sim(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \wedge p)$

II. $\sim(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

III. $\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$

IV. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee \sim q) \wedge q]$

A) I y II
B) I, II y III
C) II, III y IV
D) II y III
E) I y III

Resolución

Tenemos:

I. $\sim\underbrace{(q \rightarrow \sim p)} \leftrightarrow (q \wedge p)$ Ley de la condicional

$\underbrace{\sim(\sim q \vee \sim p)}$ Ley de D' Morgan

$(q \wedge p) \leftrightarrow (q \wedge p) \equiv V$

II. $\sim(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

III. $\underbrace{\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\}} \leftrightarrow \sim\underbrace{[(p \vee q) \wedge q]}$ Ley de absorción

$\sim q \leftrightarrow \sim q \equiv V$

IV. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \underbrace{[(p \vee \sim q) \wedge q]}$ Ley de absorción

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

Luego, para II y IV

p	q	$\sim q$	$(p \leftrightarrow \sim q)$	$\sim(p \leftrightarrow \sim q)$	$\leftrightarrow$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(q \wedge p)$
V	V	F	F	V	**V**	V	V	**V**	V
V	F	V	V	F	**V**	F	F	**V**	F
F	V	F	V	F	**V**	F	V	**F**	F
F	F	V	F	V	**V**	V	V	**F**	F
					II			IV	

Por lo tanto, son equivalentes: I, II y III

Clave **B**

PROBLEMA N.° 45

Dadas las siguientes proposiciones:

p: Ulises se levanta temprano.

q: Ulises compra pan.

r: Ulises va al colegio.

Simbolice

Si Ulises no se levanta temprano y no compra pan, es condición necesaria y suficiente para que no vaya al colegio.

A) $\sim(p \wedge q) \rightarrow r$
B) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow r$
C) $\sim r \rightarrow (p \vee q)$
D) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow r$
E) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim r$

Resolución

Tenemos:

p: Ulises se levanta temprano.

q: Ulises compra pan.

r: Ulises va al colegio.

Simbolizamos

Si Ulises $\underbrace{\text{no se levanta temprano}}_{\sim p}$ $\underbrace{\text{y}}_{\wedge}$ $\underbrace{\text{no compra pan,}}_{\sim q}$

es $\underbrace{\text{condición necesaria y suficiente}}_{\leftrightarrow}$ para que

$\underbrace{\text{no vaya al colegio.}}_{\sim r}$

El esquema será

$$(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim r$$

$$\equiv \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim r$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 46

Definimos los operadores lógicos:

$p * q \equiv p \wedge \sim q$ y $p \oplus q \equiv p \vee \sim q$

Reduzca a su mínima expresión el siguiente esquema:

$[(p \rightarrow q) * r] \oplus [(p * q) \rightarrow r]$

A) $p \rightarrow q$
B) $p \wedge r$
C) $\sim r$
D) $(p \rightarrow q) \vee r$
E) $q \rightarrow r$

Resolución

Tenemos:

$$p * q \equiv p \wedge \sim q$$

$$p \oplus q \equiv p \vee \sim q$$

Luego, reemplazamos en el esquema

$$[(p \rightarrow q) * r] \oplus [(p * q) \rightarrow r]$$

$$[(\sim p \vee q) * r] \oplus [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$$

$$[(\sim p \vee q) \wedge \sim r] \oplus [\sim(p \wedge \sim q) \vee r]$$

$$[(\sim p \vee q) \wedge \sim r] \vee \sim[\sim(p \wedge \sim q) \vee r]$$

$$[(\sim p \vee q) \underline{\wedge \sim r}] \vee [(p \wedge \sim q) \underline{\wedge \sim r}]$$

$$\sim r \wedge \underbrace{[\underbrace{(\sim p \vee q)}_{\sim(p \wedge \sim q)} \vee (p \wedge \sim q)]}_{V} \equiv \sim r$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 47

Se tiene que

p	q	$p \# q$	$p \odot q$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Simplifique

$E=\{q \odot [(\sim p \# q) \odot (\sim q \# p)]\} \odot$

$\{r \# (p \odot (p \odot (p \odot (p \# p))))\}$

A) $\sim q$ B) p C) $p \vee \sim q$ D) $\sim p$ E) q

Resolución

p	q	$p \# q$	$p \odot q$	$p \wedge q$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

(I) (II)

1.° De la tabla, se observa

$p \odot q \equiv \sim p$ (I)

$p \# q \equiv \sim (p \wedge q)$ (II)

Observación

Se reduce más con $p \odot q \equiv \sim p$

Ejemplo:

- $q \odot [p \Delta q] \equiv \sim q$
- $m \odot \{p \leftrightarrow [q \rightarrow r]\} \equiv \sim m$

2.° Simplificamos

$$E=\{q \underbrace{[(\sim p \# q) \odot (\sim q \# p)]}_{a}\} \odot \{\underbrace{r \# (p \odot (p \odot (p \odot (p \# p))))}_{b}\}$$

$$E=\{\underbrace{q \odot a}_{\sim q}\} \odot b \quad \rightarrow \quad E=\sim(\sim q)$$

$\therefore\ E=q$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 48

Se sabe que

p	q	$p @ q$	$p // q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Halle la tabla de verdad de
$[p @ (p // q)] // (q @ p)$.
Indique los valores de verdad de su matriz principal.

A) FFVV B) FVVV C) VVVF D) VVFF E) VFVF

Resolución

Hallamos la tabla de verdad de $[p @ (p // q)] // (q @ p)$

p	q	$p @ q$	$p // q$	$[p$	$@$	$(p // q)]$	$//$	$(q$	$@$	$p)$
V	V	F	V	V	F	V	**V**	V	F	V
V	F	V	F	V	V	F	**F**	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	**V**	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	**F**	F	V	F

Por lo tanto, la respuesta es VFVF.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 49

En la tabla, definimos el operador

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Simplifique $[(p \oplus q) \oplus q] \oplus [(p \oplus p) \oplus \sim q]$.

A) $\sim q$
B) $\sim p$
C) $\sim (p \Delta q)$
D) $p \wedge \sim q$
E) q

Resolución

De la tabla

p	q	$p \oplus q$	$p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

$$\sim(p \vee q)$$

Se cumple

$$p \oplus q \equiv \sim(p \vee q)$$

$$\boxed{p \oplus q \equiv \sim p \wedge \sim q}$$

Simplificamos

$$[(p \oplus q) \oplus q] \oplus [(p \oplus p) \oplus \sim q]$$

$$\equiv \sim[\sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim q] \wedge \sim[\underbrace{\sim(\sim p \wedge \sim p)}_{\sim p} \wedge \sim(\sim q)]$$

$$\equiv \underbrace{[(\sim p \wedge \sim q) \vee q]}_{\text{(absorción)}} \wedge [\sim p \vee \sim q]$$

$$\equiv [\sim p \vee q] \wedge [\sim p \vee \sim q] \qquad \text{Ley distributiva}$$

$$\equiv \sim p \vee \underbrace{[q \wedge \sim q]}_{\text{Falso}}$$

$$\equiv \sim p \vee F$$

$$\equiv \sim p$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

Formalice el siguiente enunciado: *Si Juan es músico, entonces Juan es cantante; pero Juan no es músico, por lo tanto es cantante. Igualmente Juan es compositor, además, si Juan no hubiera sido compositor, entonces sería cantante.*

Indique su expresión equivalente más simple.

A) Juan es músico y cantante.

B) Juan es cantante y compositor.

C) Juan es músico y compositor.

D) Juan es cantante o músico.

E) Juan es compositor o cantante.

Resolución

Sean las proposiciones:
p: Juan es músico.
q: Juan es cantante.
r: Juan es compositor.

Simbolizamos el enunciado:

$$R: \; [\underbrace{(p \rightarrow q)} \wedge \underbrace{(\sim p \rightarrow q)}] \wedge [r \wedge \underbrace{(\sim r \rightarrow q)}] \qquad \text{Ley de la condicional}$$

$$[\underbrace{(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)}_{A}] \wedge [\underbrace{r \wedge (r \vee q)}_{B}]$$

$$A: \; (\sim p \vee \underline{q}) \wedge (p \vee \underline{q}) \qquad \text{Ley distributiva}$$

$$\underbrace{q \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F}}_{q} \qquad \text{Ley del complemento} \quad \text{Ley de la identidad}$$

$$B: \; r \wedge (r \vee q) \equiv r \qquad \text{Ley de absorción}$$

Reemplazamos en R

$$R \equiv q \wedge r$$

Por lo tanto, la expresión equivalente más simple es *Juan es cantante y compositor*.

Clave **B**

Capítulo

3

Teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos fue creación de George Cantor (1845-1918), un matemático alemán que sentó las bases en la que se fundamenta la aritmética y el resto de las teorías matemáticas.

En 1874, en un artículo que publicó en la revista *Crelle* y utilizando un grado de abstracción diferente, nuevo, George Cantor nos menciona que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, esto es, el mismo cardinal: por ejemplo, el conjunto de los números racionales es enumerable, es decir, del mismo tamaño que el conjunto de los números naturales, mientras que el conjunto de los números reales no lo es: existen, por lo tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros.

Esta teoría de conjuntos fue complementada por B. Russell (1903), E. Zermello (1908), A. Fraenkel (1922), A. Skolem (1923), J. von Neumann (1925) y otros matemáticos que aportaron para la teoría de conjuntos actual, la cual nos ha permitido la creación de nuevos conjuntos de una manera sólida.

Capítulo 3

Teoría de conjuntos

PROBLEMA N.° 1

Coloque verdadero (V) o falso (F), en relación con el siguiente conjunto

$A=\{a, \{b, c\}, d\}$

I. $\{b, c\} \subset A$

II. $\{\{b, c\}\} \subset A$

III. $\{c\} \in A$

IV. $\{b, c\} \in A$

V. $c \in A$

VI. $\{c\} \subset A$

A) VVVFFF B) FVFVFF C) VFFFVV
D) VVVVVF E) FVVFFF

Resolución

Los elementos del conjunto A son:

$a \in A$
$\{b, c\} \in A$
$d \in A$

Los subconjuntos del conjunto A son:

ϕ; $\{a\}$; $\{a,\{b, c\}\}$; $\{a, \{b, c\}, d\}$
$\{\{b, c\}\}$; $\{a, d\}$;
$\{d\}$; $\{\{b, c\}, d\}$;

De acuerdo a lo anterior, se tiene:

I. $\{b, c\} \subset A$ **Falso**
II. $\{\{b, c\}\} \subset A$ **Verdadero**
III. $\{c\} \in A$ **Falso**
IV. $\{b, c\} \in A$ **Verdadero**
V. $c \in A$ **Falso**
VI. $\{c\} \subset A$ **Falso**

Por lo tanto, la respuesta es FVFVFF.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Si $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $\exists x \in A / x+3 \leq 10$

II. $\forall x \in A, \exists y \in A / x+y \leq 7$

III. $\forall x \in A, x+3 < 8$

IV. $\exists ! x \in A / x+3 > 6$

A) solo I
B) I y III
C) I, II y IV
D) I y II
E) todas

Resolución

Tenemos

$A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$

Evaluamos cada caso:

I. **Verdadera**

$\exists x \in A / x+3 \leq 10$
1

II. **Verdadera**

$\forall x \in A, \exists y \in A / x+y \leq 7$

1 ↓ 1
2
3
4
⑤ 1

III. **Falsa**

$\forall x \in A, x+3 < 8$

↓
5

IV. **Falsa**

$\exists ! x \in A / x+3 > 6$

↓
4
5

Por lo tanto, son verdaderas I y II.

Clave D

PROBLEMA N.° 3

¿Cuántos de los conjuntos dados a continuación no son vacíos?

$A=\{x \in U / x=x, x \neq x\}$

$B=\{x \in \mathbb{N} / x^2+3x+2=0\}$

$C=\{x \in \mathbb{Q} / 3 < x < 5\}$

$D=\{x \in \mathbb{N} / x^2-1=0\}$

$E=\{x \in \mathbb{R} / x^2=4 \wedge 2x=3\}$

$F=\{x \in \mathbb{R}-\{0\} / -x=x^{-1}\}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Determinamos por extensión:

- $A=\{x \in U / \underbrace{x=x; \quad x \neq x}_{\nexists x \in U}\}$

  $\therefore \; A=\phi$

- $B=\{x \in \mathbb{N} / x^2+3x+2=0\}$

  $(x+2)(x+1)=0$

  $x=-2 \quad$ ó $\quad x=-1$

  No son naturales

  $\therefore \; B=\phi$

- $C=\{x \in \mathbb{Q} / 3 < x < 5\}$

  $C=\left\{\begin{array}{l} 3,1;\ 3,01;\ 3,001;\ 3,0001;\ \ldots \\ 3,2;\ 3,02;\ 3,002;\ 3,0002;\ \ldots \\ \vdots \end{array}\right\}$

  Por lo tanto, C es un conjunto infinito.

- $D=\{x \in \mathbb{N} / x^2-1=0\}$

  $(x-1)(x+1)=0$

  $x=1 \vee x=-1$; como $x \in \mathbb{N}$

  $\therefore \; D=\{1\}$

- $E=\{x \in \mathbb{R} / x^2=4 \wedge 2x=3\}$

  $x \in \{2; -2\} \wedge x=\dfrac{3}{2}$

  como no hay intersección

  $\therefore \; E=\phi$

- $F=\{x \in \mathbb{R}-\{0\} / -x=x^{-1}\}$

  $-x=\dfrac{1}{x} \rightarrow x^2=-1$

  $x \notin \mathbb{R}$

  $\therefore \; F=\phi$

No son vacíos C y D.

Por lo tanto, hay dos conjuntos no vacíos.

Clave B

PROBLEMA N.° 4

Dados los conjuntos:

$$A=\left\{a\in \mathbb{Z}^{+}/\frac{x}{a}=K\wedge K\in \mathbb{Z}\wedge 6<\frac{x+20}{5}<7\right\}$$

$$B=\left\{y^2+1/y\in \mathbb{Z}\ \wedge\ -\frac{9}{2}\leq y<\frac{11}{4}\right\}$$

Halle $n(A)+n(B)$.

A) 13 B) 16 C) 11
D) 12 E) 15

Resolución

Analizamos

$$A=\left\{a\in \mathbb{Z}^{+}/\frac{x}{a}=K\ \wedge\ K\in \mathbb{Z}\ \wedge\ 6<\frac{x+20}{5}<7\right\}$$

Entonces

- a es divisor de x
- $x=aK;\quad x\in \mathbb{Z}$
- $6<\dfrac{x+20}{5}<7$

$10<x<15$
└→ 11; 12; 13; 14

$A=\{1;\ 11;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12;\ 13;\ 7;\ 14\}$

$n(A)=10$ (I)

Luego

$$B=\left\{y^2+1/y\in \mathbb{Z}\ \wedge\ -\frac{9}{2}\leq y<\frac{11}{4}\right\}$$

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y^2	16	9	4	1	0	1	4
y^2+1	17	10	5	2	1	2	5

$B=\{17;\ 10;\ 5;\ 2;\ 1\}$

$n(B)=5$ (II)

De (I) y (II)

$n(A)+n(B)=15$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

Sean los conjuntos:

$A=\{a\in \mathbb{Z}/a^5+4a=5a^3\}$

$B=\{a\in A/\exists\, b\in \mathbb{Z}\ \wedge\ a=b^2\}$

Calcule $n[P(A-B)]$.

A) 32 B) 2 C) 6
D) 8 E) 4

Resolución

Determinamos por extensión:

- $A=\{a\in \mathbb{Z}/a^5+4a=5a^3\}$

  Factorizamos

  $a(a^4-5a^2+4)=0$

  $a(a^2-1)(a^2-4)=0$

  $a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)=0$

  $a=0\ \vee\ a=1\ \vee\ a=-1\ \vee\ a=2\ \vee\ a=-2$

  Luego

  $A=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$

- $B=\{a\in A/\exists\, b\in \mathbb{Z}\wedge a=b^2\}$

  ↓ ↓
  $0\quad 0^2$
  $1\quad 1^2$

  $a=0$ ó $a=1$

  Entonces

  $B=\{0;\ 1\}$

Determinamos la diferencia

$A-B=\{-2;\ -1;\ 2\}$

$n(A-B)=3\ \rightarrow\ n[P(A-B)]=2^3$

$\therefore\ n[P(A-B)]=8$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Sean
$A=\{m+n;\ 8;\ 2m-2n+4\}$ un conjunto unitario
$B=\{x/x=mK;\ K\in\mathbb{Z}\}$
$C=\{x/x=nK;\ K\in\mathbb{Z}\}$
Indique por comprensión el conjunto $B\cap C'$.

A) $B\cap C'=\{3K/K\in\mathbb{Z}\ \wedge\ K\neq\overset{o}{5}\}$

B) $B\cap C'=\{3K/K\in\mathbb{Z}^{+}\ \wedge\ K\neq\overset{o}{5}\}$

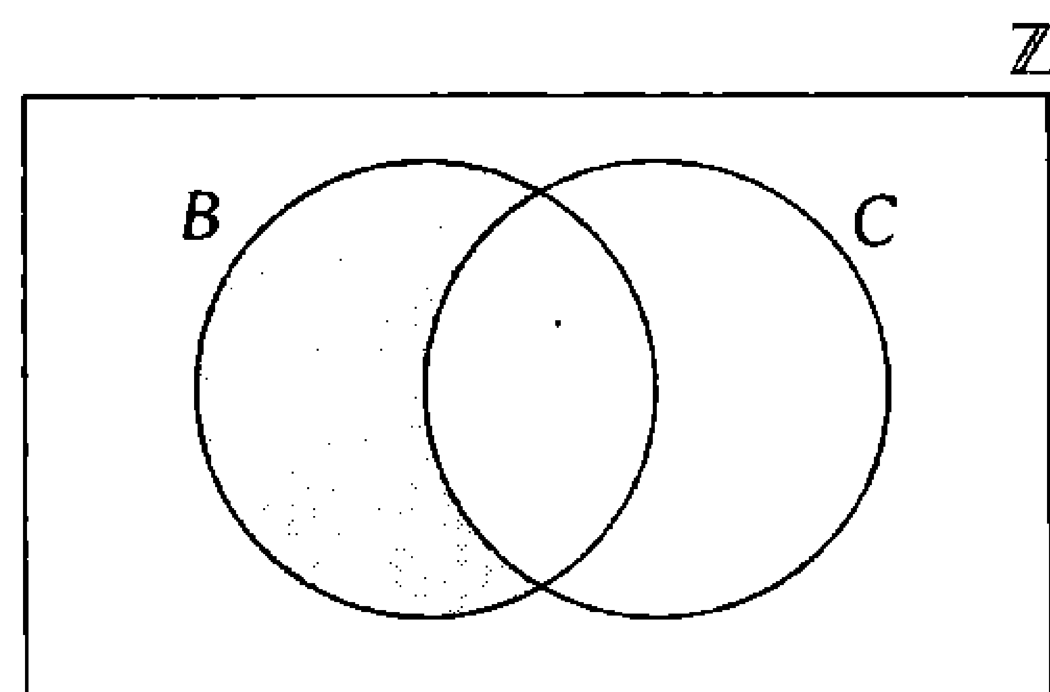
C) $B\cap C'=\{5K/K\in\mathbb{Z}^{+}\ \wedge\ K\neq\overset{o}{5}\}$

D) $B\cap C'=\{5K/K\neq\overset{o}{3}\}$

E) $B\cap C'=\{5K/K\in\mathbb{Z}\ \wedge\ K\neq\overset{o}{3}\}$

Resolución

Si
$A=\{m+n;\ 8;\ 2m-2n+4\}$ es unitario,
entonces
$m+n=8=2m-2n+4$
de donde
$m=5\ \wedge\ n=3$
Luego
$B=\{x/x=5K,\ K\in\mathbb{Z}\}$
$C=\{x/x=3K,\ K\in\mathbb{Z}\}$
Piden
$B\cap C'\equiv B-C$



$\therefore\ B\cap C'=\{5K/K\in\mathbb{Z}\ \wedge\ K\neq\overset{o}{3}\}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

Si
$A=\{\phi\},\ B=P(A),\ C=B-A$ y $D=P(C)$,
halle $B\cap D$.

A) B B) C C) D
D) A E) $A\cap B$

Resolución

Tenemos

- $A=\{\phi\}$
- $B=P(A)$
  Los subconjuntos de A son: ϕ; $\{\phi\}$
  $B=\{\phi,\ \{\phi\}\}$
- $C=B-A$
  $C=\{\phi;\ \{\phi\}\}-\{\phi\}$
  $C=\{\{\phi\}\}$
- $D=P(C)$
  Los subconjuntos de C son: ϕ; $\{\{\phi\}\}$
  $D=\{\phi,\ \{\{\phi\}\}\}$

Piden $B\cap D$
$B\cap D=\{\phi\}$
$\therefore\ B\cap D=A$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Halle el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

I. $(A\cap B)-C=(A-C)\cap B$
II. $(A\cap B)-C=(B-C)\cap A$
III. $A-(A\cup B)=\phi$

A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFV E) FVF

Resolución

Analizamos:

I. **Verdadera**

$(A \cap B) - C = (A - C) \cap B$

$(A \cap B) \cap C' = (A \cap C') \cap B$

$A \cap B \cap C' = A \cap B \cap C'$

II. **Verdadera**

$(A \cap B) - C = (B - C) \cap A$

$(A \cap B) \cap C' = (B \cap C') \cap A$

$A \cap B \cap C' = A \cap B \cap C'$

III. **Verdadera**

$A - (A \cup B) = \phi$

$A \cap (A \cup B)'$

$\underbrace{A \cap A'}_{\phi} \cap B' \equiv \phi$

Por lo tanto, la respuesta es VVV.

Clave **A**

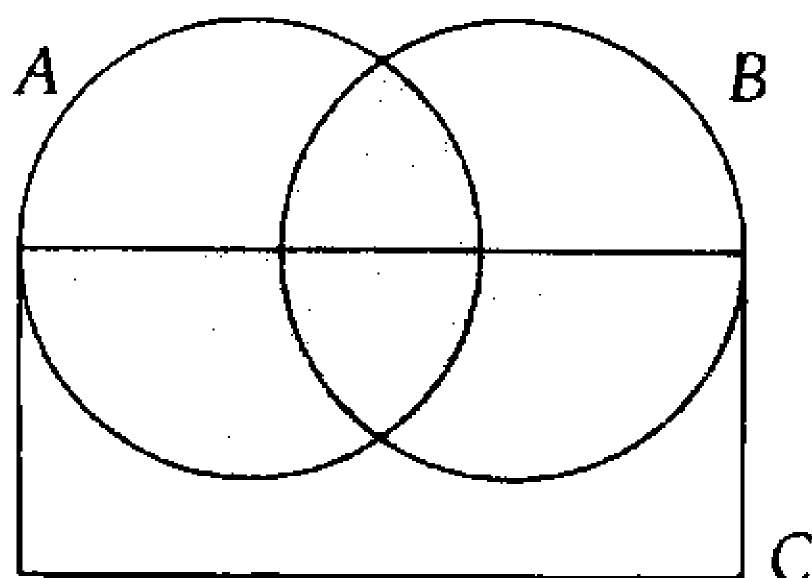
PROBLEMA N.° 9

De los siguientes conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{2; 4; 6; 7; 8\}$

$C - A = \{8; 9; 10\}$ y $C - B = \{1; 9; 10\}$

Calcule el cardinal de la región sombreada.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

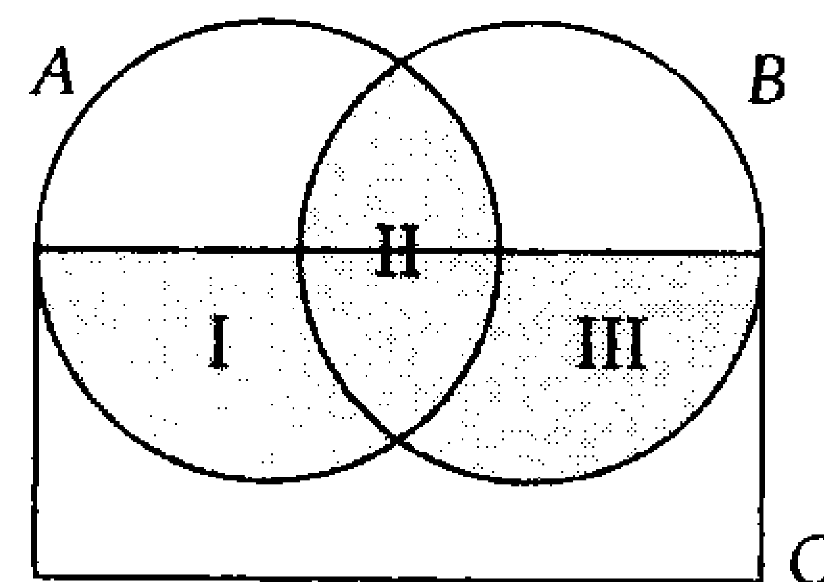
De los datos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$B = \{2; 4; 6; 7; 8\}$

$C - B = \{1; 9; 10\}$

$C - A = \{8; 9; 10\}$



La región sombreada es

$$R = \overbrace{[(C-B) \cap A]}^{\text{I}} \cup \overbrace{[A \cap B]}^{\text{II}} \cup \overbrace{[(C-A) \cap B]}^{\text{III}}$$

$R = \{1\} \cup \{2; 4; 6\} \cup \{8\}$

$R = \{1; 2; 4; 6; 8\}$

$\therefore\ n(R) = 5$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

De un grupo de amigos, la cuarta parte decide ir al cine, y de estos, la cuarta parte también asiste a una fiesta. De los que no van al cine, la tercera parte no va a la fiesta. ¿Cuántos fueron a la fiesta, si la cantidad de amigos es mayor que 50, pero menor que 80?

A) 24 B) 27 C) 36
D) 42 E) 48

Resolución

Del enunciado, tenemos

(cine) + (no cine) = total

$\;\;\uparrow\qquad\quad\downarrow\qquad\;\;\downarrow$

$\;\;3\qquad\qquad\qquad\;\;4 \;\}\times 4a$

cine: $4a$ no cine: $12a$

	cine	no cine
fiesta	a	$8a$
no fiesta		$4a$

$50 < \underbrace{\text{total}}_{16a} < 80$

$16a \to 4$

Por lo tanto, van a la fiesta

$9a = 9(4) = 36$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Se preguntó sobre su preferencia por 3 clases de bebidas A, B y C a 120 personas y se tuvo la siguiente información:

I. A 30 personas les gustan 2 de las 3 bebidas.

II. Ninguna de las que les gusta la bebida A prefiere la bebida C.

III. Diez personas no prefieren ninguna de las bebidas.

¿A cuántas personas les gusta sólo una de las bebidas?

A) 60 B) 80 C) 85

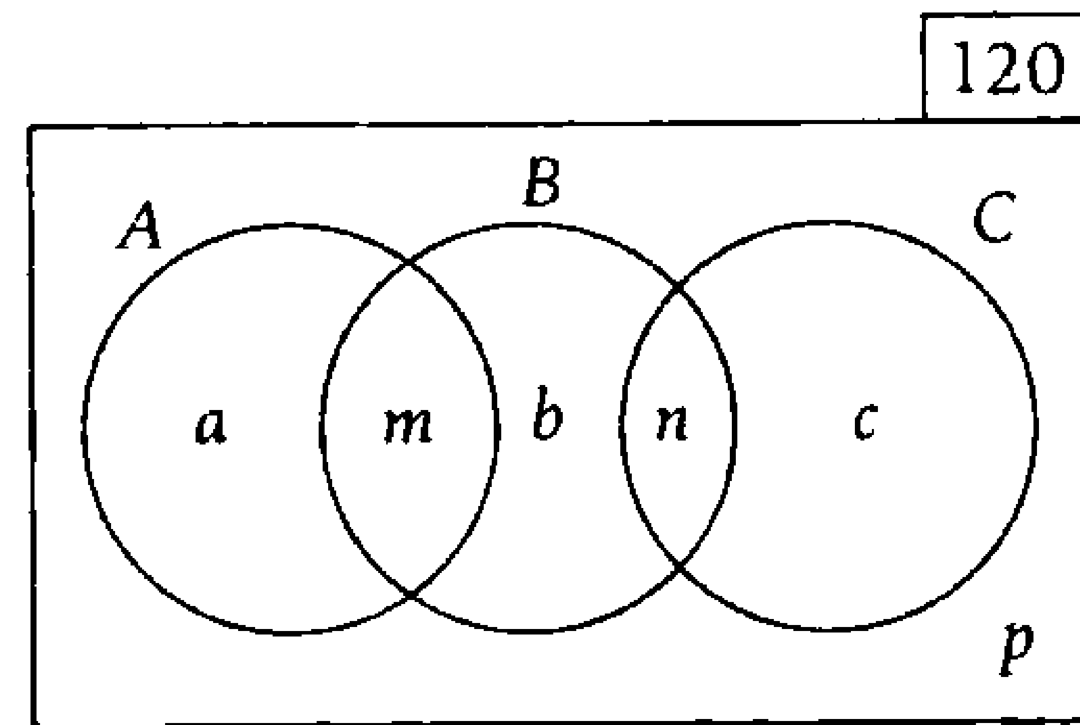
D) 90 E) 95

Resolución

Ordenamos los datos convenientemente:

- Ninguna de las que les gusta la bebida A prefiere la bebida C } → A y C son disjuntos.

Considerando esto, la gráfica es



- Les gustan 2 de las 3 bebidas

  $m+n=30$

- No prefieren ninguna

  $p=10$

- Les gusta sólo una de las bebidas

  $a+b+c=?$

  $n(U) = a+b+c+\underbrace{m+n}_{30}+\underbrace{p}_{10}=120$

$\therefore\; a+b+c=80$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 12

En una reunión, hay tres mujeres por cada cinco asistentes. Si la cuarta parte de las mujeres no habla inglés y la tercera parte de los hombres sí, ¿cuántas personas asistieron a la reunión? Considere que 75 personas no hablan inglés.

A) 210 B) 120 C) 165

D) 180 E) 150

Resolución

Del enunciado tenemos

$V+M=\text{total}$

$\uparrow\;\;\downarrow\quad\;\downarrow$

$2\;\;\;3\;\;\;\;5$ (I)

Como

$V=\overset{\circ}{3} \;\wedge\; M=\overset{\circ}{4}$,

Entonces en (I): $(\times 12)$

	$V(24a)$	$M(36a)$
inglés	$8a$	
no inglés (75)	$16a$	$9a$

Del gráfico

$$25a = 75$$
$$\downarrow$$
$$3$$

$\therefore$ Total $= 60a = 60(3) = 180$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Al consultar sobre la preferencia por dos marcas de bebidas A y B, se obtuvo la siguiente información:

I. El 65% no prefiere A.
II. El 45% no prefiere B.
III. El 50% prefiere sólo una de ellas.

¿Qué parte de la población no prefiere ninguna de las dos bebidas?

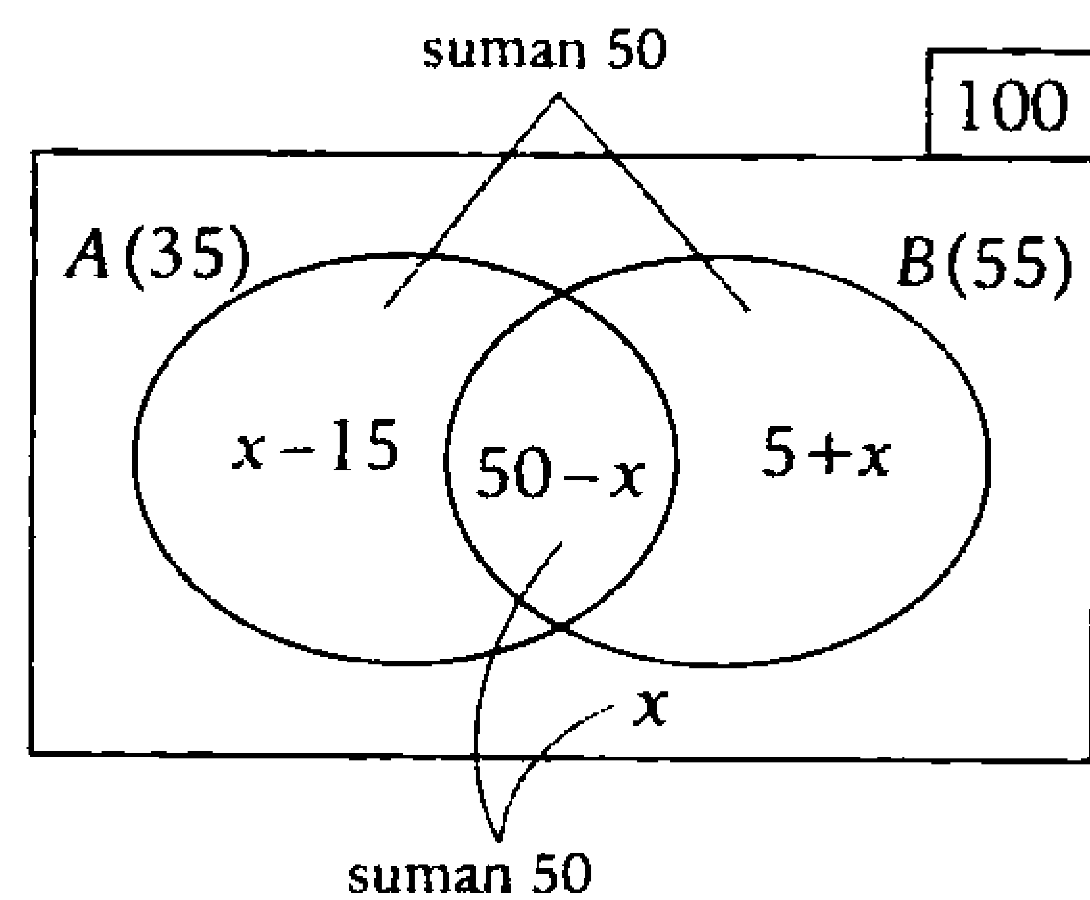
A) 20%
B) 30%
C) 25%
D) 35%
E) 40%

Resolución

Asumimos que se pregunta a 100 personas (100%) sobre la preferencia por la bebida:
Si 65% no prefiere A, 35% sí la prefiere; y si 45% no prefiere B, 55% sí la prefiere, entonces tenemos.

$n(A) = 35$
$n(B) = 55$
$n(A \Delta B) = 50$

Piden
$n(A \cup B)^C = x$



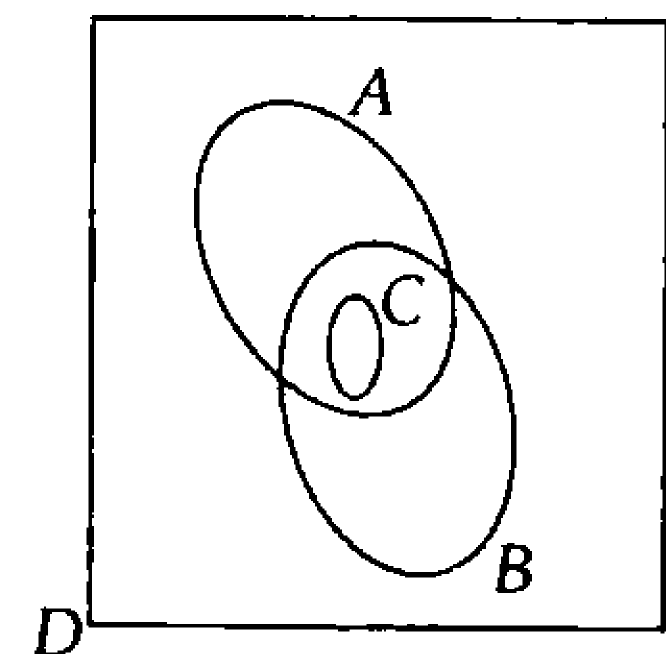
Por condición: $n(A \Delta B) = 50$
$(x-15) + (5+x) = 50$
$\therefore$ $x = 30$ <> 30%

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

De acuerdo con el diagrama siguiente, simplifique $(\overline{A \cup \overline{C}}) \cup ((\overline{A} \cap B) \cup B)$.

A) $A^C \cup B$
B) ϕ
C) B
D) $D \cap B$
E) $A \cup \overline{C}$



Resolución

Se tiene

$$(\overline{A \cup \overline{C}}) \cup ((\overline{A} \cap B) \cup B)$$
$$\underbrace{(A \cup C')'}_{} \cup \underbrace{((A' \cap B) \cup B)}_{}$$
$$\underbrace{(A' \cap C)}_{} \qquad B$$
$$\underbrace{\phi \quad \cup \quad B}_{B}$$

Nota

Del gráfico ($C \subset A$)

$\therefore\ A' \cap C = \phi$

Clave **C**

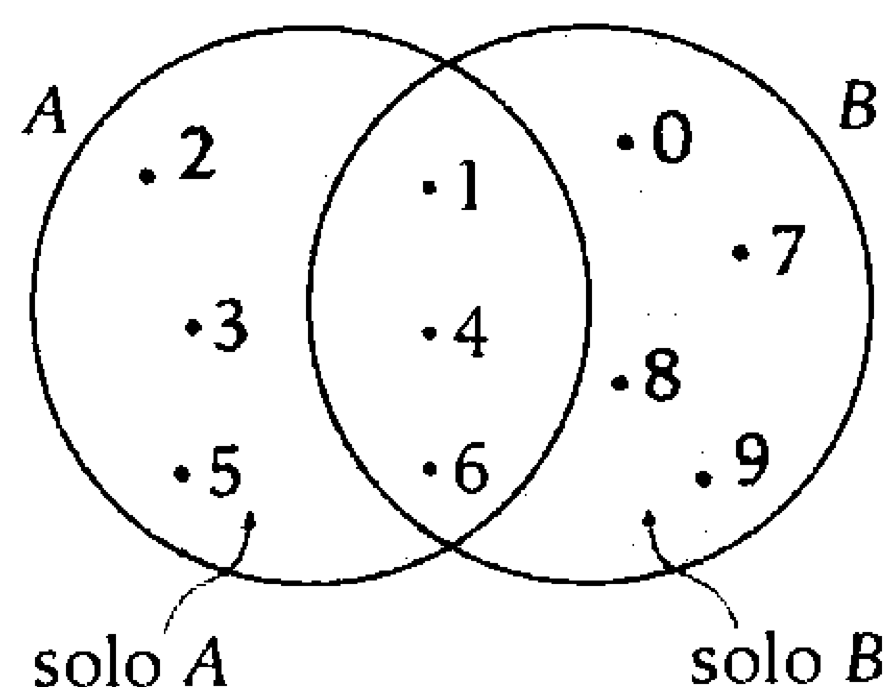
PROBLEMA N.° 15

Dados los conjuntos $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ y $B=\{0;\ 1;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$, sea m el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B, y q es el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A, halle $m+q$.

A) 21
B) 23
C) 25
D) 22
E) 26

Resolución

Según el enunciado, graficamos



- m: cantidad de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B.

  Luego, tomamos los subconjuntos que están solo en $A\,(A-B)$

  $m=n[P(A-B)-\{\phi\}]$

  $m=2^{n(A-B)}-1 \ \rightarrow\ m=2^3-1$

  $\therefore\ m=7$

- q: cantidad de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A.

  $q=n[P(B-A)-\{\phi\}]$

  $q=2^{n(B-A)}-1 \ \rightarrow\ q=2^4-1 \ \rightarrow\ q=15$

$\therefore\ m+q=22$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

En una batalla intervinieron 300 hombres, de los cuales 54 fueron heridos en la cabeza, 48 fueron heridos en el brazo; 18 fueron heridos en la cabeza y brazo; 20 fueron heridos en la pierna y brazo y 12 fueron heridos en la cabeza y pierna. Si el 42% de los que intervienen en la batalla fueron heridos, averigüe cuántos fueron heridos en los 3 lugares, ya que 68 fueron heridos en la pierna.

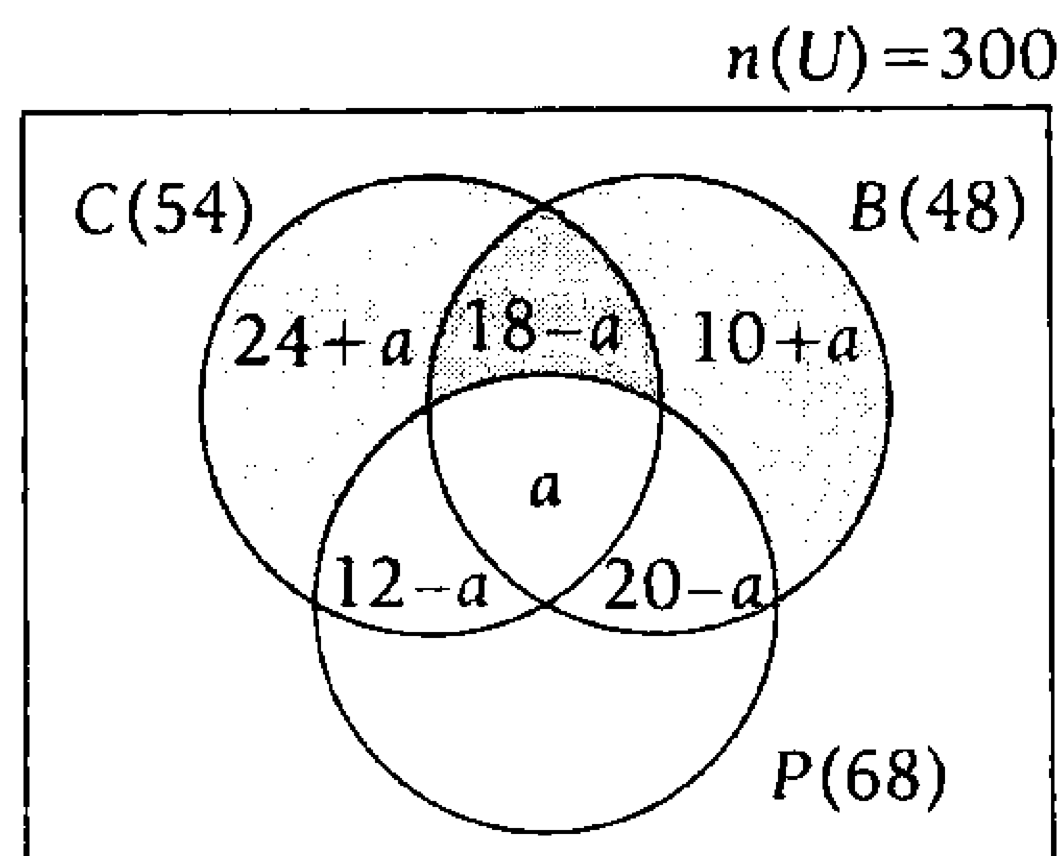
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Según el enunciado

Heridos=42%(300)=126

Luego, tenemos:
C: los heridos en la cabeza
B: los heridos en el brazo
P: los heridos en la pierna



Del diagrama, tenemos

$$\underset{\underset{n(P)}{\uparrow}}{68}+(24+a)+(18-a)+(10+a)=126$$

$\rightarrow a=6$

Por lo tanto, 6 fueron heridos en los 3 lugares.

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Se tienen los conjuntos no comparables A y B, en los que el conjunto A posee 120 subconjuntos, con no menos de dos elementos, y el conjunto B tiene 255 subconjuntos propios; además, $n[P(A \cap B)^C]=16$.
¿Cuántos subconjuntos de más de un elemento tiene el conjunto
$M=(A\times B) \cap (B\times A)$, si $n[(A \cup B)^C]=1$?

A) $2^{37}-36$ B) $2^{36}-34$ C) $2^{31}-36$
D) $2^{37}-16$ E) $2^{36}-37$

Resolución

Tenemos:

- Cantidad de subconjuntos de A con 2 o más elementos; a todos los subconjuntos de A: $2^{n(A)}$ se le quitan los subconjuntos unitarios: $n(A)$ y el subconjunto vacío.

$$2^{n(A)}-n(A)-1=120$$
$$2^{n(A)}=n(A)+|2|$$
$$\rightarrow n(A)=7$$

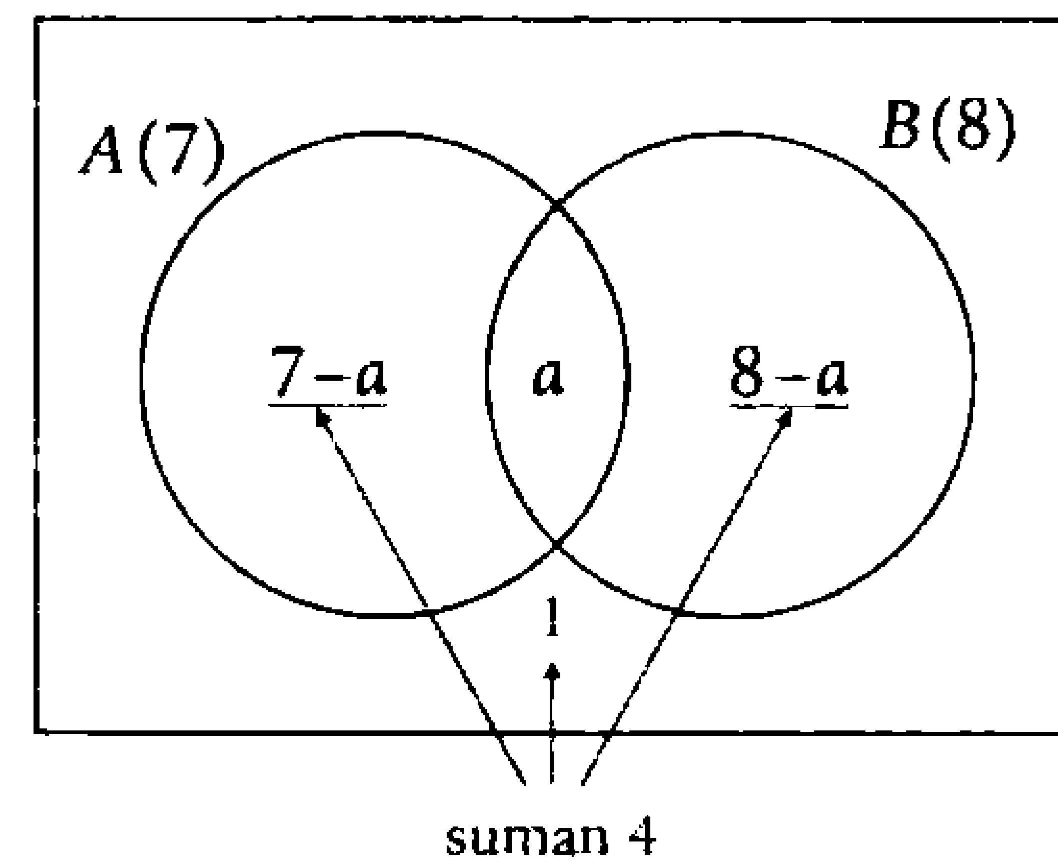
- Cantidad de subconjuntos propios de B

$$2^{n(B)}-1=255$$
$$2^{n(B)}=256$$
$$\rightarrow n(B)=8$$

- $n[P[(A \cap B)^C]]=16=2^4$

$$\rightarrow n((A \cap B)^C)=4$$

- $n[(A \cup B)^C]=1$



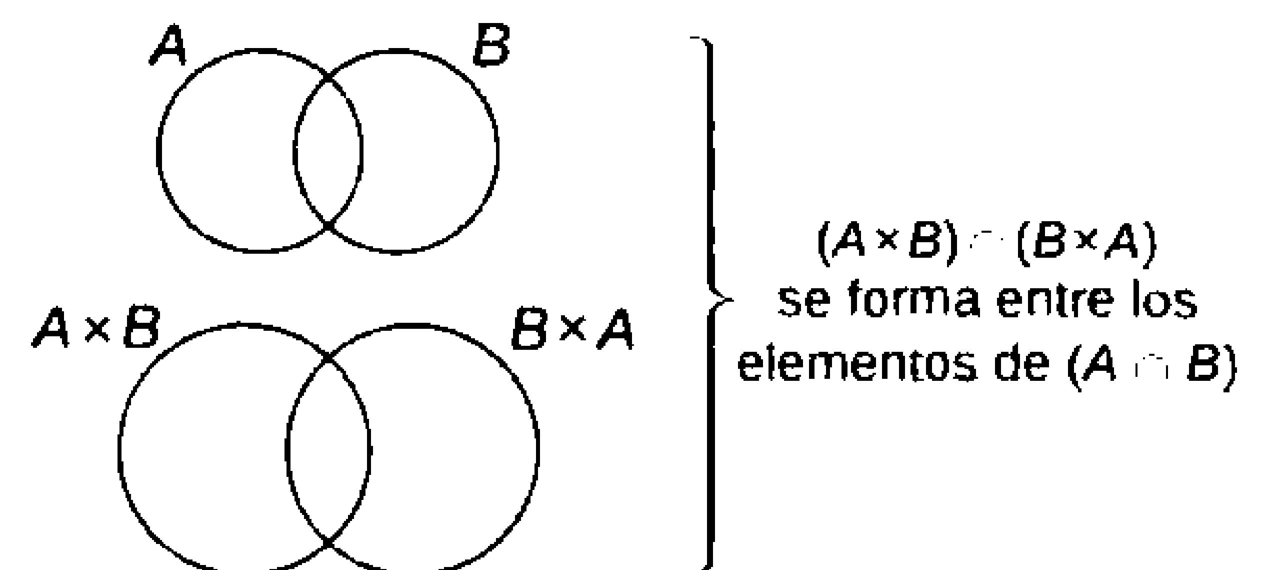
Efectuamos

$$7-a+1+8-a=4 \rightarrow a=6$$

$\therefore n(A \cap B)=6$

Observación

(A×B) ∩ (B×A) se forma entre los elementos de (A∩B)



Sea

$$M=(A\times B) \cap (B\times A)$$
$$M=(A \cap B)\times(A \cap B)$$
$$n(M)=n(A \cap B)\times n(A \cap B)$$
$$n(M)=6\times 6=36$$

$\therefore n(M)=36$

Nos piden la cantidad de subconjuntos con más de un elemento de M

$$2^{n(M)}-n(M)-1=2^{36}-36-1$$
$$=2^{36}-37$$

Clave E

PROBLEMA N.° 18

A, B y C son tres conjuntos, tales que satisfacen las siguientes condiciones:

- A está contenido en B y B está contenido en C.
- Si x es un elemento de C, entonces, x también es un elemento de A.

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A) B no está contenido en A.
B) C no está contenido en B.
C) $A=B$, pero $C \neq B$.
D) $A \cap B=C$.
E) La reunión de A con B tiene elementos que no pertenecen a C.

Resolución

De acuerdo al enunciado, tenemos:

I. $A \subset B \wedge B \subset C$
II. $\forall x \in C \rightarrow x \in A$

Entonces
de (I): $A \subset C$
de (II): $C \subset A$

Luego
$A \subset C \wedge C \subset A \leftrightarrow A=C$

Reemplazamos $A=C$ en (I)
$C \subset B \wedge B \subset C \leftrightarrow B=C$

Luego
$A=B=C$

$\therefore\ A \cap B=C$ es verdadero

Clave **D**

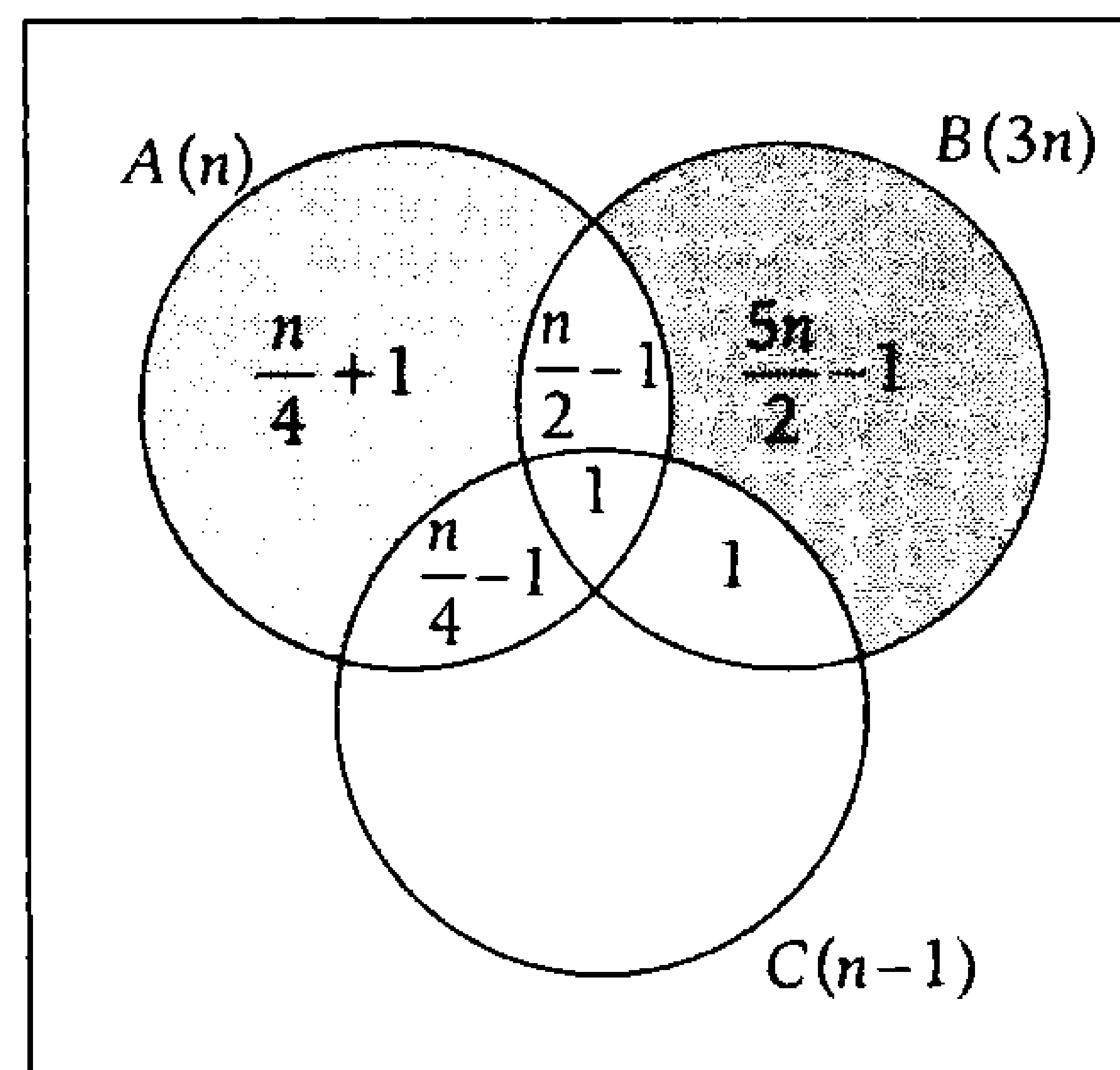
PROBLEMA N.° 19

Dados tres conjuntos: A, B y C, con n, $3n$ y $(n-1)$ elementos, respectivamente. Si A y B tienen $n/2$ elementos comunes; A y C tienen $n/4$ elementos comunes, y B y C tienen 2 elementos comunes y, además, hay un único elemento común a los tres, calcule $n[(A \Delta B)-C]$.

A) $\frac{14n}{4}$ B) $\frac{10n}{4}$ C) $\frac{9n}{4}$
D) $\frac{13n}{4}$ E) $\frac{11n}{4}$

Resolución

De los datos, tenemos el gráfico:



$$n[(A \Delta B)-C]=\frac{n}{4}+1+\frac{5n}{2}-1$$

$$\therefore\ n[(A \Delta B)-C]=\frac{11n}{4}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

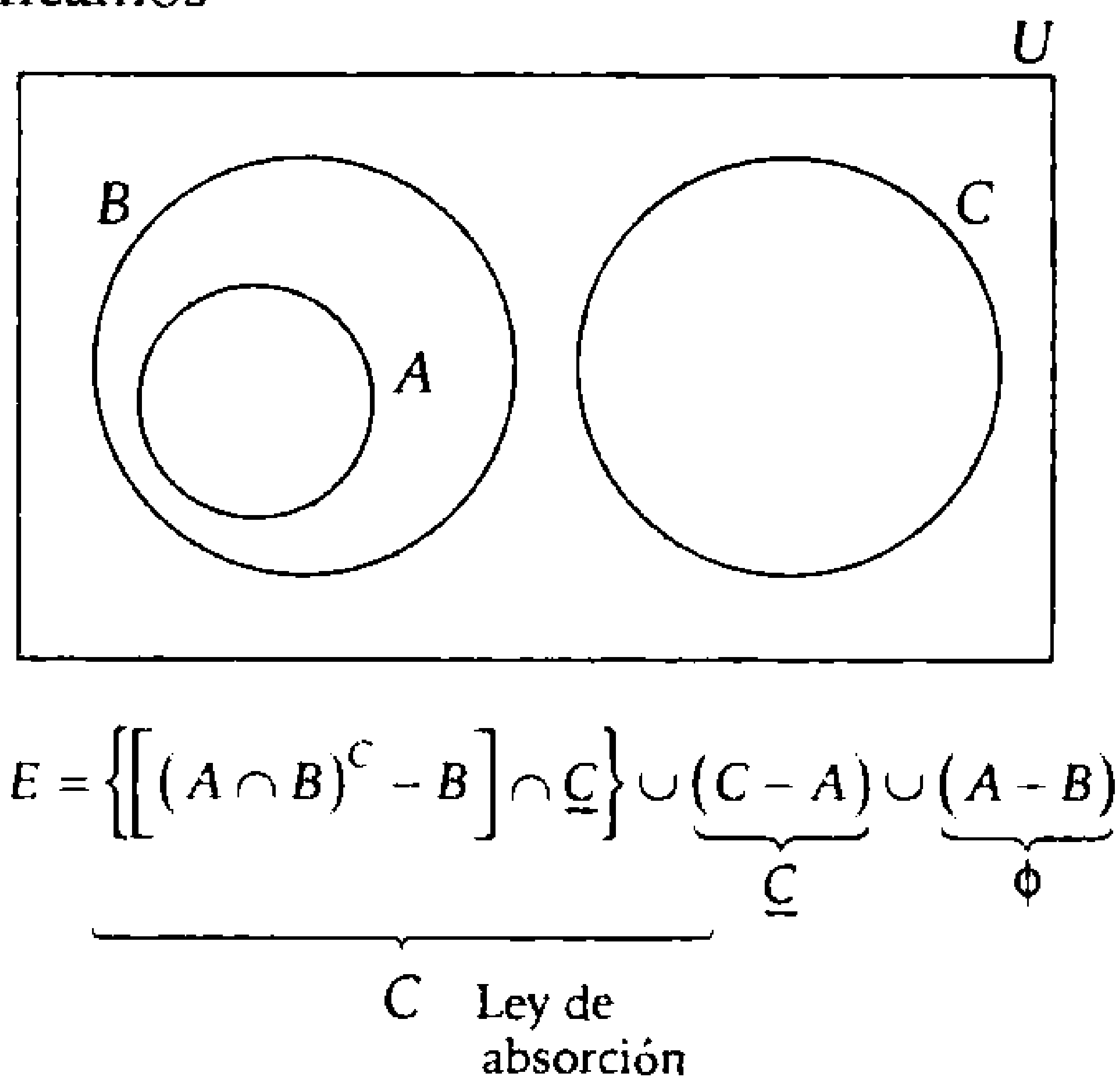
Si $A \subset B$ y $B \cap C=\phi$, entonces, al simplificar $E=\{[(A \cap B)^C-B] \cap C\} \cup (C-A) \cup (A-B)$ se obtiene

A) ϕ B) U C) $A \cap B^C$
D) C E) $A \cup B^C$

Resolución

Tenemos: $A \subset B \wedge B \cap C = \phi$

Graficamos



$\therefore\ E = C$

Clave D

PROBLEMA N.° 21

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. ¿Cuál de las expresiones es falsa?

A) $(A^C \cap B) \subset B$

B) $(A \cup B)^C \subset (A^C \cap B^C)$

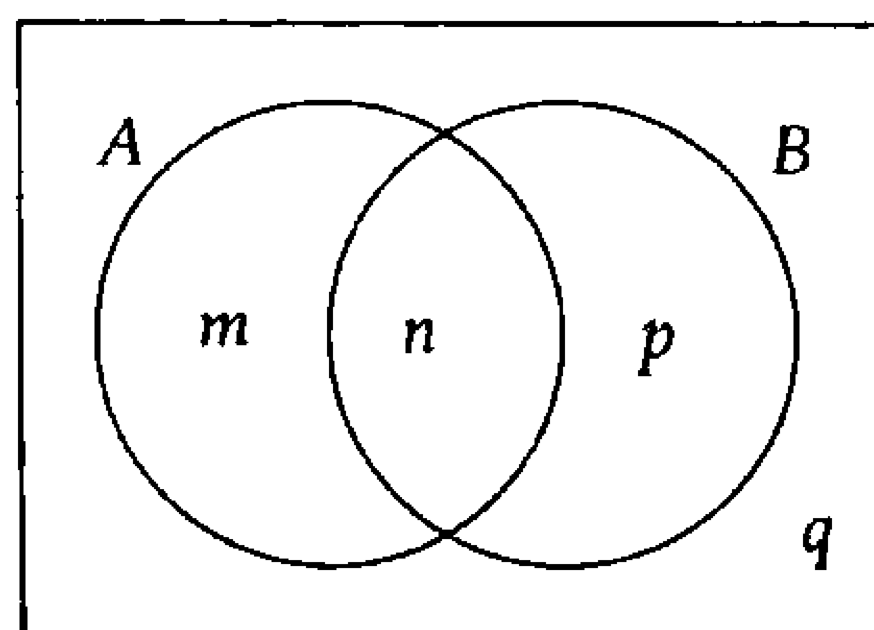
C) $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$

D) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

E) $(A \cap B)^C \subset [(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)]$

Resolución

Identificamos cada región con una letra



De donde

$A = \{m; n\}$

$B = \{n; p\}$

$U = \{m; n; p; q\}$

Analizando cada alternativa:

A) **Verdadera**

$(A^C \cap B) \subset B$

$B - A \subset B$

$\{p\} \subset \{n; p\}$

B) **Verdadera**

$(A \cup B)^C \subset \underbrace{(A^C \cap B^C)}$

$(A \cup B)^C \subset (A \cup B)^C$

C) **Verdadera**

$(A \cap B)^C \subset \underbrace{A^C \cup B^C}$

$(A \cap B)^C \subset (A \cap B)^C$

D) **Verdadera**

$\underbrace{(A \cap B)}_{\{n\}} \cup \underbrace{(A \cap B^C)}_{\{m\}} = A$

$\{n\} \cup \{m\} = \{m; n\}$

$\{n; m\} = \{m; n\}$

E) **Falsa**

$(A \cap B)^C \subset [\underbrace{\underbrace{(A \cap B^C)}_{A-B} \cup \underbrace{(A^C \cap B)}_{B-A}}_{A \Delta B}]$

$\underbrace{(A \cap B)^C}_{\{m;\, p;\, q\}} \subset \underbrace{(A \Delta B)}_{\{m;\, p\}}$ no se cumple

Por lo tanto, la expresión falsa pertenece a la alternativa E.

Clave E

PROBLEMA N.° 22

Si se sabe que $A\Delta B=B-A$, halle la expresión conjuntista reducida de
$M=\{[(A\cap B)\Delta B]\cap B\}\cup[(A\Delta B)^C\cap(A-B)]^C$.

A) $A-B$ B) $A\cap B$ C) $A^C\cup B$
D) $A^C\cap B$ E) $A\cup B$

Resolución

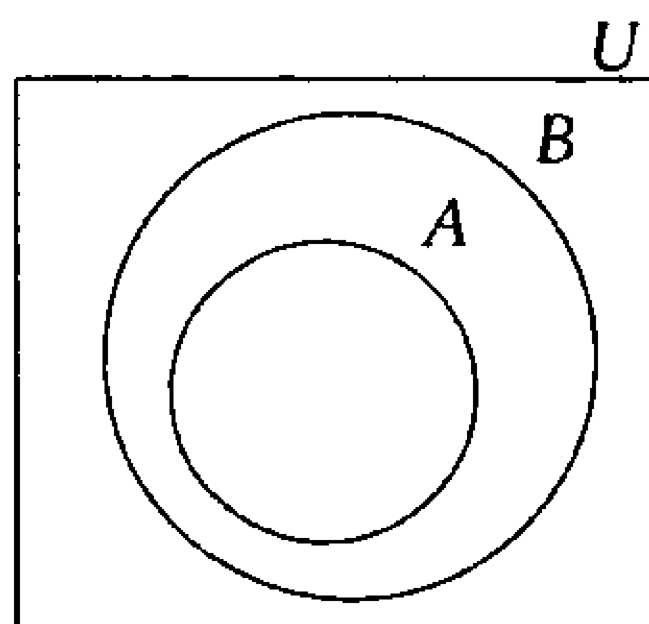
Tenemos

$A\,\Delta\,B=B-A$

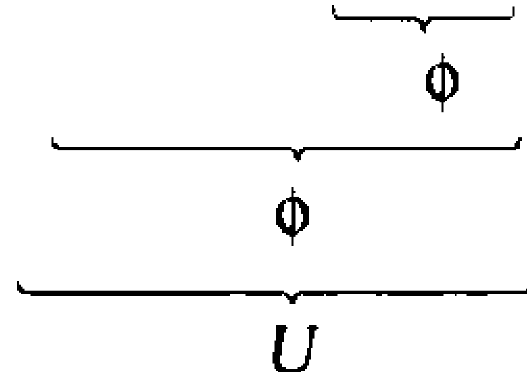
Luego

$A\,\Delta\,B=B-A \quad\leftrightarrow\quad A\subset B$

Graficamos



$M=\{[(A\cap B)\Delta\,B]\cap B\}\cup[(A\,\Delta\,B)^C\cap\underbrace{(A-B)}_{\phi}]^C$



$\rightarrow\ M=U$

Observación

Del diagrama

$A^C\cup B=U$

$\therefore\ M=A^C\cup B$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Se define

$A*B=[(A^C\cup B)^C\cup(B\cap A^C)]^C$

$A\otimes B=B\cup A^C$

Reduzca

$\{[(A*B)\cup B^C]\otimes B\}*B$.

A) ϕ B) B C) U
D) A E) $A-B$

Resolución

Reduciendo la expresión conjuntista tenemos

- $A*B=\underbrace{[\underbrace{(A^C\cup B)^C}\cup(B\cap A^C)]^C}$
  $[(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)]^C$
  $A\,\Delta\,B$

  $A*B=(A\,\Delta\,B)^C$
- $A\otimes B=A^C\cup B$

Reducimos

$\{[\underbrace{(A*B)}\cup B^C]\otimes B\}*B$

$=\{[(A\,\Delta\,B)^C\cup B^C]^C\cup B\}*B$

$=\underbrace{\{[(A\Delta B)\cap B]\cup B\}}_{\text{(por absorción)}}*B$

$=\quad B \quad * \quad B$

$=\underbrace{(B\,\Delta\,B)^C}_{(\phi)^C}$

$=U$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

Se define la operación # entre conjuntos como $A\#B=A'\cap B'$.

Sean las proposiciones:

I. $A\#A=A'$
II. $(A\#B)\#(A\#B)=A\cup B$
III. $(A\#A)\#(B\#B)=A\cap B$
IV. $A\#(B\#C)=(A\#B)\#C$

¿Cuántas de estas son falsas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

Resolución

Se tiene

$A \# B = A' \cap B'$

Analizamos las proposiciones:

I. **Verdadera**

$A \# A = A'$

$\underbrace{A' \cap A'}_{A'}$

II. **Verdadera**

$(A \# B) \# (A \# B) = (A \cup B)$

$(A' \cap B') \# (A' \cap B')$

$\underbrace{(A' \cap B')' \cap (A' \cap B')'}_{\underbrace{(A' \cap B')'}_{A \cup B}}$

III. **Verdadera**

$\underbrace{(A \# A)}_{A'} \# \underbrace{(B \# B)}_{B'} = A \cap B$ de (I)

$\underbrace{(A')' \cap (B')'}_{A \cap B}$

IV. **Falsa**

$A \# (B \# C) = A \# (B' \cap C')$

$= A' \cap (B' \cap C)$

$= A' \cap (B \cup C)$

$(A \# B) \# C = (A' \cap B') \# C$

$= (A' \cap B') \cap C'$

$= (A \cup B) \cap C'$

$\rightarrow \; A \# (B \# C) \neq (A \# B) \# C$

Por lo tanto, hay una falsa.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 25

Para los conjuntos A, B, C y D se cumple lo siguiente:

I. $C - A = \phi$

II. $B \cap D = D$

III. $n(C) = 4$

IV. $n(A \cap (B \cup C \cup D)') = 2$

V. $n(P(A)) = 128$

Calcule $n[(A \cap B) - C - D]$

Considere que A y D son disjuntos.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Para graficar tomamos en cuenta:

- $C - A = \phi \;\rightarrow\; C \subset A$
- $B \cap D = D \;\rightarrow\; D \subset B$
- Además, A y D son disjuntos.

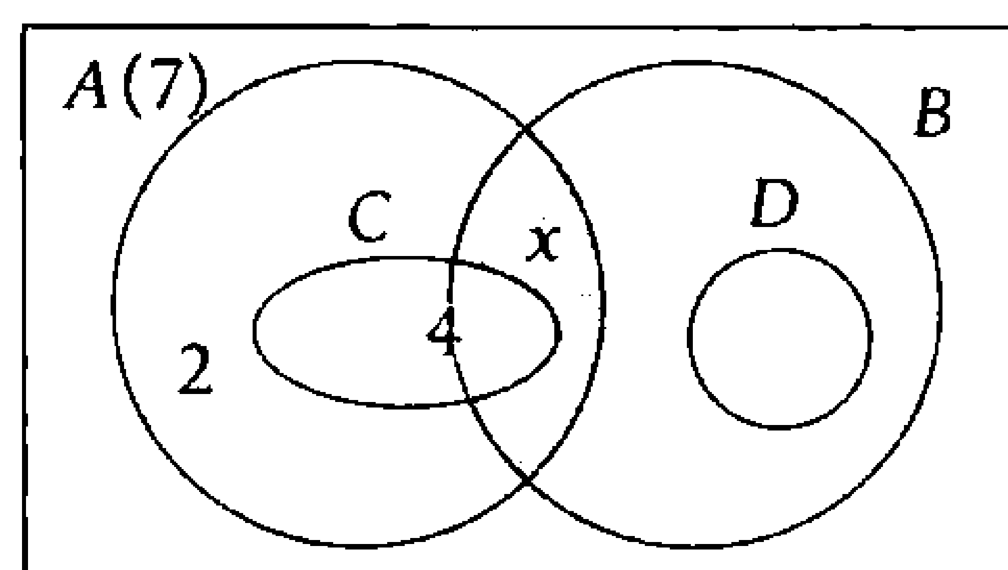
Tenemos

$n(A) = 7$

$n(C) = 4$

$n[A \cap (B \cup C \cup D)^C] = 2$

$n[(A \cap B) - C - D] = x$



Del gráfico

$n(A) = 2 + 4 + x = 7$

$\therefore \; x = 1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Entre los asistentes a un circo, se observó:

I. En platea, cada niño varón fue con su mamá y cada niña con su papá; y por cada niño varón habían dos niñas.
II. Las niñas que ocupaban tribuna fueron con sus dos padres y cada una de ellas estaba con un hermanito varón.
III. Solo asistieron 10 niños varones solos y estos estaban en tribuna.
IV. Los niños solos son 1/3 de las madres en tribuna y estas, a su vez, son la mitad del total de personas en platea.

Calcule el total de asistentes.

A) 250 B) 120 C) 190
D) 270 E) 140

Resolución

Observación

En tribuna, las cantidades de padres, madres, niños varones acompañados y niñas son iguales.

Entonces

	Madre	Niños varones	Padres	Niñas
Platea(60)				
Tribuna	30	30 / 10 (solos)	30	30

Del diagrama obtenemos

Total $=60+4(30)+10=190$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 27

Dados los conjuntos iguales A y B, en los que:

$A=\{\overline{ab};\ c^2+1;\ \overline{mnp}\}$

$B=\{\overline{a6};\ \overline{a(a+2)};\ \overline{(a-1)bc}\}$

Halle $a+b+c+m+n+p$

A) 18 B) 21 C) 23
D) 25 E) 27

Resolución

Por ser conjuntos iguales, tienen los mismos elementos, además, a, b y c son cifras (≤ 9).

$$A = B$$

$$\{\overline{ab};\ \underbrace{c^2+1}_{};\ \overline{mnp}\}=\{\overline{a6};\ \overline{a(a+2)};\ \overline{(a-1)bc}\}$$

Su máximo valor es $9^2+1=82$ entonces puede ser igual a $\overline{a(a+2)}$ o $\overline{a6}$.

$$c^2+1=\overline{a(a+2)} \quad \text{ó} \quad c^2+1=\overline{a6}$$

$$c^2=\overline{a(a+1)} \qquad c^2=\overline{a5}$$

No hay un cuadrado con dos cifras consecutivas; $\quad 5^2 \quad 25$

$$c=5;\ a=2$$

También

$$\overline{ab}=\overline{a(a+2)} \ \wedge\ \overline{mnp}=\overline{(a-1)bc}$$

$\quad 2 \quad 4 \qquad\qquad 1 \quad 45$

$b=4$

$m=1$

$n=4$

$p=5$

$\therefore\ a+b+c+m+n+p=21$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Si $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\Big/\dfrac{24}{x}\in\mathbb{Z}\right\};\ B=\left\{\dfrac{y}{18}=\overset{\circ}{y}\right\}$,

calcule $n(A-B)$.

A) 14 B) 10 C) 2
D) 4 E) 12

Resolución

Analizamos los conjuntos:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\underbrace{\frac{24}{x}\in\mathbb{Z}}\right\}$$

→ x es un divisor entero de 24

$A=\{-24; -12; -8; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

$$B=\{y/\underbrace{18=\overset{\circ}{y}}\}$$

→ y es un divisor entero positivo de 18

$B=\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

Luego

$A-B=\{-24; -12; -8; -6; -4; -3; -2; -1; 4; 8; 12; 24\}$

$\therefore\ n(A-B)=12$

Clave E

PROBLEMA N.° 29

Sean los conjuntos:

$A=\{2^n/n\in\mathbb{Z}^+\}$

$B=\{n^2/n\in\mathbb{Z}_0^+;\ n<8\}$

¿Cuántos subconjuntos propios tiene $(B-A)$?

A) 3
B) 7
C) 63
D) 31
E) 15

Resolución

Expresamos cada conjunto por extensión:

- $A=\{2^n/n\in\mathbb{Z}^+\}$

  n: 1; 2; 3; 4; 5;...

  $A=\{2^1; 2^2; 2^3; 2^4; ...\}$

- $B=\{n^2/n\in\mathbb{Z}_0^+;\ n<8\}$

  $B=\{0^2; 1^2; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2; 6^2; 7^2\}$

  $\rightarrow\ B-A=\{0; 1; 9; 25; 36; 49\}$

  $n(B-A)=6$

Cantidad de subconjuntos propios de $B-A$

$2^{n(B-A)}-1$

2^6-1

$\therefore\ 63$

Clave C

PROBLEMA N.° 30

Sean los conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}/2x-1=x^2\}$

$B=\phi;\ C=\{x\in\mathbb{R}/x<1\}$

Determine $(A\cup B)^C\cup C$.

A) B
B) A^C
C) $A\cap B$
D) $A^C\cap B$
E) A

Resolución

Tenemos los conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}/2x-1=x^2\}=\{1\}$

$B=\phi;\ C=\{x\in\mathbb{R}/x<1\}=\langle-\infty; 1\rangle$

Observación

De lo anterior

$C\subset A^C$

Luego, en: $(A\cup B)^C\cup C$

$$(\underbrace{A\cup B}_{A})^C\cup C=A^C\cup C=A^C$$

Clave B

PROBLEMA N.° 31

Se sabe que $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$, F y G son tales que $G \neq \phi$ y $F \cup G$ es un conjunto unitario.

$F=\{a^2+2b;\ b^2+1\}$

$F \cup G=\{a+4b;\ b+1-3a\}$

Halle $F \cap G$

A) ϕ B) $\{0\}$ C) $\{10\}$
D) $\{1\}$ E) $\{-1\}$

Resolución

Analizamos los datos:

$a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \in \mathbb{Z}$

$G \neq \phi$
$F \cup G$ es unitario } F y G tienen un único elemento y es el mismo

Piden $F \cap G=F=G$

Sabemos que $F=G$

Luego

$\{a^2+2b;\ b^2+1\}=\{a+4b;\ b+1-3a\}$

$a^2+2b=b^2+1=a+4b=b+1-3a\}$

$a^2=(b-1)^2 \ \wedge \quad 4a+3b=1$

$a=\pm(b-1) \ \wedge \ 4a+3b=1$

De donde hay dos casos

1.° Resolviendo

$\left.\begin{array}{l} a=b-1 \\ 4a+3b=1 \end{array}\right\} \quad a=\dfrac{-2}{7} \ \text{y} \ b=\dfrac{5}{7}$

No cumple, porque a y b son $\mathbb{Z}$

2.° Resolviendo

$\left.\begin{array}{l} a=-(b-1) \\ 4a+3b=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=-2 \\ b=3 \end{array}$

$\therefore \ F \cap G=\{10\}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

Determine la validez de las afirmaciones siguientes:

I. Si $A \cap B=A \cap C \ \rightarrow \ B=C$.
II. Si $(B-C) \cap A \subset (A \cap B) \ \rightarrow \ B \subset C$.
III. Si $(A \cap B) \subset C \ \rightarrow \ A \subset C \wedge B \subset C$.
IV. Si $A \subset B \subset C \rightarrow C=A \cup (B-A) \cup (C-B)$.

A) FVFF
B) FFVF
C) FFFV
D) FFFF
E) FVVF

Resolución

Analizamos las afirmaciones:

I. **Falsa**

$A \cap B=A \cap C \ \rightarrow \ B=C$

No necesariamente

contra ejemplo:

$A=\{1\}$,

$B=\{1;\ 2\}$,

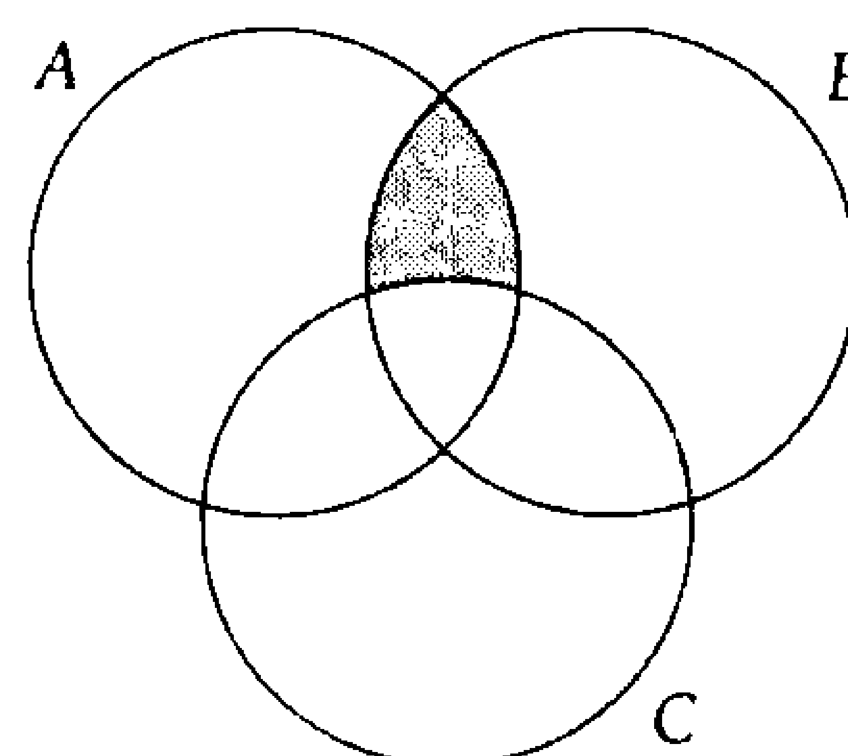
$C=\{1;\ 3\}$

$A \cap B=A \cap C$

sin embargo, $B \neq C$

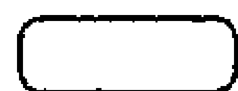
II. **Falsa**

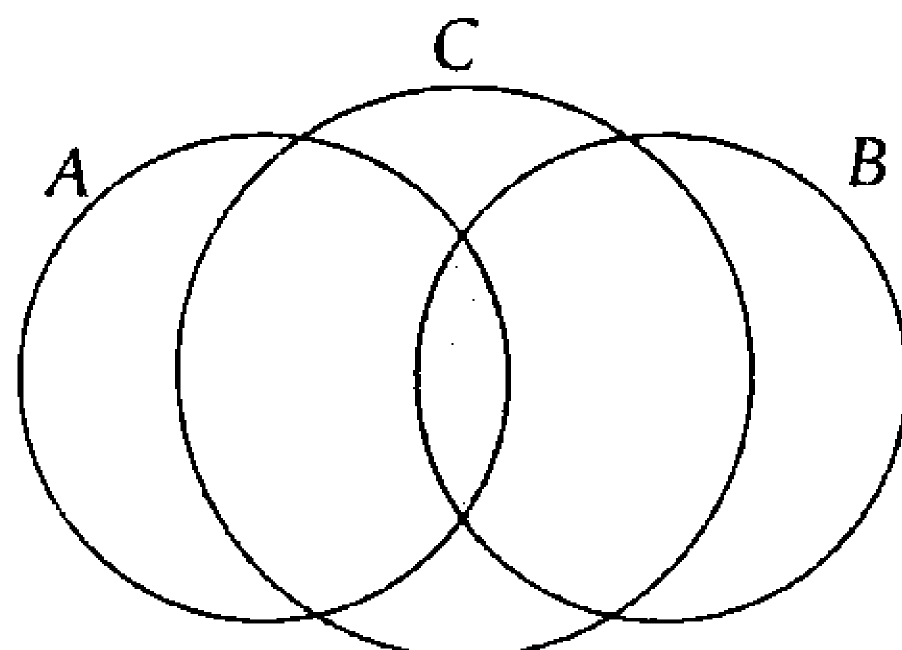
$(B-C) \cap A \subset (A \cap B) \ \rightarrow \ B \subset C$



III. **Falsa**

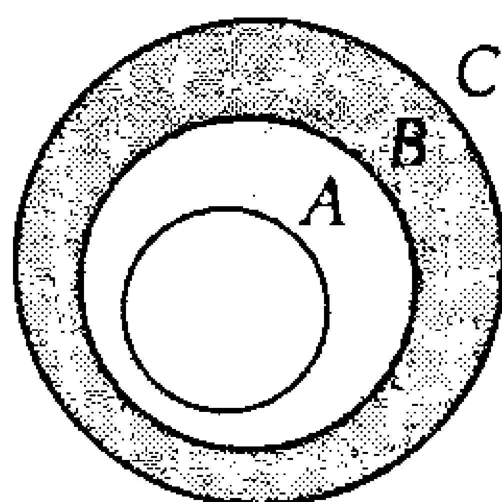
$\underbrace{(A \cap B)} \subset C \rightarrow A \subset C \wedge B \subset C$





IV. **Verdadera**

$A \subset B \subset C \rightarrow C = A \cup \underbrace{(B-A)} \cup \underbrace{(C-B)}$



Por lo tanto, la respuesta es FFFV.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos, además, se tiene:

$n(B \Delta C) = 40$

$n(A \cap (B^C \cap C^C)) = 10$

$n(A \cap B \cap C) = 5$

$B \cap C \cap A^C = \phi$

Calcule $n(A^C \cap B^C \cap C^C)$

A) 10 B) 0 C) 5
D) 4 E) 3

Resolución

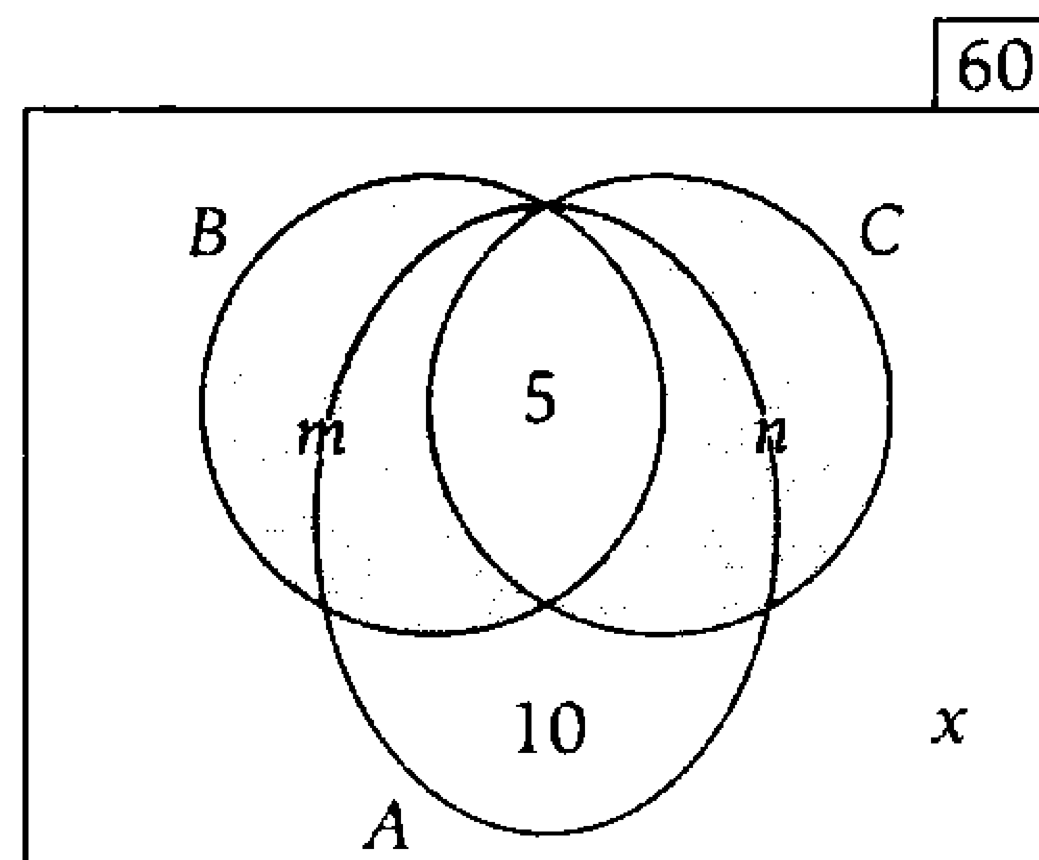
Como

$(B \cap C) \cap A^C = \phi$

$(B \cap C) - A = \phi$

Entonces

$(B \cap C) \subset A$



Nos piden $n(A^C \cap B^C \cap C^C) = x$

- $n[A \cap (B^C \cap C^C)] = 10$

  $n[A - (B \cup C)] = 10$

- $n(B \Delta C) = 40$

  $m + n = 40$

- $n(U) = 5 + 10 + \underbrace{m + n}_{40} + x = 60$

$\therefore \ x = 5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Los cardinales de los conjuntos A, B y C son números enteros consecutivos; además

$n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 448$.

Entonces, determine el valor de

$E = n(A) + n(B) + n(C)$.

A) 21 B) 22 C) 20
D) 23 E) 24

Resolución

Sea

$n(A)=a$

$n(B)=a+1$

$n(C)=a+2$

Tenemos

$n[P(A)]+n[P(B)]+n[P(C)]=448$

$2^{n(A)}+2^{n(B)}+2^{n(C)}=448$

$2^a+2^{a+1}+2^{a+2}=448$

$2^a(1+2^1+2^2)=448$

$2^a=64=2^6$

$\rightarrow\ a=6$

Luego

$E=n(A)+n(B)+n(C)$

$\therefore\ E=3a+3=3(6)+3=21$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

En una encuesta a 198 estudiantes sobre la profesión a seguir, se obtiene la siguiente información:

I. Los que solo desean Sistemas son tantos como los que desean Medicina.

II. Los que desean Sistemas y Medicina son la quinta parte de los que desean Sistemas o Medicina.

III. Los que no desean Sistemas ni Medicina son la tercera parte de los que solo desean Medicina.

¿Cuántos desean solo Medicina?

A) 12 B) 18 C) 36
D) 42 E) 54

Resolución

De los datos, tenemos:

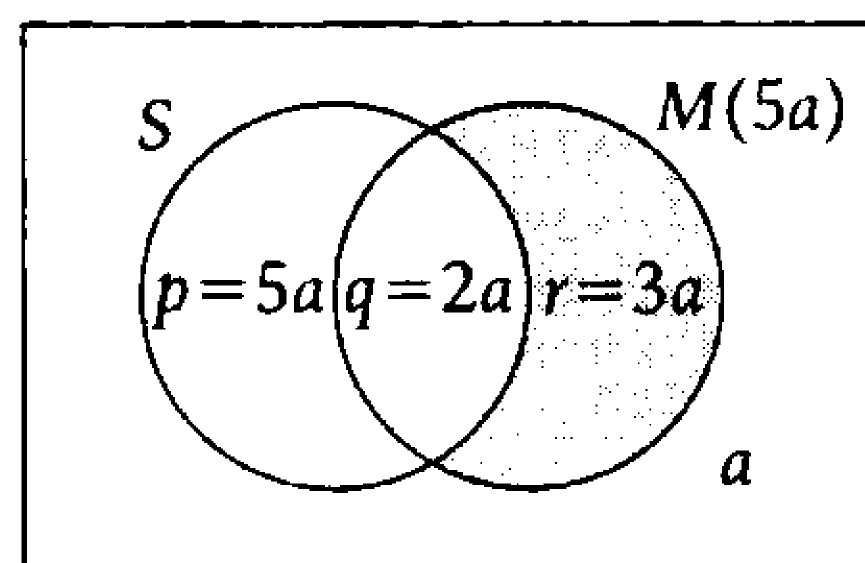
I. $n(S-M)=n(M)\ \rightarrow\ p=q+r$

II. $5n(S\cap M)=n(S\cup M)\ \rightarrow\ 5q=p+q+r$

III. $3\times\underbrace{n[(S\cup M)^C]}_{a}=n(M-S)\ \rightarrow\ 3a=r$

Resolviendo $r=3a,\quad p=5a,\quad q=2a$

Tenemos



$n(U)=11a$

$11a=198$

$a=18$

Por lo tanto, solo desean Medicina

$r=3\times(18)=54$ estudiantes.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 36

De los residentes de un barrio se observa que 29 trabajan y 56 son mujeres, de las cuales 12 estudian. De los varones, 32 trabajan o estudian y 21 no trabajan ni estudian. Si 36 varones no trabajan y 3 mujeres estudian y trabajan, ¿cuántas mujeres no estudian ni trabajan?

A) 21 B) 28 C) 30
D) 35 E) 40

Resolución

Sean T: los que trabajan
E: los que estudian

Graficamos

T(29)
21
E
V
17
15
9
3
9
M(56)
35

Por lo tanto, 35 mujeres no estudian ni trabajan.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 37

Si Luis prepara diferentes clases de jugos con las frutas que tiene, puede obtener 31 jugos de diferentes sabores. Si Pedro puede obtener 120 jugos de diferentes sabores y en cada uno de ellos utiliza, por lo menos, 2 frutas diferentes, resulta que ambos pueden coincidir en preparar 6 jugos de dos frutas diferentes. ¿Cuántas variedades de frutas tienen entre los dos?

A) 12 B) 10 C) 9
D) 6 E) 8

Resolución

- Si Luis tiene a frutas diferentes, el número de jugos de diferentes sabores que puede obtener es

  Cantidad de subconjuntos no vacíos

  $$2^a-1=31 \rightarrow 2^a=32 \rightarrow a=5$$

- Si Pedro tiene b frutas diferentes, el número de jugos con al menos dos frutas es

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{N.° de}\\ \text{subconjuntos}\end{pmatrix}}_{2^b}-\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Subconjuntos}\\ \text{unitarios y el vacío}\end{pmatrix}}_{(b+1)}=120$$

$$2^b=121+b$$

$$b=7$$

- Si hay n frutas comunes entre Luis y Pedro, el número de jugos de 2 frutas que coinciden es

  $$C_2^n=6$$

  $$\frac{n(n-1)}{2\times 1}=6$$

  $$n=4$$

Tenemos

Luis (5)
Pedro (7)
1
4
3
8 frutas

Por lo tanto, hay 8 variedades de frutas en total.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 38

En los meses de enero y febrero del 2007, un joven asiste a la academia 48 días, visitó a su enamorada 31 días y tuvo que trabajar 24 días. ¿Cuántos días sólo visitó a su enamorada, si no hubo día en que se dedicara sólo a dos actividades y, además, todos los días realiza al menos una de dichas actividades?

A) 9 B) 13 C) 17
D) 20 E) 24

Resolución

Sean A: asiste a la academia

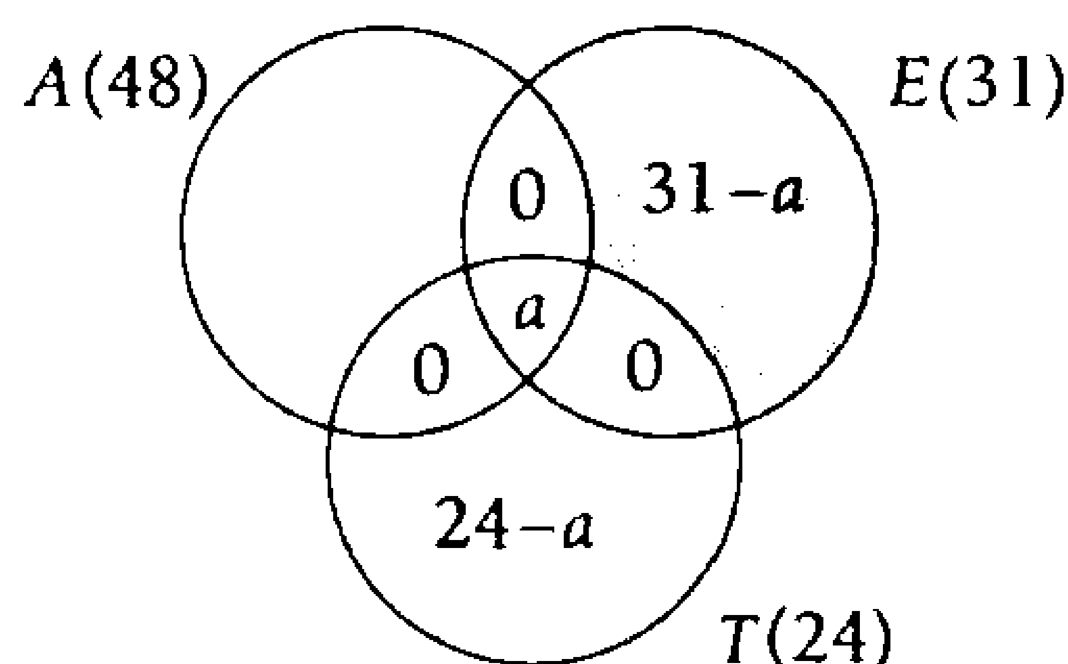
E: visita a su enamorada

T: tuvo que trabajar

Tenemos

2007: Enero ; Febrero

$$31 + 28 = 59 \text{ días}$$



Luego, totalizando

$n(A)+(31-a)+(24-a)=59$

$a=22$

$\rightarrow\ 31-a=9$

Por lo tanto, 9 días sólo visitó a su enamorada.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

De un grupo de 70 ingresantes a la UNI, se observa que la cantidad de varones es cinco veces más que la de mujeres; 53 varones no son cachimbos de Ingeniería de Sistemas y las mujeres ingresantes, que no son de Ingeniería de Sistemas ni de Ingeniería Electrónica, son tantas como los cachimbos de Ingeniería de Sistemas. ¿Cuántas mujeres son de Ingeniería Electrónica o de Ingeniería de Sistemas?

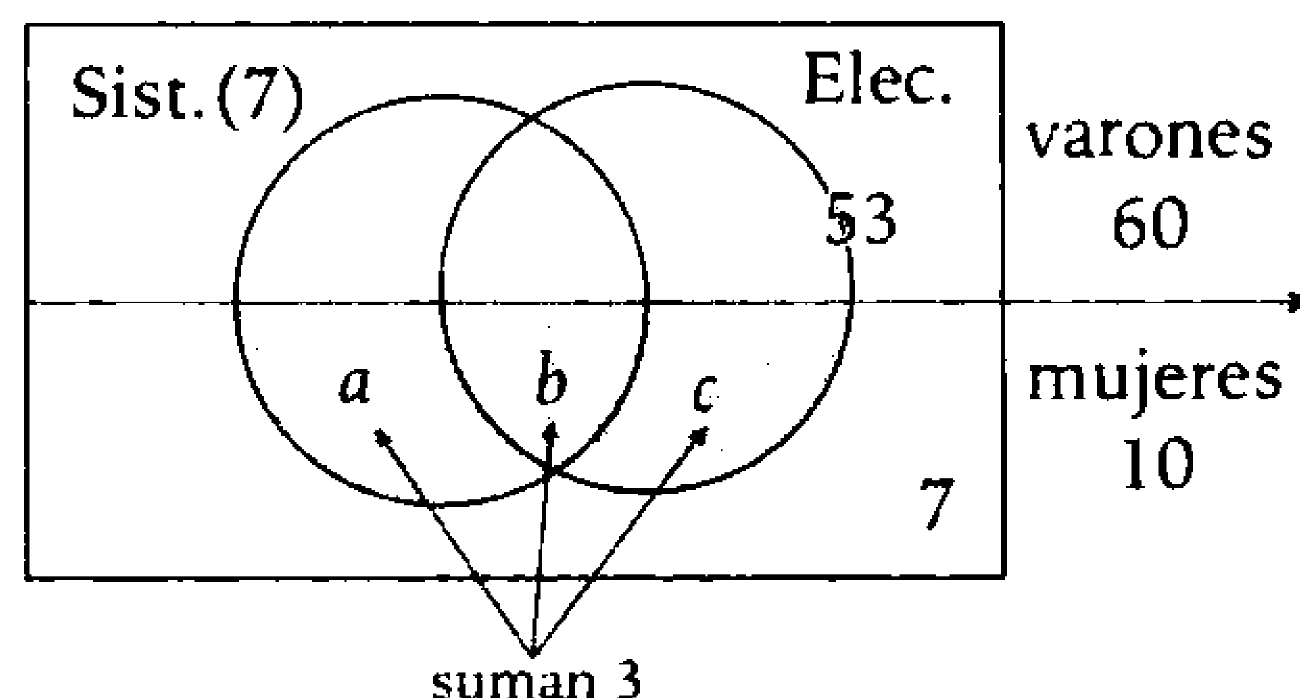
A) 4 B) 3 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Del dato:

- $\dfrac{\text{N.° varones}}{\text{N.° mujeres}}=\dfrac{6}{1}$
- $\underbrace{(\text{N.° varones})}_{60}+\underbrace{(\text{N.° mujeres})}_{10}=70$
- 60 varones
  - 53 varones no son de Ing. Sistemas
  - ⑦varones sí son de Ing. Sistemas

  ⑦mujeres no son de Ing. Sistemas ni Electrónica



Cantidad de mujeres de Ing. Electrónica o de Ing. Sistemas es $a+b+c=3$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

En una reunión, a la que asistieron 90 deportistas, se observa que 40 practican fútbol, 39 básquet, 51 vóley y 54 natación; 15 fútbol, natación y básquet; 14 fútbol, básquet y vóley; 18 básquet, natación y vóley; 25 fútbol y vóley. Además, asistieron 9 personas que practicaban los cuatro deportes, 7 ninguno de ellos y 2 solo natación. ¿Cuántos deportistas son los que si no practican básquet o practican fútbol, entonces, practican vóley?

A) 62 B) 55 C) 58
D) 66 E) 65

Resolución

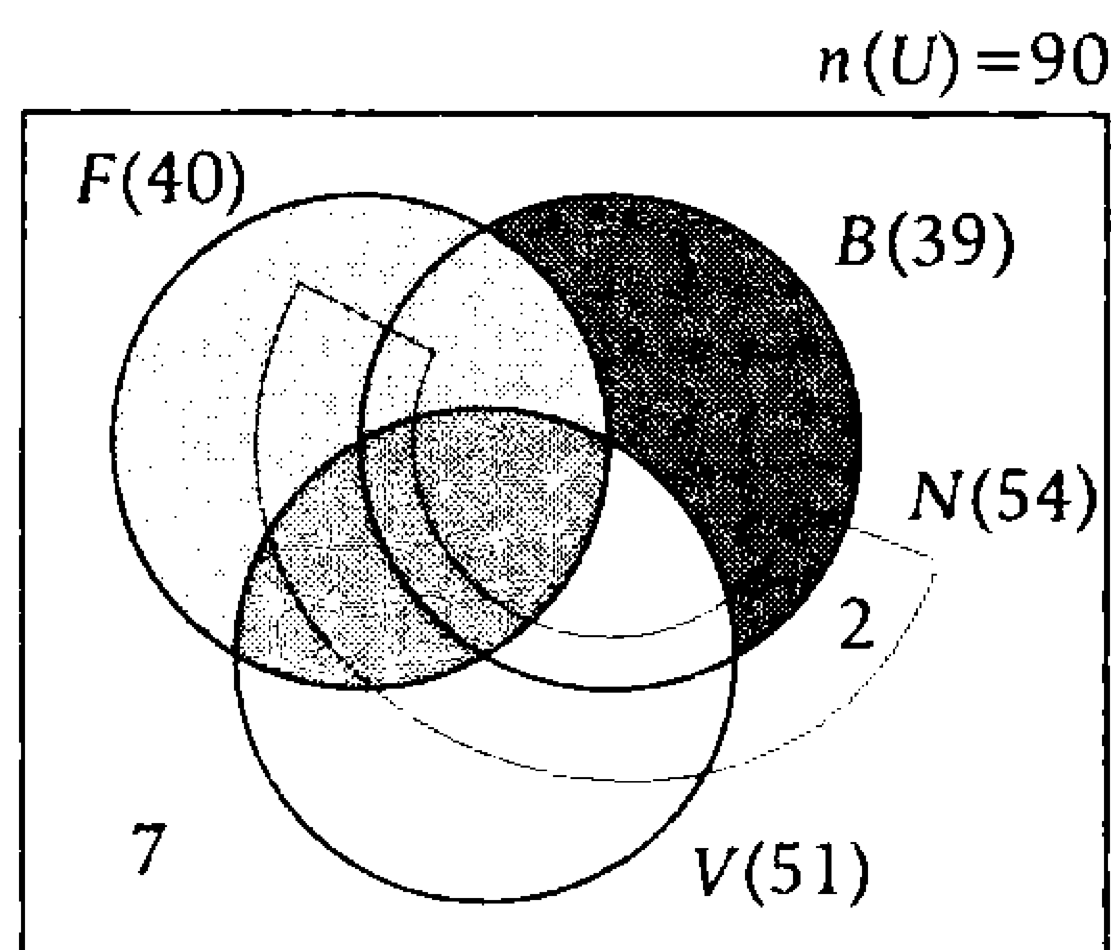
Sean F: practican fútbol
B: practican básquet
V: practican vóley
N: practican natación

Piden

$(\sim B \vee F) \rightarrow V$

$\sim(\sim B \vee F) \vee V$

$(B \wedge \sim F) \vee V \equiv \underbrace{(B \cap F')}_{(B-F)} \cup V$



$n(F)=\boxed{}+\boxed{}=40$
↓ 25, ↑ 15

$n(U)=\underbrace{n(V)+\boxed{}}_{\text{piden}}+\boxed{}+2+7=90$
↓ 15

$\therefore\ n(V)+\boxed{}=66$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 41

De un grupo de 60 escolares se observa que en sus tiempos libres hacen lo siguiente:

I. A 10 de ellos les gusta la música, pero no ver televisión.
II. A los que les gusta la música y ver televisión son la mitad de los que les gusta el fútbol y la televisión pero no la música, y estos a su vez son 1/4 de los que les gusta ver televisión.
III. Todos hacen alguna de las tres actividades.
IV. Se sabe que a todos los que les gusta la música les gusta el fútbol.
V. A 15 les gusta ver televisión y no fútbol.

Halle cuántas personas cumplen la siguiente condición: *No es cierto que si les gusta el fútbol, entonces, les gusta la música.*

A) 32 B) 20 C) 30
D) 35 E) 40

Resolución

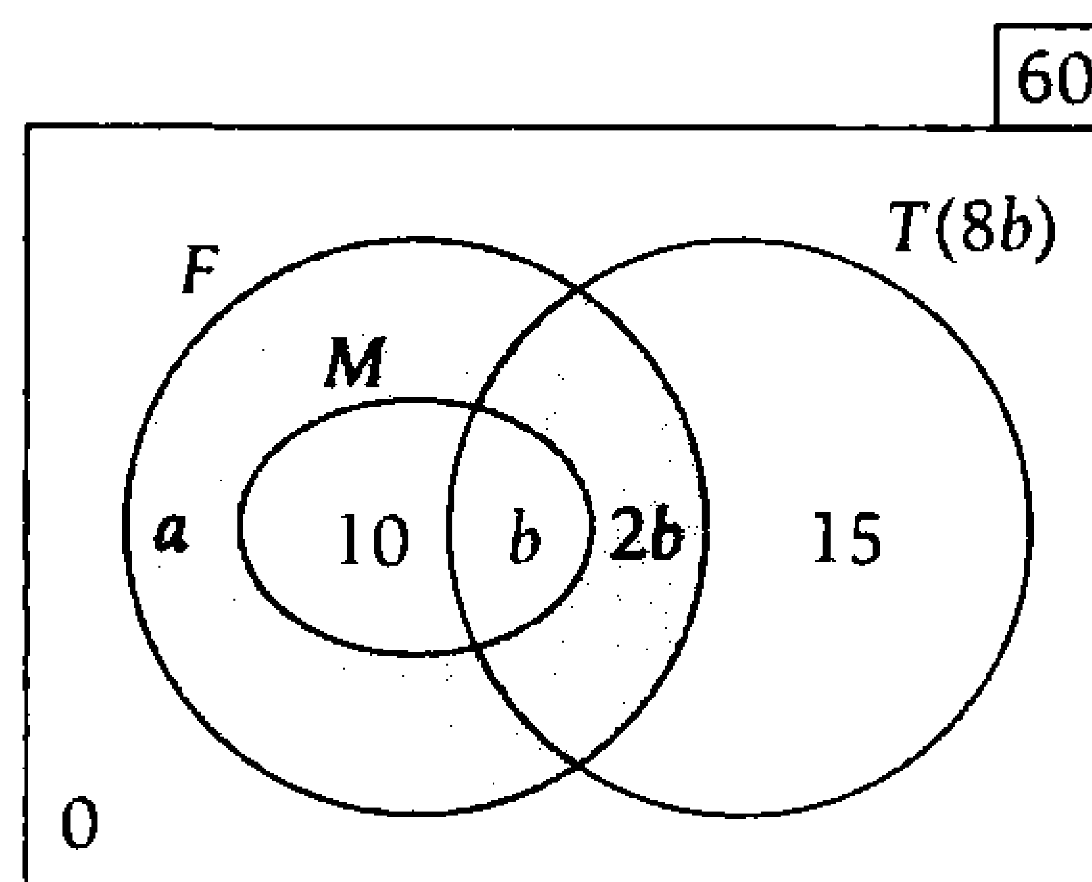
Del dato:

A todos los que les gusta música (M) les gusta fútbol (F). } $M \subset F$

- $\dfrac{n(T)}{8}=\dfrac{n[(F\cap T)-M]}{2}=n(M\cap T)=b$

Entonces

$n(T)=8b;\ n[(F\cap T)-M]=2b;\ n(M\cap T)=b$



- $n(T)=b+2b+15=8b \rightarrow b=3$
- $n(U)=a+10+8b=60 \rightarrow a=26$ (con b = 3)

Nos piden las personas que cumplen la condición.

$\underbrace{\text{No es cierto que:}}_{\sim}$ si les $\underbrace{\text{gusta el fútbol,}}_{F}$

entonces les $\underbrace{\text{gusta la música}}_{M}$
→

El esquema es

$\equiv \sim (F \rightarrow M)$ Ley de la condicional

$\equiv \sim (\sim F \vee M)$ Ley de D' Morgan

$\equiv F \wedge \sim M$

$<> F \cap M^C$

$F - M$

Nos piden $n(F-M)$

$n(F-M) = a + 2b$

$= 26 + 2(3)$

$\therefore\ n(F-M) = 32$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 42

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\sim[\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0] \equiv \nexists x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0$.

II. Si $A = \{0; 2; 4; 6\} \rightarrow \forall x \in A$: $2x \geq -2$.

III. Si $U = \{-1; -2; 0; 3\} \rightarrow \exists x \in U/x + 2 < -10$.

A) VVF B) VVV C) VFV
D) FVV E) FVF

Resolución

Evaluamos en cada caso:

I. **Verdadera**

$\sim \underbrace{\underbrace{[\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0]}_{V}}_{F} \equiv \underbrace{\nexists x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0}_{F}$

$\nexists x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0 \rightarrow 1\,(\text{Si } \exists x \in \mathbb{R})$

II. **Verdadera**

$A = \{0; 2; 4; 6\} \rightarrow \forall x \in A$: $2x \geq -2$

x: 0, 2, 4, 6

III. **Falsa**

$U = \{-1; -2; 0; 3\} \rightarrow \exists x \in U/x + 2 < -10$

x: −1, −2, 0, 3

Por lo tanto, la respuesta es VVF

Clave **A**

PROBLEMA N.° 43

Sean los conjuntos A, B y C. Halle el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

I. $\forall A; \exists B \wedge C/B \cap C = \phi \wedge (B \cup C) = A$

II. $\exists C/\forall A; A \cap C = C$

III. $\forall A; \forall B; A \cup (B \cap A) = A$

A) FVV B) VVV C) FVF
D) VFV E) FFF

Resolución

I. **Verdadero**

$\forall A; \exists B \wedge C/B \cap C = \phi \wedge B \cup C = A$

Si existen B y C,

por ejemplo $C = \phi$, entonces $B = A$

II. **Verdadero**

$\exists C/\forall A; A \cap C = C$

Si existe C; $C \subset A$

cumple para $C = \phi$

III. **Verdadero**

$\forall A; \forall B: A \cup (B \cap A) = A$

Ley de absorción

Por lo tanto, todas son verdaderas: VVV.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 44

Dados los conjuntos A, B y C

$\forall x \in C \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

Además

$n(A-C)=a$

$n(B-C)=b$

$n(A \cup B)=c$

$n(A \cap B)=d$

Halle $n(C)$ en función de a, b, c y d.

A) $\dfrac{a+b+c+d}{3}$

B) $\dfrac{a-b+c-d}{2}$

C) $\dfrac{a+b-c-d}{2}$

D) $\dfrac{c+d-a-b}{2}$

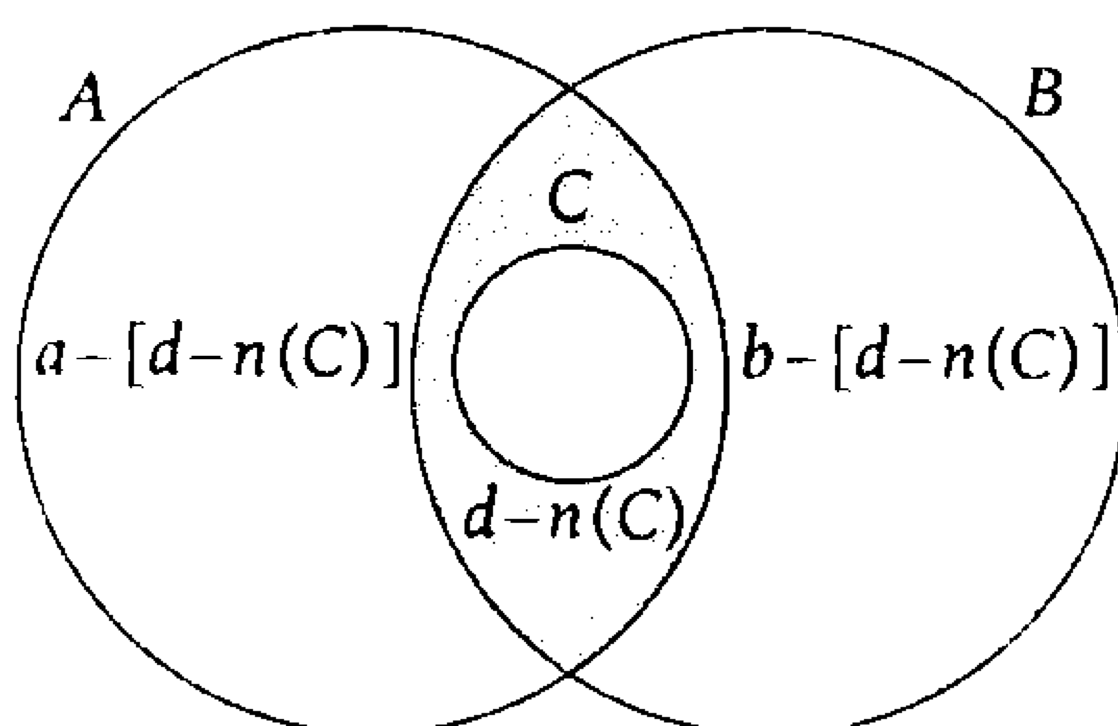
E) $\dfrac{a-b+c-d}{3}$

Resolución

$\forall x \in C \rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{x \in (A \cap B)}$

$[\forall x \in C \rightarrow x \in (A \cap B)] \leftrightarrow C \subset (A \cap B)$

Graficamos



Además

$n(A \cup B)=c \wedge n(A \cap B)=d$

Entonces, del gráfico tenemos:

$n(A-B)+n(A \cap B)+n(B-A)=n(A \cup B)$

$\{a-[d-n(C)]\}+d+\{b-[d-n(C)]\}=c$

$\therefore \; n(C)=\dfrac{c+d-a-b}{2}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 45

Sean A, B y C contenidos en un conjunto universal (U). Si $n(U)=18$, además, A, B y C son tres conjuntos cuyos números cardinales están en progresión aritmética creciente, calcule la suma del máximo y mínimo valor de $n[P[(A \cap B) \cup C]']$.

Considere

$n[P(A)]+n[P(B)]+n[P(C)]=336$

A) 1064 B) 1040

C) 1096

D) 1088 E) 1032

Resolución

Sea la progresión aritmética creciente

$n(A)=a$

$n(B)=a+r$

$n(C)=a+2r$

- $\underbrace{n[P(A)]}_{2^a}+\underbrace{n[P(B)]}_{2^{a+r}}+\underbrace{n[P(C)]}_{2^{a+2r}}=336$

$2^a + 2^{a+r} + 2^{a+2r} = 336$

$\underbrace{2^a}_{2^4}\overbrace{\underbrace{(1+2^r+2^{2r})}_{21}}^{\text{impar}}=7\times3\times2^4$

Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ r=2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n(A)=4 \\ n(B)=6 \\ n(C)=8 \end{array}$$

Observación

$$\underbrace{n[M^C]}_{\substack{\text{será máximo} \\ \text{será mínimo}}} = n(U) - \underbrace{n(M)}_{\substack{\text{si mínimo} \\ \text{si máximo}}}$$

De acuerdo a la observación

$$\rightarrow \underbrace{n[[(A \cap B) \cup C]^C]}=\underbrace{n(U)}-\underbrace{n[[(A \cap B) \cup C]]}$$

máximo valor: $18 - 8 = 10$

mínimo valor: $18 - (4+8) = 6$

$$n[P[[(A \cap B) \cup C]^C]] = \underbrace{2^{n[[(A \cap B) \cup C]C]}}_{\substack{2^{10} \text{ (máximo)} \\ 2^{6} \text{ (mínimo)}}}$$

$\therefore \; 2^{10}+2^{6}=1088$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 46

Entre los asistentes a una fiesta se observó que hay 3 mujeres por cada 4 varones. En cierto momento, Mariela decide contar a los asistentes, pero menos a sus 11 parientes, y nota que la relación entre la cantidad de varones y mujeres es de 9 a 7. Si en su familia la cantidad de varones es el doble que la de mujeres y del total de asistentes se retiraron 20 parejas, para luego llegar 10 mujeres, después de lo cual se observa que 80 personas están bailando; ¿cuántos varones más que mujeres no bailan?

A) 30
B) 10
C) 24
D) 5
E) 12

Resolución

- Inicialmente tenemos:

$$\frac{M}{V}=\frac{3}{4} \rightarrow \begin{array}{l} M=3K \\ V=4K \end{array}$$

- La familia de Mariela consta de 12 personas (ella más sus 11 parientes), 8 varones y 4 mujeres.

  Cuando ella cuenta, nota que:

$$\frac{V-8}{M-4}=\frac{9}{7}$$

$$\frac{4K-8}{3K-4}=\frac{9}{7} \rightarrow K=20$$

Luego

	M	V
inicialmente	60	80
se retiran	20	20
llegan	10	0
al final	50	60
bailan	40	40
no bailan	10	20

Por lo tanto, de las personas que no bailan, hay 10 varones más que mujeres.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 47

En cierta universidad, para ser alumno regular se requiere estar matriculado en por lo menos 2 cursos. En el presente ciclo, de un grupo de 120 alumnos, se sabe que 30 se matricularon en Física II, los 35 que se inscribieron en Álgebra Lineal, también lo hicieron en Matemática III; 80 se matricularon en Estadística III o en Física II y 18 alumnos se inscribieron en Matemática III y Física II, o en Estadística III y Física II, pero no en los 3 cursos. Halle el máximo valor de la cantidad de alumnos no regulares, si los que se inscriben en Física II o Estadística III no lo hicieron en Álgebra lineal.

A) 45
B) 49
C) 67
D) 70
E) 82

Resolución

Tenemos los matriculados en:

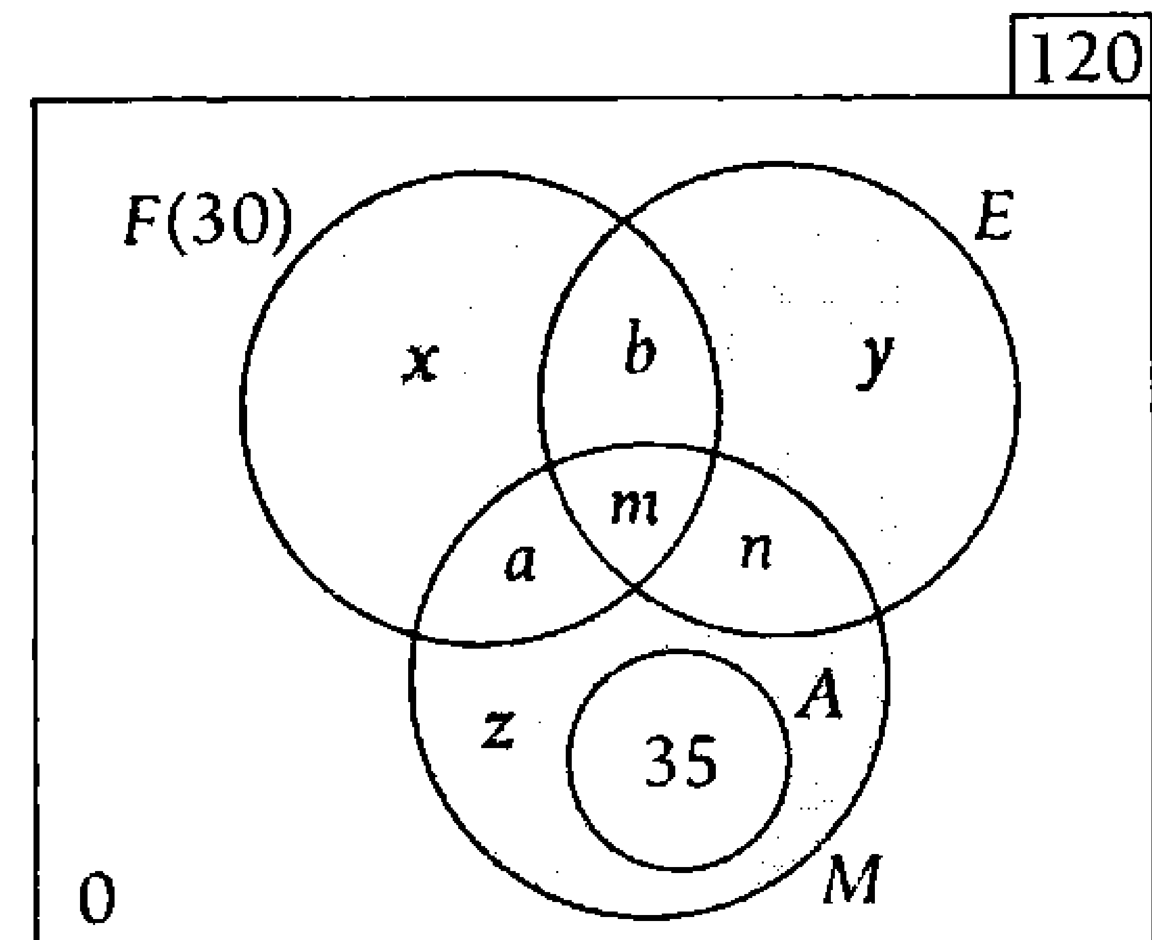
- Física III (F)
- Álgebra Lineal (A)
- Matemática III (M)
- Estadística III (E)

- Los que se inscriben en F o E no lo hacen en A, entonces, $(F \cup E)$ y A son disjuntos.

- Los 35 que se inscriben en A también lo hacen en M, así que:

$n(A)=35$
$A \subset M$

El gráfico será



La cantidad de alumnos no regulares $x+y+z$ es máxima.

- $a+b=18$
- $n(F \cup E)=80$

$$\underbrace{x+y}_{\text{máximo}}+\underbrace{m+n}_{\substack{\text{mínimo}\\0}}+\underbrace{a+b}_{18}=80$$

$$x+y=62$$

- $\underbrace{n(F \cup E)}_{80}+\underbrace{n[(F \cup E)^C]}_{35+z}=120$

$$80 + 35 + z=120$$
$$z=5$$

$$\therefore\ \underbrace{x+y}_{62}+\underbrace{z}_{5}=67$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 48

De 150 personas que estudian alemán (A), inglés (I), francés (F) y ruso (R), ninguno que estudia F estudia R; 22 solo estudian A, 20 solo estudian I; 20 solo estudian F, 20 estudian A y R, pero no estudian I; 6 solo estudian F e I; 4 solo estudian A y F; 24 estudian R e I; 28 solo estudian R, y 1 solo A e I. ¿Cuántas personas estudian A, I y F?

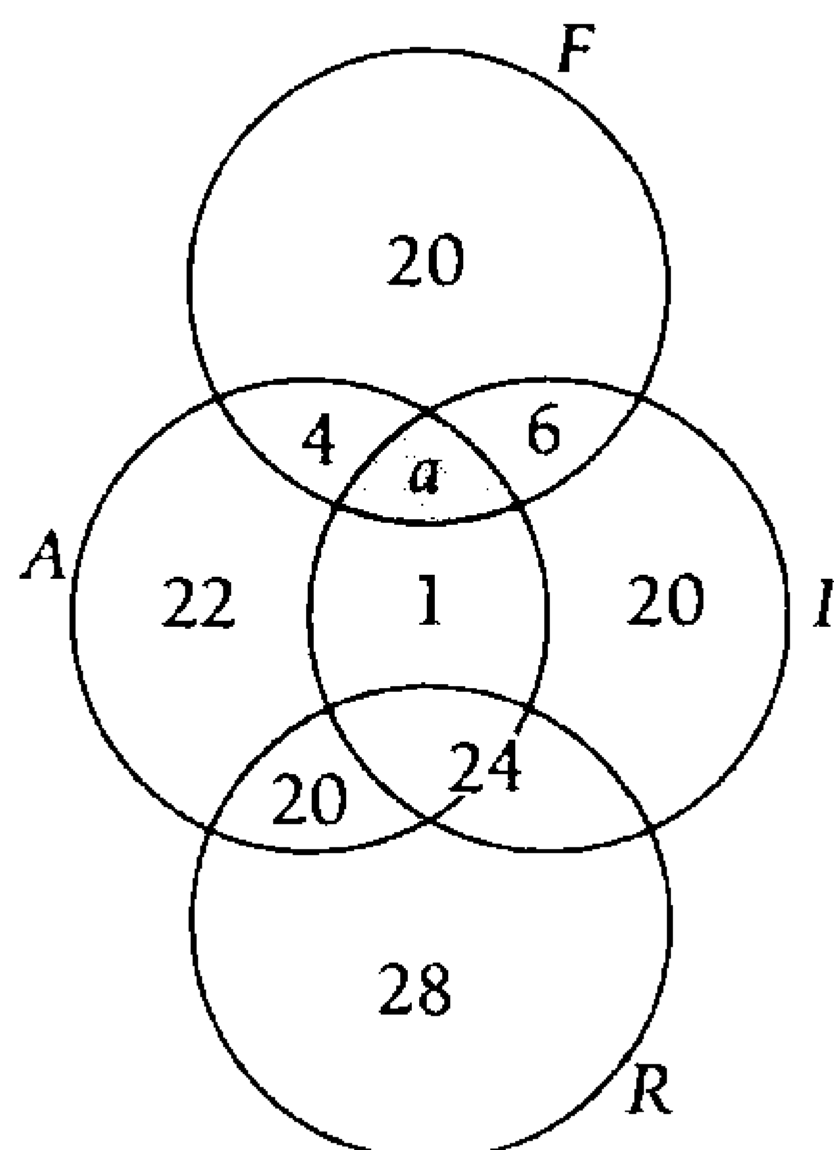
A) 4 B) 5 C) 6
D) 10 E) 8

Resolución

Del enunciado se tiene que

$F \cap R = \phi$

Luego, graficamos



Totalizando, tenemos

$n(U) = 145 + a = 150$

$\rightarrow \; a = 5$

Por lo tanto, 5 personas estudian A, I y F.

Clave B

PROBLEMA N.° 49

Se tienen tres conjuntos finitos: A, B y C para definirse la operación $A * B = A^C \Delta B$.

$n(U) = 60$

$n(A * B) = 36$

$n(A \cap B \cap C') = 6$

$n(C - (A \cup B)) = 12$

$n(B * C) = 30$

$n((A \cup B)') = 20$

$n((B \cap C) - A) = 4$

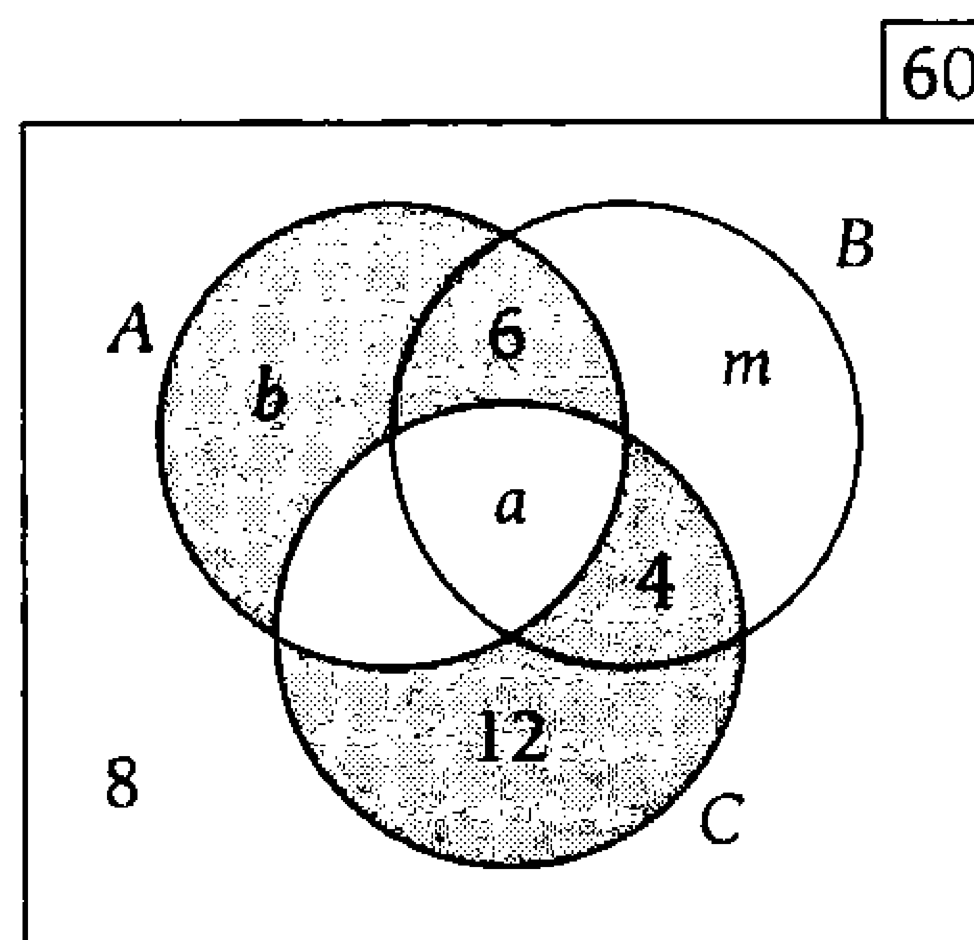
Halle $n(C * A')$.

A) 30 B) 24 C) 32
D) 18 E) 28

Resolución

- $A * B = A^C \Delta B$

  $A * B = (A \Delta B)^C$



- $n(A * B) = 36$

  $n(A \Delta B)^C = 36$

  $6 + a + 12 + 8 = 36$

  $a = 10$

- $n(B * C) = 30$

  $n[(B \Delta C)^C] = 30$

  $4 + \underset{\substack{\downarrow \\ 10}}{a} + b + 8 = 30$

  $b = 8$

Nos piden

$n(C^C * A^C) = n[(C^C \Delta A^C)^C]$

$n(C^C * A^C) = n[(C \Delta A)^C]$

$n(C^C * A^C) = \underbrace{n(U)}_{60} - \underbrace{n[(C \Delta A)]}_{(22+b)}$

$n(C^C * A^C) = 60 - 30$

$\therefore \; n(C^C * A^C) = 30$

Clave A

PROBLEMA N.° 50

De un total de 100 personas, hay médicos, ingenieros y diseñadores, pero cada persona tiene una sola profesión.

I. Seis son médicos que hablan español.
II. Veinte que hablan inglés no son diseñadores.
III. Cuatro son ingenieros que hablan español.
IV. Veinticuatro son diseñadores, pero no hablan español ni inglés.
V. Cuarenta y uno no hablan español ni inglés.

¿Cuántos son diseñadores que hablan español o inglés, si todos hablan un sólo idioma?

A) 36 B) 29 C) 27
D) 24 E) 31

Resolución

Graficamos

	Médicos	**Ingenieros**	**Diseñadores**
español	6	4	a
inglés	20		
otros idiomas	•	•	•

suman 41

Totalizando, tenemos

$n(U)=a+6+4+20+41=100$

$\therefore\ a=29$

Clave B

PROBLEMA N.° 51

En una fiesta, se observa que la cantidad de hombres menores de edad que están bailando es el doble de la cantidad de mujeres adultas que bailan y usan lentes y, a la vez, es la mitad de adultos que no bailan, pero usan lentes; además, los hombres adultos que bailan exceden en 12 a las mujeres menores de edad que bailan y 19 son mujeres adultas que bailan y no usan lentes.

Halle cuántas personas menores de edad no bailan, si se sabe que el 30% de las personas que hay en total están bailando. Considere que el total de personas es 200, además, hay 2 personas adultas que no bailan y no usan lentes.

A) 128 B) 108 C) 110
D) 112 E) 64

Resolución

Distribuyendo los datos en el gráfico tenemos

varones | mujeres
bailan: $2a$, $n+12$, 19, a, n — 60
no bailan: b, $4a$, 2, c — 60
menores de edad | mayores de edad | menores de edad

- Si 60 personas bailan → 30 varones y 30 mujeres.

 varones son

 $30=2a+n+12$ (I)

 mujeres son

 $30=19+a+n$ (II)

 Resolvemos (I) y (II)

 $a=7\ \wedge\ n=4$

Nos piden $b+c$.

- Personas que no bailan

 $b+\underbrace{4a+2}_{30}+c=140$

 $\therefore\ b+c=110$

Clave C

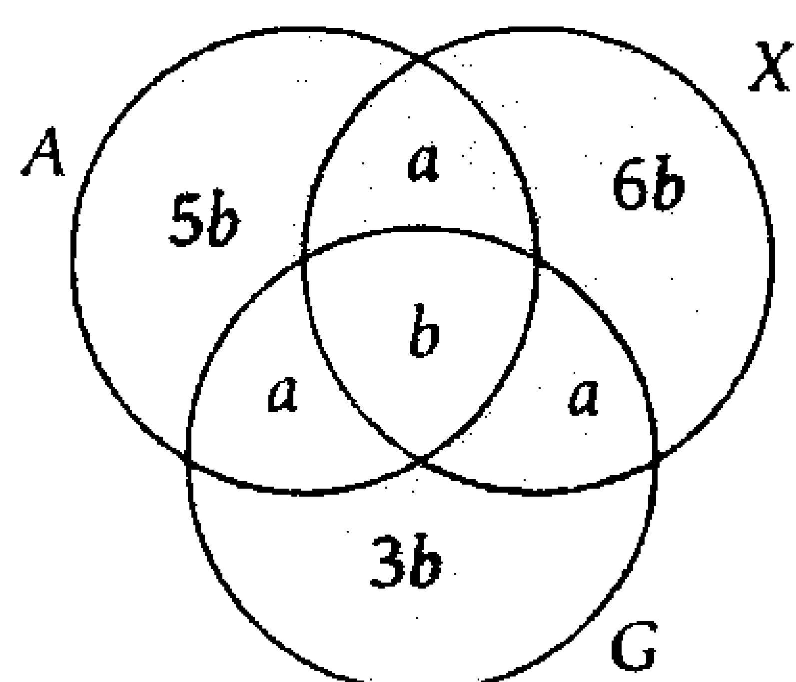
PROBLEMA N.° 52

De 39 alumnos que aprobaron al menos Aritmética (A), Álgebra (X) o Geometría (G), se sabe que los aprobados en solo dos cursos son unos tantos como los otros, los aprobados en los tres cursos son 1/6 de los que aprobaron solo X; 1/5 de los que aprobaron solo A; 1/3 de los que aprobaron solo G. ¿Cuántos alumnos hay que si aprobaron A, entonces no aprobaron G?

A) 30 B) 32 C) 34
D) 20 E) 22

Resolución

Graficamos



$n(U)=3a+15b=39$

$a+5b=13$

a	b	
8	1	No cumple
3	2	Sí cumple

Observación

Del enunciado, se tiene que **los aprobados en los 3 cursos** debe ser mayor que 1.

Piden

$$A\to\sim G\equiv\sim A\vee\sim G\equiv A'\cup G'\equiv(A\cap G)'$$

Entonces, del diagrama tenemos

$$n[(A\cap G)']=2a+14b$$

Luego

$$2a+14b=34$$

$a=3$, $b=2$

Por lo tanto, hay 34 alumnos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 53

Se tienen tres conjuntos, tales que

$A=\{a^2+b^2-5; -4a; 8\}$

$B=\{b-2c-3; a^2+4\}$

$C=\{a+b+c/A=B\}$

Además, $\{a; b; c\}\subset\mathbb{Z}$

Calcule C, si A y B son unitarios.

A) $\{3; 12\}$ B) $\{-3; 12\}$ C) $\{3; -12\}$
D) $\{-3; -12\}$ E) $\{3; 8\}$

Resolución

A y B son unitarios; entonces el único elemento de A es 8.

- $A=\{\underbrace{a^2+b^2-5}_{8}; \underbrace{-4a}_{8}; 8\}$

  Resolvemos

  $a=-2 \wedge b=\pm 3$

- $B=\{b-2c-3; \; a^2+4\}$, donde $\underbrace{(-2)^2+4}_{8}$

$b-2c-3=8$

Si $b=-3$, entonces $c=-7$

Si $b=3$, entonces $c=-4$

- $C=\{a+b+c/A=B\}$

  $(-2)+(-3)+(-7)=-12$ ó

  $(-2)+(3)+(-4)=-3$

  $\therefore\ C=\{-3, -12\}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 54

Una empresa de transporte urbano dispone de cierto número de combis, de las cuales 5 se encuentran en reparación. Se sabe lo siguiente:

- Cuarenta y dos circulan en las mañanas.
- Treinta y ocho en las tardes.
- Treinta en las noches.
- Veinte en las mañanas y tardes.
- Catorce en las tardes y noches.
- Dieciséis en las mañanas y noches.

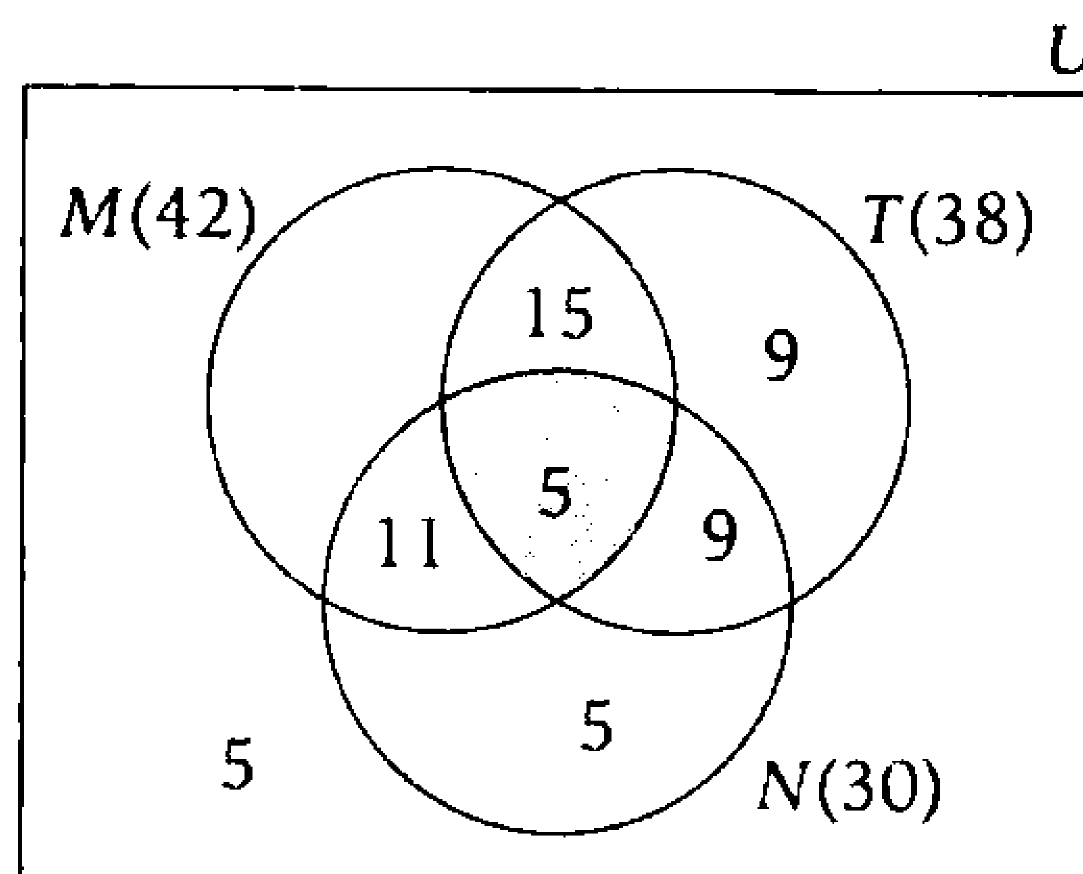
¿Cuántas son en total, si además se conoce que 5 trabajan todo el día (mañana, tarde y noche)?

A) 60 B) 55 C) 65 D) 68 E) 70

Resolución

Sean M: combis que circulan en las mañanas
T : combis que circulan en las tardes
N: combis que circulan en las noches

Graficamos



Totalizando, tenemos

$n(U)=n(M)+9+9+5+5$

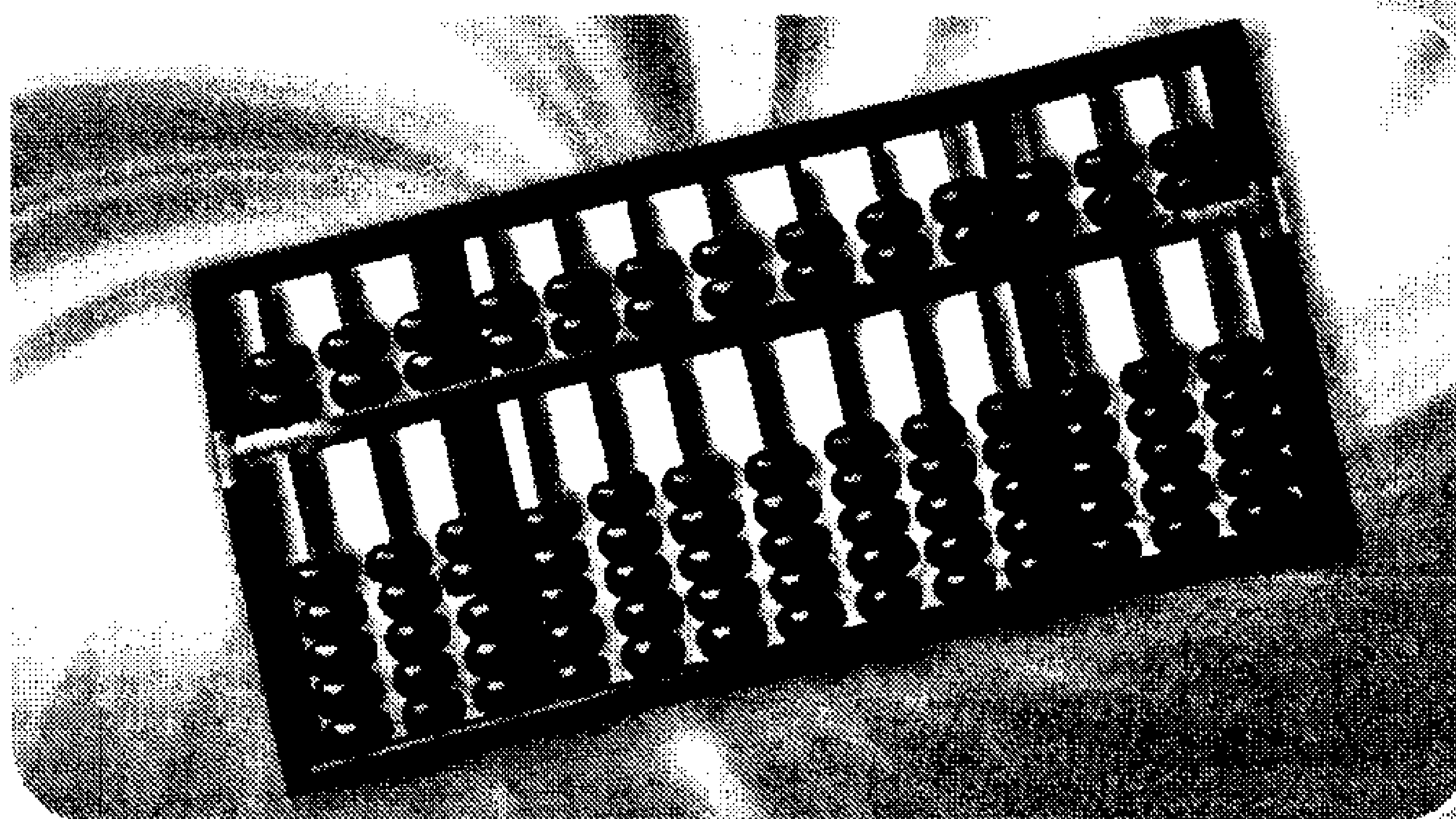
$\therefore\ n(U)=70$

Clave **E**

Capítulo

4

Numeración



El ingenioso método de expresar cada número posible utilizando un conjunto de diez símbolos (cada uno de ellos con un valor en su posición y un valor absoluto), surgió en la India. La idea parece hoy en día tan simple, y esa simplicidad radica en el modo en que facilitó el cálculo y colocó la aritmética en la primera posición entre las invenciones más útiles.

La numeración de posición hindú dispone de un cero, utiliza la base decimal y sus cifras son independientes las unas de las otras. Esta numeración de posición de la India fue transmitida al Occidente por los árabes de África del Norte y de España, árabes dichos "occidentales". Heredamos nuestras cifras actuales de las cifras llamadas gubar, que distinguen una forma de grafía específica de los árabes occidentales. Es por eso que solemos decir que escribimos en cifras árabes, ello por desconocimiento de su origen más lejano, de su origen hindú. En todo caso, es por medio de la grafía gubar de los árabes occidentales, habitantes de Córdoba, que las cifras hindúes llegaron al Occidente. Entonces, debemos hablar de los números indoarábigos, universalmente aceptados.

Capítulo 4

Numeración

PROBLEMA N.° 1

Si $\overline{abab}_{(n)}=221$, halle el número de sistemas de numeración en los que $(a+b+n)$ se exprese como un numeral de dos cifras.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 8 E) 11

Resolución

Descomponiendo por bloque:

$\overline{abab}_{(n)}=221$

$\overline{ab}_{(n)}\cdot n^2+\overline{ab}_{(n)}=221$

$\overline{ab}_{(n)}(n^2+1)=13\times 17$

- $n^2+1=17 \rightarrow n=4$
- $\overline{ab}_{(4)}=13$

$\overline{ab}_{(4)}=31_{(4)} \rightarrow a=3;\ b=1$

Se quiere expresar $a+b+n=8$, con 2 cifras

$8=\overline{xy}_{(K)}$

$10_{(K)}\leq\overline{xy}_{(K)}<100_{(K)}$

$K\leq 8<K^2$

$K\leq 8 \wedge 8<K^2$

$2{,}8<K$

$K\in\underbrace{\{3;4;5;6;7;8\}}_{\text{6 sistemas de numeración}}$

Clave C

PROBLEMA N.° 2

Si $\overline{ab0}_{(\overline{bc})}=2329$

además, $\overline{dd}_{\overline{1d}_{\overline{1d}_{\ddots_{\overline{1d}}}}}$ (d veces) $=\overline{c(b+3)(a-1)}$,

calcule $a+b+c+d$.

A) 13 B) 18 C) 25
D) 29 E) 33

Resolución

Como $\overline{ab0}_{(\overline{bc})}=2329$

$\overline{ab}_{(\overline{bc})}\cdot\overline{bc}=137\times 17$

$\rightarrow \overline{bc}=17 \wedge \overline{ab}_{(17)}=137=81_{(17)}$

$a=8,\ b=1,\ c=7$

Luego $\overline{dd}_{\overline{1d}_{\overline{1d}_{\ddots_{\overline{1d}}}}}$ (d veces) $=747$

Por propiedad

$\overline{1d}_{\overline{1d}_{\ddots_{\overline{1d}}}}$ ($(d-1)$ veces) $=10+(d-1)d$

Entonces $\overline{dd}_{[10+(d-1)d]}=747$

Descomponemos polinómicamente y operamos

$d(d^2-d+11)=747=3\times 3\times 83 \rightarrow d=9$

$\therefore\ a+b+c+d=25$

Clave C

PROBLEMA N.° 3

Si $\overline{ab5}_{(b-1)5}=\overline{c(b-1)(2b+4)(2b+1)}$, calcule $a+b+c$.

A) 8 B) 11 C) 15
D) 19 E) 23

Resolución

- $(b-1)$ es primera cifra $(b>1)$
- $2b+4<10$
  $b<3$
  entonces $b=2$

Tenemos
$\overline{a25}_{15}=\overline{c185}$; $(a<15)$

Por descomposición polinómica
$a\times 15^2+2\times 15+5=c\times 10^3+185$

$9a=\underbrace{40c+6}_{\dots 6}$
$\downarrow$
4
14

Si $a=4$, se obtiene $c=\dfrac{3}{4}$, sería fracción; cumple $a=14 \wedge c=3$

$\therefore$ $a+b+c=19$

Clave **D**

Resolución

De los datos:

- $\overline{a\left(\frac{e}{3}\right)n}_{(9)}=\overline{(2c+1)aa}_{(7)}$
- $\overline{5e7}_{(n)}=\overline{\left(\frac{c}{2}\right)4c3}_{(e)}$

$7<n<9$
$\downarrow$
8

$4<e<n \wedge \left(\frac{e}{3}\right)$ es una cifra
$\downarrow$ (n)
8

$\rightarrow$ $e=6$

$0<2c+1<7 \wedge \left(\frac{c}{2}\right)>0$

$\rightarrow$ $c=2$

Reemplazando en la primera igualdad
$\overline{a28}_{(9)}=\overline{5aa}_{(7)}$

Descomponemos polinómicamente
$81a+26=245+8a$
$73a=219$
$\downarrow$
3

$\therefore$ $a^2+1=10$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

Calcule a^2+1, si se cumple lo siguiente:

- $\overline{a\left(\frac{e}{3}\right)n}_{(9)}=\overline{(2c+1)aa}_{(7)}$
- $\overline{5e7}_{(n)}=\overline{\left(\frac{c}{2}\right)4c3}_{(e)}$

A) 26 B) 10 C) 37
D) 17 E) 5

PROBLEMA N.° 5

A un número de tres cifras se le suma una unidad a cada una de sus cifras y queda expresado en el sistema heptanario. Calcule la suma de todos los números de tres cifras diferentes que se pueden formar con las cifras del mayor número inicial.

A) 1234 B) 1572 C) 1846
D) 1667 E) 1776

Resolución

Del dato:

$$\underbrace{\overline{abc}}_{\substack{\text{es}\\ \text{máximo}}} = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)}_{(7)}$$

$$a\cdot 10^2+b\cdot 10+\underbrace{c=(a+1)\cdot 7^2+(b+1)\cdot 7+c}_{\text{se elimina}}+1$$

Si c se elimina de la ecuación, entonces cumple para todo valor tal que $c+1$ sea cifra de base 7.

$$c+1<7 \rightarrow c<6$$

Luego de descomponer y reducir

$$17a+b=19 \wedge c\in\{0;1;2;3;4;5\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

1 2 $\qquad c=5$(máximo valor de c)

Los números de 3 cifras diferentes que se forman con: $a=1$; $b=2$; $c=5$, son

1 2 5
1 5 2
2 1 5
2 5 1
5 1 2
5 2 1

suman 1776

Clave **E**

PROBLEMA N.° 6

Si $\overline{7a1}_{(n)}=\overline{60b}_{(9)}$, halle $(a+b)$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Del dato:

$$\overset{+}{\overline{7a1}_{(n)}}=\overline{60b}_{(9)}$$

Entonces $7<n<9$

$\downarrow$

8

Descomponiendo polinómicamente tenemos

$$449+8a=486+b$$

$$8a=37+b$$

$\downarrow$ $\downarrow$

5 3

6 11 no cumple ($b<9$)

$\therefore\ a+b=8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Dado que $\overline{aaaa}_{(5)}=\overline{bc8}$, halle $(a+b+c)$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Resolución

Sea

$$\overline{aaaa}_{(5)}=\overline{bc8} \quad ; \quad (a<5)$$

$$a\times 5^3+a\times 5^2+a\times 5+a=\overline{bc8}$$

$$\underbrace{156}_{..6}\times \underset{3}{a}=\underbrace{\overline{bc8}}_{...8}$$

por la última cifra se observa que **6** multiplicado por a termina en cifra 8, a es menor que la base 5; entonces, el único valor posible para a es 3.

$\underline{a=3}$ $\quad 156\times 3=468$

$\underline{b=4} \wedge \underline{c=6}$

$\therefore\ a+b+c=13$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Determine $(m+n+b+c)$, si $\overline{mn0}_{(\overline{bc})}=1073$.

A) 30 B) 22 C) 24
D) 20 E) 18

Resolución

Del dato:

$\overline{mn0}_{(\overline{bc})}=1073$

$\overline{mn}_{(\overline{bc})}\cdot\overline{bc}=37\times 29$

$\overline{mn}_{(29)}=37=18_{(29)}$

$b=2,\ c=9,\ m=1,\ n=8$

$\therefore\ m+n+b+c=20$

Clave D

PROBLEMA N.° 9

Halle n, si $\overline{nn}_{\overline{1n}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1n}_{\overline{1n}}}}}}=747$ (n números)

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

Observación

$\overline{1n}_{\overline{1n}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1n}_{(10)}}}}}$ ($n-1$ números) $=\underbrace{n+n+\ldots+n}_{(n-1)\text{ veces}}+10$

$=n(n-1)+10$

Sea $\overline{nn}_{\overline{1n}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1n}_{\overline{1n}}}}}}=747$ (n números)

Por propiedad: $n(n-1)+10$

Entonces

$\overline{nn}_{[n(n-1)+10]}=747$

$n[n(n-1)+10]+n=747$

$n\times[n(n-1)+11]=9\times 83$

$\therefore\ n=9$

Clave C

PROBLEMA N.° 10

Si $\overline{abc}_{[\overline{bc}_{(4)}]}=\overline{a0b}_{(12)}$, calcule $(a+b+c)$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 5 E) 7

Resolución

Sea $\overset{+}{\overline{abc}}[\overline{bc}_{(4)}]=\overline{a0b}_{(12)}$

Entonces $\overline{bc}_{(4)}<12$

Si $\overline{bc}_{(4)}=10$, descomponiendo polinómicamente tenemos

$\underbrace{9b+c}_{\substack{\text{máximo}\\30}}=\underbrace{44a}_{\substack{\text{mínimo}\\44}}$ no cumple

Entonces

$\overline{bc}_{(4)}=11=23_{(4)}$; $b=2\wedge c=3$

$\overline{a23}_{(11)}=\overline{a02}_{(12)}$

Descomponiendo polinómicamente

$121a+25=144a+2$

$23a=23$

$\downarrow$

1

$\therefore\ a+b+c=6$

Clave B

PROBLEMA N.° 11

Se cumple que $\overline{9ab}_{(K)}=213312_{(n)}$, además, $n=\sqrt{K}$.
Calcule $a+b+n+K$.

A) 37 B) 27
C) 41
D) 52 E) 31

Resolución

Como $n=\sqrt{K} \rightarrow n^2=K$
tenemos de base n^2 a base n

$$\overline{9ab}_{(n^2)}=\underbrace{21}\underbrace{33}\underbrace{12}_{(n)}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$9 \quad a \quad b$$

Por cambio de base especial

$21_n=9;\ \ 33_n=a;\ \ 12_{(n)}=b$

Resolvemos

- $21_{(n)}= \rightarrow 2n+1=9$
  $n=4$
- $33_{(n)}=a \rightarrow 3n+3=a$
  $\downarrow$
  4
  $15=a$
- $12_{(n)}=b \rightarrow 1n+2=b$
  $\downarrow$
  4
  $6=b$

$n=4 \wedge a=15 \wedge b=6$

$K=4^2 \rightarrow K=16$

$\therefore\ a+b+n+K=41$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

Si se sabe que $\overline{(2a)bad}_{(5)}=\overline{7ad}_{(9)}$, calcule la suma de las bases en las cuales $\overline{ab(a+b)a}$ se escribe con cuatro cifras.

A) 65 B) 52 C) 48
D) 70 E) 56

Resolución

Del enunciado $\overline{(2a)bad}_{(5)}=\overline{7ad}_{(9)}$
vemos que

$0<(2a)<5$
$\downarrow$
1
2

Descomponemos polinómicamente y operamos:

$$\overbrace{246a}^{\text{par}}+\overbrace{25b}^{\text{impar}}=567$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$2 \qquad 3$$
$$\underbrace{\ldots 2} \quad \underbrace{\ldots 5}$$

Recuerda

Si el numeral A escrito en base n tiene K cifras, se cumple
$n^{K-1} \leq A < n^K$

Luego
$\overline{ab(a+b)a}=2352$

Se escribe con 4 cifras en base n
$n^3 \leq 2352 < n^4$

Cumplen n: 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13

Por lo tanto, la suma de las bases es 70.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Si $\overline{abab}_{(4)}=\overline{7n}_{(16)}$,
entonces $a+b+n=11$.

II. Si $\overline{dd0}_{(2)}=\overline{mm}_{(K)}$,
entonces $m+K+d=7$.

III. Si $20_{(K+1)}=14_{(K+2)}=101_{(p)}=1010_{(q)}$,
entonces $K+p+q=9$.

A) VFV B) VVF C) FVV
D) FVF E) VVV

Resolución

I. Verdadero

$\underbrace{\overline{abab}}_{}{}_{(4)}=\overline{7n}_{(16)}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$4^1 \quad 4^2$

$\overline{ab}_{(4)}=7 \wedge \underbrace{\overline{ab}_{(4)}}=n$

$\downarrow\downarrow \quad 7$

$13_{(4)} \quad 7 = n$

$a=1;\ b=3;\ n=7$

entonces, $a+b+n=11$

II. Verdadero

$\overline{dd0}_{(2)}=\overline{mm}_K \left\} \begin{array}{l} d<2 \rightarrow d=1 \\ m<K \end{array}\right.$

$110_{(2)}=mK+m$

$6=m\underbrace{(K+1)}$

$\downarrow \quad \downarrow$

2 3 no cumple
1 6 sí cumple

$m=1 \wedge K=5$

entonces, $m+K+d=7$

III. Verdadero

$20_{(K+1)}=14_{(K+2)}=101_{(p)}=1010_{(q)}$

Por descomposición polinómica

$$2(K+1)=K+2+4=p^2+1=q^3+q$$

- $2K+2=K+6 \rightarrow K=4$
- $4+6=p^2+1$
  $9=p^2 \rightarrow p=3$
- $10=q^3+q \rightarrow q=2$
  $K=4 \wedge p=3 \wedge q=2$
  entonces $K+p+q=9$

Clave E

PROBLEMA N.° 14

Si se cumple que $\overline{abb}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(n)}}}=\overline{9b}_{(11)}$,

calcule N en el sistema decimal.

$N = \overline{1b}_{\overline{1b}_{\overline{1b}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1b}_{(\overline{ab}_{(n)})}}}}}}$ ($\overline{ab0}$ veces)

A) 247 B) 356 C) 472
D) 387 E) 249

Resolución

En $\overline{abb}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(n)}}}=\overline{9b}_{(11)}$

Hacemos $\overline{ab}_{\overline{ab}_{(n)}}=K$

$\overline{abb}_{(K)}=\overline{9b}_{(11)}$

$aK^2+bK+b=99+b$

$\underline{K}(aK+b)=\underline{3\times3}\times11;\ a \text{ y } b<K$

9

1 2

$\rightarrow K=9;\ a=1 \wedge b=2$

Luego

$$\overline{ab}_{\overline{ab}_{(n)}} = 12_{\overline{ab}_{(n)}} = 9 = 12_{(7)} \rightarrow \overline{ab}_{(n)} = 7$$

Reemplazamos en N

$$N = \underbrace{12_{12_{12_{\ddots_{12_{(7)}}}}}}_{120 \text{ veces}} = 7 + 120(2) = 247$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Si $\overline{3ab}_{(c)} = \overline{2ba}_{(5)}$, calcule $(a+b+c)^2$.

A) 16 B) 25 C) 36
D) 49 E) 81

Resolución

Comparamos los numerales

$$\overset{+}{\overline{3ab}}_{\underset{-}{(c)}} = \overset{-}{\overline{2ba}}_{\underset{+}{(5)}}$$

Luego

$3 < c < 5 \rightarrow c = 4$

$\overline{3ab}_{(4)} = \overline{2ba}_{(5)}$ $\quad \begin{pmatrix} a < 4 \\ b < 4 \end{pmatrix}$

$3 \cdot 4^2 + a \cdot 4 + b = 2 \cdot 5^2 + b \cdot 5 + a$

$3a = 4b + 2$ $\quad a$ es par y $a < 4$

Si $3a$ es par, entonces a es par menor que 4, puede ser 0 ó 2, pero en la ecuación $a=0$ no puede ser; solo cumple para $a=2$.

$a = 2 \wedge b = 1 \rightarrow (a+b+c)^2 = 7^2$

Por lo tanto, la respuesta es 49.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

El menor numeral impar del sistema senario, cuya suma de cifras es 33, se expresa en el sistema decimal como $\overline{abcdef}$; además

$$\overline{ab}_{\overline{ac}_{\overline{ad}_{\overline{ae}_{\overline{af}_{(8)}}}}} = \overline{ng}_{\overline{(n+1)g}_{\overline{(n+2)g}_{(n+3)}}} + 1$$

Halle $n+g+a$.

A) 6 B) 4
C) 2
D) 5 E) 3

Resolución

Observación

Conociendo la suma de cifras de un numeral, hacemos que este sea el menor posible dándole cifras máximas y lo que falte para llegar a dicha suma será la primera cifra.

En este caso, $3555555_{(6)}$ es el menor numeral impar, cuya suma de cifras es 33.

Luego $3555555_{(6)} = \overline{abcdef}$

Propiedad

$$\underbrace{\overline{(m-1)(m-1)(m-1)\ldots(m-1)}_m}_{K \text{ cifras}} = m^K - 1$$

$$3 \times 6^6 + \underbrace{555555_{(6)}}_{6^6 - 1} = 186623 = \overline{abcdef}$$

Entonces

$a=1$; $b=8$; $c=6$; $d=6$; $e=2 \wedge f=3$

Reemplazando, tenemos:

$$18_{16_{16_{12_{13_{(8)}}}}}=\overline{ng}_{\overline{(n+1)g}_{\overline{(n+2)g}_{(n+3)}}}+1$$

Propiedad

$$8+(3+2+6+6+8)=\overline{ng}_{\overline{(n+1)g}_{\overline{(n+2)g}_{(n+3)}}}+1$$

$$32=\overline{ng}_{\overline{(n+1)g}_{\overline{(n+2)g}_{(n+3)}}}\text{, entonces: } n=1$$

$$32=\overline{1g}_{\overline{2g}_{\overline{3g}_{(4)}}}=\overline{1g}_{\overline{2g}_{(12+g)}}=\overline{1g}_{(24+3g)}$$

$$32=24+4g$$
$$\downarrow$$
$$2$$

$\therefore\ n+g+a=4$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

Si se cumple lo siguiente:

$\overline{(a-1)(b-5)c02cd}_{(m)}=\overline{d(b+2)(c+1)b}_{(n)}$

$\overline{m0}_{\overline{\left(\frac{n}{4}\right)0}_{(m+1)}}=\overline{pppp}_{(p+1)}$

$\overline{1x3y}_{(2p)}=\overline{ef2}_{(5)}$; halle $a+b+c+d$.

A) 10 B) 12 C) 13

D) 15 E) 16

Resolución

Tenemos:

- $\overset{+}{\overline{1x3y}}_{\underset{-}{(2p)}}=\overset{-}{\overline{ef2}}_{\underset{+}{(5)}}$

$3 < 2p < 5$; cumple $p=2$

Observación

$\overline{p0}_{\overline{q0}_{(r)}}=p\times q\times r$

- $\overline{m0}_{\overline{\left(\frac{n}{4}\right)0}_{(m+1)}}=\overline{pppp}_{(p+1)}$

n es $\overset{\circ}{4}$ $\qquad \frac{n}{4}<(m+1)$

Reemplazando $p=2$

$$m\times\left(\frac{n}{4}\right)\times(m+1)=2222_{(3)}$$

$$m\times\frac{n}{4}\times(m+1)=3^4-1$$

$$n\times m\times\underbrace{(m+1)}=4\times 80$$

$\downarrow\ \downarrow$

16 4 5

$m=4 \quad n=16$

- $\underbrace{\overline{(a-1)(b-5)c02cd}}_{(m)}=\overline{d(b+2)(c+1)b}_{(n)}$

$m \to 4^1$, $n \to 4^2$

base 4^1	$(a-1)$	$(b-5)c$	02	$cd_{(4)}$
base 4^2	d	$(b+2)$	$(c+1)$	$b_{(4)2}$

Resultando

$\underbrace{d=a-1}_{(I)}\wedge\underbrace{b+2=\overline{(b-5)c}_{(4)}}_{(II)}\wedge\underbrace{c+1=02_{(4)}}_{(III)}\wedge\underbrace{b=\overline{cd}_{(4)}}_{(IV)}$

Resolvemos

III: $c+1=2 \ \rightarrow\ c=1$

II: $b+2=\overline{(b-5)1}_{(4)}$

$b+2=4b-20+1 \ \rightarrow\ b=7$

IV: $7=\overline{1d}_{(4)}$

$7=4+d \ \rightarrow\ d=3$

I: $3=a-1 \ \rightarrow\ a=4$

Luego, $c=1$; $b=7$; $d=3$; $a=4$

$\therefore\ a+b+c+d=15$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

Calcule K si se sabe que en la base 12 existen 6480 numerales de K cifras, tales que todas sus cifras son pares.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

Resolución

Del dato:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square\ \cdots\ \square}_{K\text{ cifras}}{}_{(12)}$$

↓	↓	↓		↓
2	0	0		0
4	2	2		2
6	4	4		4
8	6	6		6
(10)	8	8		8
	(10)	(10)		(10)
5 ×	6 ×	6 ×	...×	6 =6480

$5\cdot 6^{K-1}=6480$; $6^{K-1}=1296=6^4$

$\rightarrow K-1=4$

$\therefore\ K=5$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Convierta el número

$$\underbrace{\overline{(n-1)\,10\,(n-1)\,10\ldots}_{(n+1)}}_{78\text{ cifras}}$$

al sistema de base $(n+1)^3$ y dé como respuesta la $\overline{MG}$ de las cifras del número obtenido.

A) $n^2(n+1)$ B) 2^n C) n^{2+1}
D) 2^{n+1} E) 2^{n-1}

Resolución

Por cambio de base especial, cada bloque de tres cifras de base $(n+1)$ será una cifra en base $(n+1)^3$.

	78 cifras				
Base $n+1$	$(n-1)10$	...	$(n-1)10$	$(n-1)10$	$(n+1)$
Base $(n+1)^3$	a	...	a	a	$(n+1)^3$

$$\frac{78}{3}=26\text{ cifras}$$

$a=\overline{(n-1)10}_{(n+1)}$

$a=(n-1)(n+1)^2+(n+1)$

$a=n^2(n+1)$

Nos piden la $\overline{MG}$ de las 26 cifras iguales a a.

$$\overline{MG}=\sqrt[26]{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{26\text{ veces}}}=\sqrt[26]{a^{26}}$$

$\overline{MG}=a$

$\therefore\ \overline{MG}=n^2(n+1)$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 20

Convierta el mayor numeral de tres cifras diferentes de base $(n+1)$ a base $(n-1)$. Dé como respuesta el producto de cifras del numeral obtenido si $n>12$.

A) 164 B) 196 C) 229
D) 190 E) 198

Resolución

$\overline{n(n-1)(n-2)}_{(n+1)}$ es el mayor numeral de 3 cifras diferentes en base $(n+1)$.

Descomponemos polinómicamente

$n(n+1)^2+(n-1)(n+1)+(n-2)$

n^3+3n^2+2n-3

Ahora lo llevamos a base $(n-1)$; $(n > 12)$

$$
\begin{array}{l|l}
n^3+3n^2+2n-3 & n-1 \\
\hline
\quad (3) \qquad n^2+4n+6 & n-1 \\
\qquad\qquad (11) \qquad n+5 & n-1 \\
\qquad\qquad\qquad (6) & (1)
\end{array}
$$

$\overline{n(n-1)(n-2)}_{(n+1)}=16(11)3_{(n-1)}$

Por lo tanto, el producto de cifras es

$1\times6\times11\times3=198$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

Calcule el mayor número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, tal que $5\overline{ab}+d=\overline{cd}$ y, además, que sea igual al producto de dos números consecutivos.
Dé como respuesta la suma de cifras de dicho número.

A) 19 B) 17 C) 20
D) 23 E) 21

Resolución

Tenemos:

- $5\cdot\overline{ab}+d=\overline{cd}$

 $5\cdot\overline{ab}+\not{d}=10c+\not{d}$

$\underbrace{\overline{ab}}=2c \qquad (c < 10)$

$\overline{ab}$	c	
18	9	→ (máximo)
16	8	
14	7	
12	6	
10	5	

De las posibles soluciones, tomamos la máxima.

- $\overline{abcd}$ es el mayor número que cumple.

$\underbrace{\overline{ab}}\,\overline{cd}=K\cdot(K+1)$

máximo 18 9

$\overline{189d}=K\underbrace{(K+1)}$; $(\sqrt{1890}\simeq43)$

$d=2$, $K(K+1)=43\times44$

$\therefore\ a+b+c+d=20$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Calcule un número tal que al convertirlo a dos sistemas de numeración de bases pares consecutivas se representa como $\overline{46a}$ y $\overline{12a1}$, si la suma de la base menor y la cifra a es menor que 12.

A) 301 B) 303 C) 305
D) 307 E) 310

Resolución

Sea n par, tenemos

$A=\overline{46a}_{(n+2)}=\overline{12a1}_{(n)}$

sabemos: $6 < (n+2) \wedge n+a < 12$

$n > 4$

↓

6

8

10

Analizamos en A:

- $n=8$: $\overline{46a}=\overline{12a1}_{(8)}=1\times 8^3+\ldots$ no cumple

- $n=10$: $\overline{46a}_{(12)}=\overline{12a1}$ no cumple

  $4\times 12^2+6\times 12+a < \overline{12a1}$

Entonces $n=6$

$\overline{46a}_{(8)}=\overline{12a1}_{(6)}$

Descomponiendo polinómicamente tenemos

$304+a=289+6a$

$5a=15$

↓

3

$\therefore\ A=463_{(8)}=307$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 23

Si $\overline{acaabcaa}_{(n)}=\overline{d(12)(\overline{cc})}_{(x)}$ y, además, x es la cantidad de numerales de tres cifras impares de la base $2n$; halle $a+b+c+d+x$.

A) 30
B) 32
C) 35
D) 27
E) 28

Resolución

Siendo x la cantidad de números de 3 cifras impares de base $2n$.

$\overline{p\quad q\quad r}_{(2n)}$

p	q	r
↓	↓	↓
1	1	1
3	3	3
5	5	5
⋮	⋮	⋮
$(2n-1)$	$(2n-1)$	$(2n-1)$
n ·	n ·	n $=n^3$ números

$\rightarrow\ x=n^3$

Base n	$\overline{ac}$	$\overline{aab}$	$\overline{caa}_{(n)}$
Base $x=n^3$	d	(12)	$(\overline{cc})_{(n^3)}$

- $\overline{aab}_{(n)}=12$

  $100_{(n)} \leq \overline{aab}_{(n)} < 1000_{(n)}$

  $n^2 \leq 12 < n^3$
  $n=3$

  $\rightarrow\ \overline{aab}_{(3)}=12$

  $\overline{aab}_{(3)}=110_{(3)}$

  $a=1\ \wedge\ b=0$

- $\overline{caa}_{(n)}=\overline{cc}$

  $\overline{c11}_{(3)}=\overline{cc}\ \rightarrow\ c\times 3^2+1\times 3+1=c\times 10+c$

  $c=2$

- $\overline{ac}_{(n)}=d$

  $12_{(3)}=d\ \rightarrow\ 1\times 3+2=d$

  $d=5$

$\therefore\ a+b+c+d+x=35$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

¿En cuántos sistemas de numeración $\overline{aba}_{(5)}$ se representa con tres cifras, si en base b se representa como $\overline{n3n}$? Dé como respuesta la suma de dichas bases.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 19 E) 13

Resolución

Se tiene: $\overline{aba}_{(5)}=\overline{n3n}_{(b)}$

Vemos que

$$3 < b < 5$$
$$\downarrow$$
$$4$$

$$\overline{a4a}_{(5)}=\overline{n3n}_{(4)}$$

Descomponiendo polinómicamente tenemos

$$26a+20=17n+12$$

$$\overbrace{26a+8}^{\text{Par}}=17n;\ n \text{ es par } \wedge\ 0<n<4$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$1 \qquad 2$$

Luego $\overline{aba}_{(5)}=141_{(5)}=46$

en base K tiene 3 cifras

$$K^2 \leq 46 < K^3$$

cumplen

$$K: 4,5 \text{ y } 6$$

Por lo tanto, la suma de las bases es 15.

Clave B

PROBLEMA N.° 25

Un médico observa que la cantidad de pacientes que vienen a su consultorio se distribuye de la siguiente manera: algunas personas vienen una vez, otras 4 veces, algunas 16 veces y así sucesivamente; además, como máximo, tres pacientes han venido la misma cantidad de veces. Si cada paciente visita una sola vez en cada cita, halle cuántos pacientes hay. Considere que hubo en total 454 citas.

A) 3 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Cantidad de citas	Cantidad de pacientes (≤ 3)	Total de citas
1	a	a
4	b	$4b$
4^2	c	4^2c
4^3	d	4^3d
⋮	⋮	⋮
	Total	454

$$\underbrace{a+4b+4^2c+4^3d+\ldots}_{\substack{\text{Descomposición polinómica}\\ \text{de un numeral de base 4}}}=454$$

$$\overline{e\ d\ c\ b\ a}_{(4)}=454$$
$$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$$
$$1\,3\,0\,1\,2_{(4)}=454$$

Si $a=2$ <> 2 pacientes tuvieron una cita

Si $b=1$ <> 1 paciente tuvo dos citas

Si $d=3$ <> 3 pacientes tuvieron tres citas

Por lo tanto, la cantidad total de pacientes que hay es

$$a+b+c+d+e=7$$

Clave C

PROBLEMA N.° 26

Un numeral de tres cifras consecutivas crecientes de base 9 se expresa en base 8 con tres cifras, de las cuales la primera cifra es la central del numeral inicial.
¿Cuántos números cumplen con la condición?

A) 1 B) 3
C) 2
D) 5 E) 6

Resolución

Del dato:

$$\overline{n(n+1)(n+2)}_{(9)}=\overline{(n+1)ab}_{(8)}$$

Descomponemos polinómicamente

$$n\cdot 9^2+(n+1)9+(n+2)=(n+1)\cdot 8^2+\overline{ab}_{(8)}$$

Analizando tenemos

$$27n=53+\overline{ab}_{(8)}=\begin{cases}53+00_{(8)}=53 \text{ (mínimo)}\\ 53+77_{(8)}=116 \text{ (máximo)}\end{cases}$$

n ↓ 2, 3, 4

Por lo tanto, cumplen 3 números.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Si $\overline{a7b}_{\overline{1m}_{(5)}}=\overline{4pq}_{12_{(6)}}$,

además, $\overline{mnb}_{(7)}=\overline{nb0}$, halle $(a+p-q)$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Por dato:

- $\overline{a7b}_{\overline{1m}_{(5)}}=\overline{4pq}_{12_{(6)}}$ $(m<5)$

  $\overline{1m}_{(5)} \to 5+m$; $12_{(6)} \to 8$

  $$\overline{a7b}_{(5+m)}=\overline{4pq}_{(8)} \quad \text{(I)}$$

  $5+m>7$

  $m>2$

  $m\in\{3;4\}$

- $\overline{mnb}_{(7)}=\overline{nb0}$

  $$m\cdot 7^2+n\cdot 7+b=n\cdot 10^2+b\cdot 10$$

Resolvemos

$$m\cdot 7^2=3\times(31n+3b)$$

$$m\times 49=\overset{\circ}{3}$$

$$m=\overset{\circ}{3} \to m=3$$

Entonces

$$m=3 \wedge 49=31n+3b$$

n ↓ 1, b ↓ 6

En (I) reemplazamos $m=3$ y se observa que es la misma base, entonces

$$\overline{a76}_{(8)}=\overline{4pq}_{(8)}$$

$a=4,\ p=7,\ q=6$

$\therefore\ a+p-q=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

Se sabe que $\overline{ab4}_{\overline{ab}_{(n)}}=\overline{(\overline{ab}_n)4}_{(7)}$, además, a, b y n son diferentes entre sí.
Exprese $\overline{(a+b)(a+n)(b+n)}_{(n^2)}$ en base n e indique la suma de sus cifras.

A) 6 B) 8
C) 10
D) 12 E) 11

Resolución

En $\overline{ab4}_{\overline{ab}_{(n)}}=\overline{(\overline{ab}_{(n)})4}_{(7)}$; $a\neq b\neq n$

Hacemos $\overline{ab}_{(n)}=K$

Vemos que

$\overline{ab4}_{(K)}=\overline{K4}_{(7)}$

$4<K<7$
↓
5
6

Descomponemos polinómicamente

$aK^2+bK+4=7K+4$

$aK+b=7$

$K=5$ 1 2 → $5=12_{(n)}$; $n=3$ sí cumple
$K=6$ 1 1 → $a=b$ no cumple

Luego

$\overline{(a+b)(a+n)(b+n)}_{(n^2)}$ a base n

$345_{(9)}$ a base 3

De base $9=3^2$ a base 3^1
hacemos

$3=10_{(3)}$; $4=11_{(3)}$; $5=12_{(3)}$

Entonces

3	4	$5_{(9)}$
10	11	$12_{(3)}$

Por lo tanto, la suma de cifras es 6.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Si se tiene que
$\overline{a(a+2)(a-2)(a^2)}_{\overline{nm}_{\overline{nn}_{(b)}}}=\overline{c(b^2)b}_{(8)}$,
calcule $a+b+c+m+n$.

A) 8 B) 10
C) 12
D) 14 E) 18

Resolución

Del dato:

$\overline{a(a+2)(a-2)(a^2)}_{\overline{nm}_{\overline{nn}_{(b)}}}=\overline{c(b^2)b}_{(8)}$

- b es base $(b\geq 2)$
- $b^2<8$

} único valor $b=2$

- $0<n<b$

$0<n<2$ → $n=1$

$\overline{a(a+2)(a-2)(a^2)}_{\overline{1m}_{11_{2}}}=\overline{c42}_{(8)}$ (I)

($11_2 = 3$)

- $m<3$ → $m+3<3+3$

$m+3<6$

- $\underbrace{a^2 < \overline{1m}_{(3)}}_{a^2 < 3+m} \wedge \underbrace{a-2 \geq 0}_{a \geq 2}$

  $a^2 \geq 4$

  $\rightarrow\ 4 \leq \underbrace{a^2}_{2^2} < \underbrace{3+m}_{5} < 6$

  únicos valores $a=2 \wedge m=2$

En (I)

$\underbrace{2404_{12_{(3)}}}_{\text{cambiando de base}} = \overline{c42}_{(8)}$

$542_{(8)} = \overline{c42}_{(8)}$

$\rightarrow\ c=5$

$\therefore\ a+b+c+m+n=12$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Se cumple que $\overline{abcd}_{\overline{bc}_{\overline{bc}_{(n)}}} = \overline{1351d}_{(6)}$.

Calcule $a+b+c+n$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

En $\overline{abcd}_{\overline{bc}_{\overline{bc}_{(n)}}} = \overline{1351d}_{(6)}$

Hacemos:

$\overline{bc}_{\overline{bc}_{(n)}} = K$

$\overset{-}{\overline{abcd}_{(K)}} = \underset{+}{\overline{1351d}_{(6)}}$

Vemos que $K > 6$

Descomponemos polinómicamente

$\overline{abc0}_{(K)} + d = 1\times 6^4 + 3\times 6^3 + 5\times 6^2 + 1\times 6 + d$

$\overline{abc0}_{(K)} = 2130$

De donde

$a=2;\ b=1;\ c=3 \ \wedge\ K=10$

Reemplazamos en $\overline{bc}_{\overline{bc}_{(n)}} = K$

$13_{13_{(n)}} = 10$

$n+2(3)=10$
$\downarrow$
4

$\therefore\ a+b+c+n=10$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

Se sabe que $\overline{ecb}_{(9)} = \overline{1(e-1)(e^2-4)(e+1)}_{(2e)}$.
¿Cuántos números de nuestro sistema se pueden expresar con cuatro cifras en base b y con tres cifras en base c?

A) 150 B) 169 C) 160
D) 172 E) 180

Resolución

Del dato:

$$\overset{-}{\underset{+}{\overline{ecb}_{(9)}}} = \overset{+}{\underset{-}{\overline{1(e-1)(e^2-4)(e+1)}_{(2e)}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2e < 9 \ \rightarrow\ e \leq 4 \\ 0 \leq (e^2-4) < 2e \end{array}\right\} e=3$$

Reemplazando y cambiando de base tenemos

$\overline{3cb}_{(9)}=1254_{(6)}$

↓

$\overline{3cb}_{(9)}=387_{(9)}$

$\rightarrow c=8 \wedge b=7$

Los números N que tienen 4 cifras en base $b=7$ y tres cifras en base $c=8$.

$$1000_{(7)} \leq N < 10000_7 \;\wedge\; 100_8 \leq N < 1000_8$$

$$343 \leq N < 2401 \quad \wedge \quad 64 \leq N < 512$$

La intersección es $343 \leq N < 512$

$$\rightarrow N \in \underbrace{\{343; 344; 345; ...; 511\}}_{169 \text{ números}}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 32

El numeral 102110210110001 con base n se expresa en base n^3 y resulta que la suma de cifras excede en 46 unidades a la suma de cifras del número original.

¿En cuántos sistemas de numeración n^6 se expresa con cinco cifras?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) 8

Resolución

Expresamos $102110210110001_{(n)}$ en base n^3

De base n a base n^3:

A partir de la derecha, cada bloque de tres cifras se descompone polinómicamente, y el resultado es una cifra del numeral en base n^3.

102	110	210	110	$001_{(n)}$
(n^2+2)	(n^2+n)	$(2n^2+n)$	(n^2+n)	$1_{(n^3)}$

Sumamos las cifras

(suma de cifras del número original)

$$5n^2+3n+3=11+46$$

$$n(5n+3)=54=2\times3\times3\times3 \rightarrow n=3$$

Luego, $n^6=3^6=729$ lo expresamos en base K con 5 cifras

$$K^4 \leq 729 < K^5$$

Cumplen K : 4 y 5

Por lo tanto, cumplen 2 sistemas de numeración.

Clave B

PROBLEMA N.° 33

La cantidad de numerales que existen de la forma $\overline{2a(a+b)b}_{(8)}$ es $\overline{mn}_{(7)}$. ¿En cuántos sistemas de numeración par se puede expresar $\overline{mnm}$ como un numeral de tres cifras?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 10
E) 22

Resolución

- $\overline{2a(a+b)b}_{(8)}$

a	b		cantidad de números
0	0; 1; 2; ... ; 7	→	8
1	0; 1; 2; ... ; 6	→	7
2	0; 1; 2; ... ; 5	→	6 +
⋮			⋮
7	0	→	1
		total:	$\frac{8\cdot 9}{2}$

Cantidad de números:

$\frac{8\cdot 9}{2}=\overline{mn}_{(7)}$

$36=\overline{mn}_{(7)}$

$36=51_{(7)}$

$m=5 \wedge n=1$

- $\overline{mnm}=515$ se expresa como un numeral de 3 cifras en base par: K.

$515=\overline{xyz}_{(K)}$

$100_{(K)} \leq \overline{xyz}_{(K)} < 1000_{(K)}$

$K^2 \leq 515 < K^3$ (K es par)

$K < 23 \wedge 8 < K$

$K \in \underbrace{\{10; 12; ... ; 22\}}_{\text{7 bases pares}}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

Si $M=7\times 8^3-13\times 8^4+2\times 8^5+22$ se expresa como $\overline{aab0ccb}_{(4)}$, halle la suma de cifras al expresar $\overline{abc}_{(n)}$ en la base n^2.

Considere que $n > 4$.

A) $3n+1$ B) $2(n+2)$ C) $n(n+1)$
D) $2+n$ E) n^2-1

Resolución

Del dato:

$M=7\times 8^3-13\times 8^4+2\times 8^5+22$

$M=2(-13)700(22)_{(8)}=37026_{(8)}$ (llevando 2 en cada paréntesis)

Primero M a base 2

Observación

En el caso de que la cifra del numeral de base $8=2^3$ no genere un bloque de tres cifras en base 2, se completará con cero a la izquierda; excepto con la cifra de mayor orden.

Veamos $2=10_{(2)}$ → colocar 010

3	7	0	2	$6_{(8)}$
11	111	000	010	$110_{(2)}$

Ahora a la base 4

11	11	10	00	01	01	$10_{(2)}$
3	3	2	0	1	1	$2_{(4)}$

→ $\overline{aab0ccb}_{(4)}=3320112_{(4)}$

$a=3$; $b=2 \wedge c=1$

Luego: $\overline{abc}_{(n)}=321_{(n)}$ a base n^2; $n > 4$

3	$21_{(n)}$
3	$(2n+1)_{(n^2)}$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$2n+4=2(n+2)$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Si se cumple que

$\overline{\left(\frac{a}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right)}_{(7)}=\overline{ceef}_{(d)}=\overline{cef}_{(b)}$,

calcule $a+b+c+d$.

A) 25 B) 21
C) 24
D) 27 E) 30

Resolución

Se observa que:

- a contiene al 4; 2 y 3 $\wedge$ $\left(\frac{a}{2}\right)<7$

$a=\overset{\circ}{12}$ $\wedge$ $a<14$

$\rightarrow$ $a=12$

Reemplazamos

$\underbrace{364_{(7)}}_{193}=\overline{ceef}_{(d)}=\overline{cef}_{(b)}$

$d^3\leq\overline{ceef}_{(d)}<d^4$
$\downarrow$
$d^3\leq 193<d^4$ $\rightarrow$ $d\in\{4;5\}$

Cumple cuando $d=4$

$\rightarrow$ $193=3001_{(4)}$
$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$
$c\ e\ e\ f$

Obtenemos

$c=3$ $\wedge$ $e=0$ $\wedge$ $f=1$

$\rightarrow$ $193=301_{(b)}$

Luego

$193=3\cdot b^2+1$

$b=8$

$\therefore$ $a+b+c+d=27$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Se cumple que

$\overline{aab}_{(25)}=\overline{cdcd}_{(7)}$

Exprese $\overline{abcdabcdabcd}_{(8)}$ en el menor sistema de numeración y dé como respuesta la suma de cifras, si se sabe que $d-c=2$.

A) 10 B) 15
C) 12
D) 17 E) 18

Resolución

De los datos:

$a<8$; $b<8$; $c<7$; $d<7$

$\overline{aab}_{(25)}=\overline{cdcd}_{(7)}$

Descomponemos polinómicamente

$\underbrace{650a}_{...0}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{b}=50\times\overline{cd}_{(7)}$

$13\cdot a=\overline{cd}_{(7)}$,

Además, $d-c=2$; $d=c+2$ $\rightarrow$ $c<5$

$\overbrace{13a}^{\text{par}}=7c+d=\overbrace{8c+2}^{\text{par}}$
$\downarrow$ $\downarrow$
2 3 $\rightarrow$ $d=5$

Luego $\overline{abcdabcdabcd}_{(8)}$ a base 2

2	0	3	5	2	0	3	5	2	0	3	$5_{(8)}$
10	000	011	101	010	000	011	101	010	000	011	$101_{(2)}$

suma de cifras=5

Por lo tanto, la suma de cifras es

$3(5)=15$

Clave B

PROBLEMA N.° 37

Exprese $\overline{abcdef}_{(7)}$ en el sistema de base 49, si al restar b de a se obtiene 1 y, además, se cumple lo siguiente: $\overline{aba17}_{(8)}=\overline{12cdegff}_{(4)}$

Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 15
B) 18
C) 21
D) 32
E) 81

Resolución

De los datos:

- $a-b=1$
- Por ser de base $8=2^3$ a base $4=2^2$, agrupamos por bloques

$$\overline{a\,ba\,17}_{(8)}=\overline{12\,cde\,gff}_{(4)}$$
$$2^3 \qquad 2^2$$

$\rightarrow \underbrace{a=12_{(4)}}_{a=6} \wedge \overline{ba}_{(8)}=\overline{cde}_{(4)} \wedge 17_{(8)}=\overline{gff}_{(4)}$

Tenemos

$a=6$

$a-b=1$

Entonces

$a=6 \wedge b=5 \rightarrow 56_{(8)}=\overline{cde}_{(4)} \wedge 17_{(8)}=\overline{gff}_{(4)}$

$56_{(8)}=232_{(4)} \wedge 17_{(8)}=033_{(4)}$

$c=2;\ d=3;\ e=2;\ g=0;\ f=3$

Expresamos $\overline{abcdef}_{(7)}=652323_{(7)}$ en base 49

Base 7^1	6 5	2 3	$2\ 3_{(7)}$
Base 7^2	(65_7)	(23_7)	$(23_7)_{(49)}$
	(47)	(17)	$(17)_{(49)}$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$47+17+17=81$

Clave E

PROBLEMA N.° 38

Si $\overline{abca}_{\overline{ca}_{\overline{abb}_{(c)}}}=\overline{xcb}_{\overline{c(c+1)}_{(4)}}$,

calcule $(a+b+c+x)$.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 5
E) 10

Resolución

$$\overline{abca}_{\overline{ca}_{\overline{abb}_{(c)}}} = \overline{xcb}_{\overline{c(c+1)}_{(4)}}$$

Vemos que $c \geq 2 \ \wedge \ c+1 < 4 \ \rightarrow \ c=2$

Luego, hacemos $\overline{ca}_{\overline{abb}_{(c)}}=K$

Reemplazando, tenemos

$$\overline{abca}_{(K)} = \overline{xcb}_{(11)}$$

$$\rightarrow \ K=\overline{2a}_{\overline{abb}_{(2)}} < 11$$

Entonces $a=1; b=0 \ \rightarrow \ K=9$

$$1021_{(9)}=\overline{x20}_{(11)}$$

Descomponemos polinómicamente

$$\rightarrow \ 74\underline{8}=121x+2\underline{2}$$

$$\underbrace{6}_{...6}$$

$\therefore \ a+b+c+x=9$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Determine cuántos son los números de la forma $\overline{a(a+1)b(b-1)cd}$, tales que posean 2 ó 3 cifras pares (considere que el cero es par).

A) 1800 B) 3600 C) 5400 D) 4000 E) 6400

Resolución

Sea $\underbrace{\underbrace{a(a+1)}_{\text{una es par y la otra impar}} \quad \underbrace{b(b-1)}_{\text{una es par y la otra impar}}}_{\text{dos de las cuatro primeras cifras son pares y las otras dos son impares}}$

Entonces, de las 6 cifras: o dos son pares o tres son pares o cuatro son pares. La cantidad de casos en que hay 2 ó 3 cifras pares es

$$\left(\text{Total de números}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de números}\\ \text{con 4 cifras pares}\end{array}\right)$$

$a(a+1)$	$b(b-1)$	c	d		$a(a+1)$	$b(b-1)$	c	d
↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓
1	1	0	0		1	1	0	0
		1	1		2	2	2	2
2	2	2	2		3	3	4	4
3	3	3	3		⋮	⋮	6	6
⋮	⋮	⋮	⋮					
8	9	9	9		8	9	8	8
$(\bar{8}$ ×	$\bar{9}$ ×	$\overline{10}$ ×	$\overline{10})$	−	$(\bar{8}$ ×	$\bar{9}$ ×	$\bar{5}$ ×	$\bar{5})$

$= 7200 \qquad - \ 1800$

Por lo tanto, la cantidad de números es 7200−1800=5400.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

La primera cifra que se obtiene al representar el menor numeral del sistema quinario, cuya suma de cifras es $P=\overline{abc39}$, es n.

Además, se sabe que

$\overline{(m+2)100120m0}_{(K)}=\overline{(13a)bc}_{(K^n)}$ y

$13a+b+c=62$.

Halle la suma de cifras al expresar P en el sistema de base $(4K^m)$.

A) 30 B) 29
C) 27
D) 32 E) 28

Resolución

El menor numeral del sistema quinario, cuya suma de cifras es $P=\overline{abc39}$.

$$\underbrace{3444...4}_{\text{suma}=\overline{abc36}}{}_{(5)} \rightarrow n=3$$

Además

$$\overline{(m+2)100120m0}_{(K)}=\overline{(13a)bc}_{(K^3)}$$

$$13a+\overbrace{\underbrace{b+c}}^{\text{máximo}=18}=62 \; ; \; a, b \wedge c < 10$$

$\downarrow$

4 10

Entonces

$$\overline{(m+2)10}\;\vdots\;\overline{012}\;\vdots\;\overline{0m0}_{(K)}$$
$$\overline{[(m+2)K^2+K]}\;\vdots\;\overline{(K+2)}\;\vdots\;\overline{(mK)}_{(K^3)}$$

$b=K+2$; $c=mK$; $13a=(m+2)K^2+K=52$

$b+c=10$

Luego

$K(m+1)+2=10 \;\wedge\; K[(m+2)K+1]=52$

$\downarrow \; \downarrow$

4 1 sí cumple $\rightarrow$ $b=6 \wedge c=4$

8 0 no cumple

Ahora, expresamos

$P=46439$ en base $4K^m=4(4^1)=16$

$P=46439=(11)567_{(16)}$

Por lo tanto, la suma de cifras es 29.

Clave B

PROBLEMA N.° 41

Dado que existen $\overline{cd}$ números más de la forma $\overline{a(a-2)(b+1)b}_{(n)}$ que de la forma $\overline{(a+3)b(b-2)a}_{(n)}$, calcule la suma del máximo y mínimo valor de n.

A) 36 B) 49 C) 58
D) 64 E) 79

Resolución

Determinamos la cantidad de números de la forma

$\overline{a(a-2)(b+1)b}_{(n)}$		$\overline{(a+3)b(b-2)a}_{(n)}$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	0	2	0
3	1	3	1
4	2	4	2
⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$n-2$	$n-1$	$n-4$

$$\overline{(n-2)} \times \overline{(n-1)} - \overline{(n-2)} \times \overline{(n-3)} = \overline{cd}$$

$$n^2-3n+2-(n^2-5n+6)=\overline{cd}$$

$$2\times n = \underbrace{\overline{cd}}_{\text{par}}+4$$

	n	par
mínimo	7	10
	8	12
	9	14
	⋮	⋮
máximo	51	98

$\therefore\ n_{\text{mínimo}}+n_{\text{máximo}}=7+51=58$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Si existen 540 números de la siguiente forma:

$$\overline{(a+3)(3b)\left(\frac{n}{3}\right)(5c-d)(2b-1)(a-3)}_{(n)},$$

halle el mínimo valor de $a\times b\times n$.

A) 24 B) 50 C) 36
D) 45 E) 60

Resolución

En

$$\overline{(a+3)(3b)\left(\frac{n}{3}\right)(5c-d)(2b-1)(a-3)}_{(n)}$$

Analizamos

- $n\geq 2 \wedge \left(\frac{n}{3}\right)\in \mathbb{Z}_0^+$

  $\rightarrow\ n=3K;\ K\in\mathbb{Z}^+$

- $(a-3)\geq 0\ \wedge\ (a+3)<n$

  $\rightarrow\ a\geq 3\ \wedge\ a<n-3$

  $a:\ \underbrace{3;\ 4;\ 5;\ \ldots;\ (3K-4)}_{(3K-6)\text{ valores}}$

- $(2b-1)\geq 0\ \rightarrow\ b\geq\frac{1}{2};\ \ b\in\mathbb{Z}^+$

  $(3b)<n$

  $(3b)<3K\ \rightarrow\ b<K$

  $b:\ \underbrace{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ (K-1)}_{(K-1)\text{ valores}}$

- $(5c-d)$ puede tomar valores de 0 a $(n-1)$; es decir, $n=3K$ valores.

  Entonces, la cantidad de numerales es:

  $(3K-6)(K-1)(3K)=540$

  $(K-2)(K-1)K=60=3\times 4\times 5$

  $\rightarrow\ n=3K=3(5)=15$

$\therefore\ (a\times b\times n)_{\text{mínimo}}=45$

$\ \ a\downarrow\ \ b\downarrow$

$\ \ 3\ \ \ 1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 43

Dado el numeral

$M=\overline{(n+1)(n-1)(2n+3)}_{(n)};\quad (n>3).$

Al escribir correctamente se observa que el exceso de la suma de sus cifras sobre la base es 2. Halle el valor de d, si

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_d}}=\overline{1(d-3)}_{12_d}$$

Considere que M se expresa como $\overline{abc}$ en el sistema heptanario.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

Resolución

Corregimos el numeral agrupando de n en n.

$$M=(n+1)(n-1)(2n+3)_{(n)} \quad (n>3)$$

$$M=(n+1)(n+1)\ 3_{(n)}$$

$$M=(n+2)\ 1\ 3_{(n)}$$

$$M=1\ 2\ 1\ 3_{(n)}$$

Por dato: (suma de cifras) – (base) = 2

$$(1+2+1+3)-(n)=2$$
$$n=5$$

Además

$$M=1213_{(5)}=\overline{abc}_{(7)}$$

cambiando de base $1213_{(5)}=351_{(7)}$

$$351_{(7)}=\overline{abc}_{(7)}$$

Entonces

$$a=3 \ \wedge\ b=5 \ \wedge\ c=1$$

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_d}}=\overline{1(d-3)}_{12_d}$$

Propiedad

$$\underbrace{a+b+c}_{9}+d=d-3+2+d$$

$$9=d-1$$

$$\therefore\ d=10$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 44

Se sabe que $\overline{pqrs}_{(7)}=\overline{srqp}_{(11)}$, además, $p\neq q\neq r\neq s$. Calcule la suma de todas las bases de los sistemas de numeración en los cuales $\overline{srqp}$ se puede expresar como un numeral de tres cifras, si p es par.

A) 625 B) 610 C) 580
D) 550 E) 575

Resolución

Tenemos que

$$\overline{pqrs}_{(7)}=\overline{srqp}_{(11)}\ ;\ p\neq q\neq r\neq s \wedge p \text{ es par}$$

Además

$$p;\ q;\ r \wedge s<7$$

Descomponemos polinómicamente

$$p\cdot 7^3+q\cdot 7^2+r\cdot 7+s=s\cdot 11^3+r\cdot 11^2+q\cdot 11+p$$

Operando tendremos

$$\underbrace{9p+q}=35s+3r$$
$$\downarrow$$

máximo: $9(6)+5=59$ 1

Luego

$$9p-3r=35-q$$
$$3(3p-r)=35-q$$

p	r	q	
4	1	2	($r=s=1$) No cumple
4	2	5	Sí cumple

Entonces, $\overline{srqp}=1254$ lo expresamos con 3 cifras en base K

$$K^2\leq 1254<K^3$$

Cumplen K: 11; 12; 13; ... ; 35

Piden

$$11+12+13+...+35=575$$

Por lo tanto, la suma de las bases es 575.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 45

Halle el valor de V, si se cumple lo siguiente:

$\overline{UNIUNI}_{(D)}=\overline{EXITO}_{(A)}$

$A+D=12_{13_{(7)}}$

$\overline{ADU}_{(9)}=U\times\overline{CVU}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

- $D+A=12_{13_{(7)}}=2+3+7$
  $D+A=12$

- $\overset{+}{\overline{UNIUNI}}_{\underset{-}{(D)}}=\overset{-}{\overline{EXITO}}_{\underset{+}{(A)}}$

  $D < A$
  $\downarrow \quad \downarrow$
  5 7
  4 8× se descarta porque
  3 9× no cumplen el cambio de base especial

- $D=5$ $\quad\overline{ADU}_{(9)}=U\times\overline{CVU}$
  $A=7$ $\quad\downarrow\ \downarrow$ 7 5

  $7\times9^2+5\times9+U=U\times\overline{CVU}$

  $2\times2\times3\times3\times17=U\times[\overline{CVU}-1]$
  $\qquad\qquad U=4 \qquad \overline{CVU}-1=153$

$\therefore\ V=5$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 46

Si $\overline{1mnpq}_{\overline{a00}_{(b)}}=\overline{a0(b+1)0}_{\overline{mn}_{\overline{mb}_{\overline{xx}_{(2)}}}}$

halle $m+n+p+q$.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

Resolución

Si $\overline{1mnpq}_{\overline{a00}_{(b)}}=\overline{a0(b+1)0}_{\overline{mn}_{\overline{mb}_{\overline{xx}_{(2)}}}}$

vemos que:

- $0 < x < 2 \rightarrow \overline{xx}_{(2)}=11_{(2)}=3$
  $x=1$

- $2\leq b < \overline{xx}_{(2)}=3$
  $b=2$

- $0 < a < b \rightarrow \overline{a00}_{(b)}=100_{(2)}=4$
  $a=1$

Reemplazando, tenemos

$$\overline{1mnpq}_{(4)}=1030_{\overline{mn}_{\overline{m2}_{(3)}}}$$

Hacemos

$$\overline{mn}_{\overline{m2}_{(3)}}=K$$

$$\overline{1mnpq}_{(4)}=1030_{(K)}=K^3+3K$$

$K > 4$

$$\overline{1mnpq}_{(4)}=\begin{cases}11000_{(4)}=320\ (\text{mínimo})\\ 12333_{(4)}=447\ (\text{máximo})\end{cases}$$

Entonces: $K=7$

$$\overline{1mnpq}_{(4)}=7^3+3(7)=364=11230_{(4)}$$

$\therefore\ m+n+p+q=6$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 47

Sea

$\overline{abc}_{(d)}=\overline{a(a-1)}_{(b)}+\overline{a(b+2)(1+c)}$,

donde $\overline{ab}+d=\overline{ab}_{\overline{ab}_{\cdot_{\cdot_{\overline{ab}_{(n)}}}}}$ (c veces)

Si $\overline{baba}_{(b+1)}=\overline{amab}_{(4)}$,

halle $\overline{nmc(d-2)}$ máximo en la base $(a+b)^2$.

A) $7401_{(9)}$ B) $8021_{(9)}$ C) $13\,407_{(9)}$
D) $7216_{(9)}$ E) $8560_{(9)}$

Resolución

De los datos, observamos:

- $d-2<10$

  $d<12$

- $\overline{a(a-1)}_{(b)}$

  $\rightarrow\ 0<a<b$

- Por la primera cifra comparamos los numerales

  $\overset{+}{\overline{baba}}_{\underset{-}{(b+1)}}=\overset{-}{\overline{amab}}_{\underset{+}{(4)}}$

  $b+1<4\ \rightarrow\ b<3$

Entonces

$0<a<b<3$

$a\downarrow 1;\ b\downarrow 2$

Reemplazamos

$2121_{(3)}=\overline{1m12}_{(4)}$

$\downarrow$

70

$\downarrow$

$1012_{(4)}=\overline{1m12}_{(4)}$

$m=0$

Dato:

$\overline{ab}+d=\overline{ab}_{\overline{ab}_{\cdot_{\cdot_{\overline{ab}_{(n)}}}}}$ (c veces)

Reemplazamos

$12+d=12_{12_{\cdot_{\cdot_{12_{(n)}}}}}$ (c veces)

$$12+d=2\cdot c+n$$

como $d<12$, entonces máximo será 11. Como n es cifra, entonces máximo será **9**.

Reemplazamos: $12+11=2c+9$

$14=2c\ \rightarrow\ c=7$

Tenemos los valores máximos

$a=1;\ \ b=2;\ \ d=11;\ \ n=9;\ \ c=7;\ \ m=0$

Nos piden

$\underbrace{\overline{nmc(d-2)}}$ en base $\underbrace{(a+b)^2}$

$<>$ 9079 en base $(1+2)^2=9$

$\therefore\ 9079=13\,407_{(9)}$

Clave C

PROBLEMA N.° 48

Se cumple que

$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{K\text{ cifras}}=\overline{abc}^{\overline{mp}}-1.$

Halle la suma de cifras del máximo numeral de $\overline{abc}$ cifras, de la base $\overline{mp}$, si al corregir el numeral $\overline{(4d-2)(3d+4)(2d+1)(d+3)}_{(d)}$ el producto de sus cifras es n^2, en el cual d es mayor que 6. Considere que K toma su máximo valor de 2 cifras.

A) 6780   B) 6880   C) 6920
D) 6912   E) 7460

Resolución

En primer lugar, corregimos el numeral

$$\overline{\overset{4}{\frown}(4d-2)\overset{3}{\frown}(3d+4)\overset{2}{\frown}(2d+1)\overset{1}{\frown}(d+3)}_{(d)} \quad ; d>6$$

$41623_{(d)}$

Donde

$4\times1\times6\times2\times3=n^2 \rightarrow n=12$

Además

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{K \text{ cifras}}=\overline{abc}^{\overline{mp}}-1$$

$n^K-1=12^K-1=\overline{abc}^{\overline{mp}}-1$

$\rightarrow \overline{abc}^{\overline{mp}}=12^K$

como K es el máximo valor de 2 cifras, con $K=98$

$\overline{abc}^{\overline{mp}}=(12^2)^{49}=144^{49}$

Entonces

$\overline{abc}=144 \wedge \overline{mp}=49$

Piden la suma de cifras de

$$\underbrace{(48)(48)(48)\ldots(48)_{(49)}}_{144 \text{ cifras}}$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$144(48)=6912$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 49

Si $\overline{3536373839\ldots5354ab55}_{(n)}=\overline{r_2r_3r_4\ldots r_Kr_{K+1}}_{(n^2)}$

y se cumple que n es impar,

además, $\overline{(a+1)(b-2)n}_{(12)}=\overline{m8p}_{(\overline{mx}-4)}$,

halle $a+b+n+r_8+m+p+x$

A) 67
B) 20
C) 72
D) 74
E) 81

Resolución

Analizamos la secuencia de cifras

$$\overline{3536373839\ldots\underbrace{5354ab55}}_{(n)}=\overline{r_2r_3r_4\ldots r_Kr_{K+1}}_{(n^2)}$$

$\downarrow\downarrow$

53

$a=5 \wedge b=3$

Se observa de los datos:

$\left.\begin{array}{l}9<n<12\\ n \text{ es impar}\end{array}\right\} n=11$

Del cambio de base especial

Base 11	35	36	37	38	39	3(10)	40	...5355$_{(11)}$
Base 11^2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	...$_{(11^2)}$

$r_8=40_{(11)}$

$r_8=44$

En el dato

$\overline{(a+1)(b-2)n}_{(12)}=\overline{m8p}_{(\overline{mx}-4)}$

$61(11)_{(12)}=\overline{m8p}_{(\overline{mx}-4)}$

$\downarrow$

$887=\overline{m8p}_{(\overline{mx}-4)}$

Por tener 3 cifras en base $\overline{mx}-4$

$$(\overline{mx}-4)^2 \leq 887 < (\overline{mx}-4)^3$$

$$(\overline{mx}-4) \in \{10; 11; ...; 29\}$$

Solo cumple

$$\overline{mx}-4=19 \rightarrow \overline{mx}=23$$

$$\rightarrow 887=\overline{m\ 8\ p}_{(19)}$$

$$887=2\,8\,(13)_{(19)}$$

Entonces

$n=11$; $m=2$

$x=3$; $p=13$

$r_8=44$; $a=5$

$b=3$

$\therefore\ a+b+n+r_8+m+p+x=81$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 50

Calcule $w+z$, si se sabe lo siguiente:

- $\overline{x(y+7)}_{\overline{x(y+7)}_{\overline{x(y+7)}_{\cdot_{\cdot_{\overline{x(y+7)}_{(z)}}}}}}=3155$ (w veces)

- $20_{(5)}[\underbrace{\overline{xyxyxy\ ...\ xy}_{(5)}}_{100\text{ cifras}}]=26_{(7)}[\underbrace{\overline{yxyxyx...yx}_{(5)}}_{100\text{ cifras}}]$

A) 14 B) 19 C) 20

D) 17 E) 23

Resolución

Del dato:

$$20_{(5)}[\underbrace{\overline{xyxyxy\ ...\ xy}_{(5)}}_{100\text{ cifras}}]=26_{(7)}[\underbrace{\overline{yxyxyx...yx}_{(5)}}_{100\text{ cifras}}]$$

Descomponemos polinómicamente

$$10\cdot\overline{xy}_{(5)}[5^{98}+5^{96}+5^{94}+...+1]=$$

$$=20\cdot\overline{yx}_{(5)}[5^{98}+5^{96}+5^{94}+...+1]$$

$$\overline{xy}_{(5)}=2\cdot\overline{yx}_{(5)};\quad x<5 \wedge y<5$$

$$5x+y=2(5y+x)$$

$$3x=9y$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 1$$

Reemplazando, tenemos

$$38_{38_{38_{\cdot_{\cdot_{38_{(z)}}}}}}=3155 \quad (w\text{ veces})$$

$$38_{(z)}=3z+8$$

$$38_{38_{(z)}}=38_{(3z+8)}=3^2\cdot z+3\cdot 8+8$$

$$38_{38_{38_{(z)}}}=38_{(3^2z+3\cdot 8+8)}=3^3z+3^2\cdot 8+3\cdot 8+8$$

$$\vdots$$

$$3^w\cdot z+3^{w-1}\cdot 8+3^{w-2}\cdot 8+...+3^1\cdot 8+8=3155$$

$$3^w\cdot z+8\underbrace{[3^{w-1}+3^{w-2}+\ ...\ +3^1+1]}_{\left(\frac{3^w-1}{3-1}\right)}=3155$$

$$3^w\cdot z+4(3^w-1)=3155$$

$$3^w(z+4)\begin{cases} 3^5\times 13;\ w=5 \wedge z=9 \rightarrow w+z=14 \\ 3^4\times 39;\ w=4 \wedge z=35 \rightarrow w+z=39 \\ 3^3\times 117;\ w=3 \wedge z=113 \rightarrow w+z=116 \\ 3^2\times 351;\ w=2 \wedge z=347 \rightarrow w+z=349 \end{cases}$$

$$w=5 \wedge z=9$$

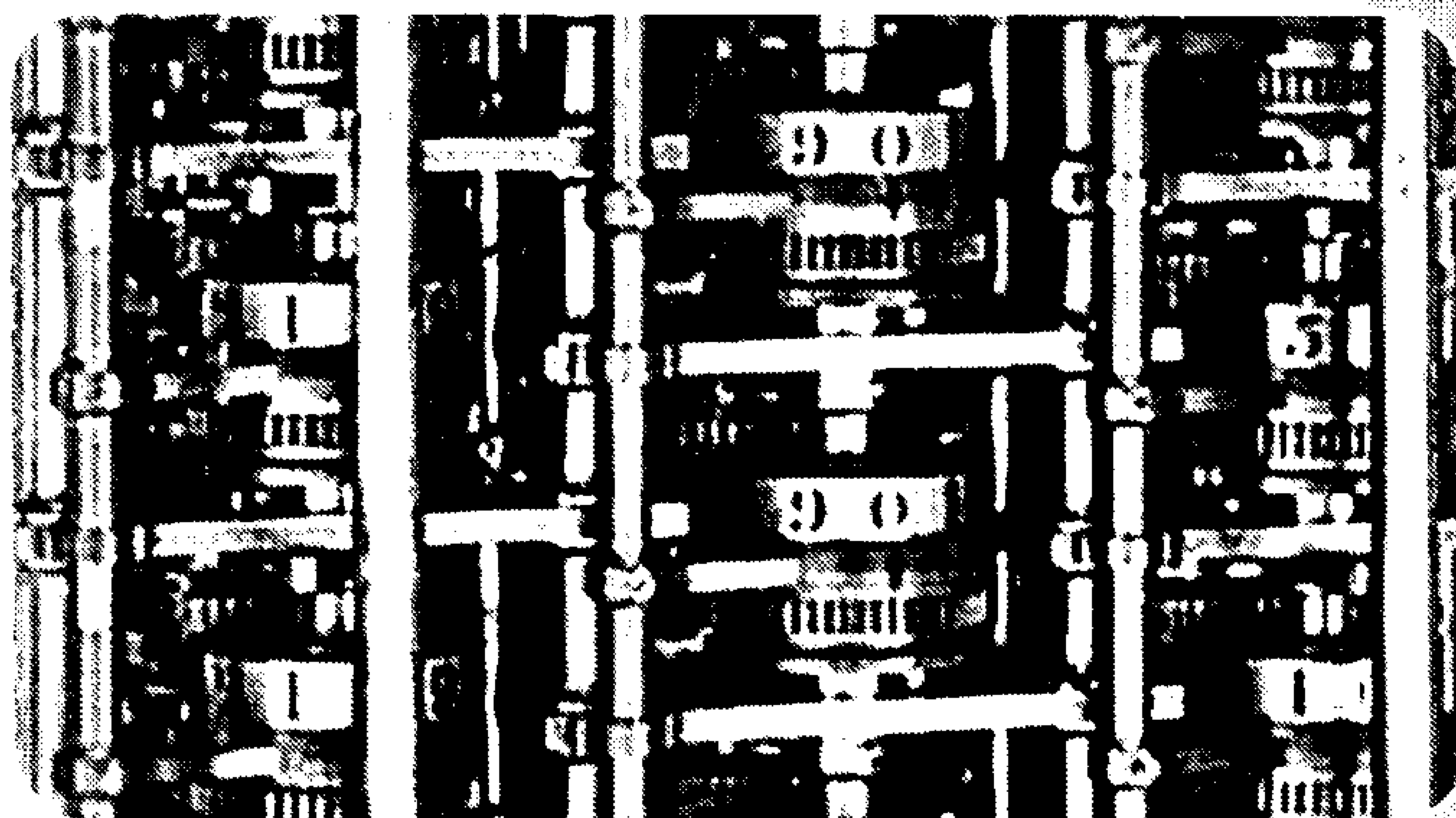
$\therefore\ w+z=14$

Clave **A**

Capítulo

5

Operaciones básicas en el conjunto $\mathbb{Z}_0^+$



Muchas culturas que se desarrollaron en distintos tiempos y espacios crearon un sistema que les permitía llevar sus cuentas, con distintos principios: aditivo, multiplicativo, híbridos (combinando ambos) y los posicionales, esto les permitía también realizar cálculos básicos.

El sistema aditivo fue utilizado por los egipcios en el año 3000 a.n.e., y los griegos, en el año 600 a.n.e., llegaron a utilizar un sistema multiplicativo; pero mucho más efectivos que los anteriores son los sistemas posicionales, en ellos la posición de una cifra nos dice si son unidades, decenas, centenas o, en general, la potencia de la base correspondiente.

Existen pruebas arqueológicas que demuestran el uso del cero en posiciones intermedias o finales en la India, pero además de ella solo tres culturas lograron desarrollar este sistema: babilonios, chinos y mayas en distintas épocas llegaron al mismo principio. En el caso de China, la ausencia del cero les impidió un desarrollo completo hasta la introducción del mismo, mientras que los sistemas babilónicos y mayas no eran prácticos para operar, porque no disponían de símbolos particulares para los dígitos.

Capítulo 5

Operaciones básicas en el conjunto $\mathbb{Z}_0^+$

PROBLEMA N.° 1

Halle el valor de $a+n$, si sabe que
$1+2+...+n=\overline{aaa}$

A) 42
B) 36
C) 52
D) 39
E) 46

Resolución

Sea

$$\underbrace{1+2+3+...+n}_{n \text{ números}}=\overline{aaa};\ (1 \leq a \leq 9)$$

Desarrollamos

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=a\cdot 111$$

Dos factores consecutivos

$$\overbrace{n\cdot(n+1)}=\underbrace{a}_{a}\cdot\underbrace{2\cdot 3}_{6}\cdot 37$$

$n \to 36$, $(n+1) \to 37$; $a\cdot 6$: múltiplo de 6 y cercano a 37

Cumple

$a=6 \ \wedge \ n=36$

$\therefore \ a+n=42$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

Determine m, si
$\overline{abc}_{(n)}+\overline{mpq}_{(n)}=\overline{cba}_{(n)}$.
Considere que
$m-n+p=7-q$ y $m-q=2$.

A) 3
B) 5
C) 7
D) 9
E) 1

Resolución

Del dato:

$$\overline{cba}_{(n)}-\overline{abc}_{(n)}=\overline{mpq}_{(n)}$$

Por propiedad

$$p=n-1 \ \wedge \ m+q=n-1$$

Además

$$m-n+p=7-q$$

$$\underbrace{m+q}+p=n+7$$

$$(n-1)+\overbrace{(n-1)}=n+7 \ \to \ n=9$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} m+q&=8 \\ m-q&=2 \end{aligned}\right\}(+)$$

$$2m=10$$

$\therefore \ m=5$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

Si $\overline{an}\times\overline{a7}+\overline{a6}+\overline{a5}=\overline{14(n-1)7}$, halle $a+n$.

A) 10 B) 7 C) 8
D) 9 E) 11

Resolución

Analizamos la última cifra en cada sumando

$$\overline{an}\cdot\overline{a7}+\underbrace{\overline{a6}+\overline{a5}}_{...1}=\underbrace{\overline{14(n-1)7}}_{...7}$$

Entonces, por la última cifra tenemos:

$$\overline{an}\cdot\overline{a7}=...6$$
$$\downarrow$$
$$(\overline{...n})(\overline{...7})=...6$$
$$\downarrow$$
$$8$$

Cumple $n=8$, luego, reemplazando tenemos

$$\overline{a8}\cdot\overline{a7}+\underbrace{\overline{a6}+\overline{a5}}_{\leq 200}=1477$$

Para que

$$\overline{a8}\cdot\overline{a7}\geq 1277$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$3 \quad 3$$

Cumple $a=3$

$\therefore\ a+n=11$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 4

Dado que

$\overline{aba}_{(8)}+\overline{ab}_{(8)}+\overline{ba}_{(8)}=\overline{ccdd}_{(8)}$,

calcule $a+b+c+d$.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 15

Resolución

Sea

$$\begin{array}{r} \overline{aba}_{(8)}\ + \\ \overline{ab}_{(8)} \\ \overline{ba}_{(8)} \\ \hline \overline{ccdd}_{(8)} \end{array}$$

Orden 3:

Sólo se puede llevar 1, entonces $c=1$ y

$a+\square=11_{(8)}=9$

$\downarrow \quad \downarrow$

$7 \quad 2$ ($\square$: lo que se lleva del orden 2)

Orden 1:

$14+b=2(8)+d$ (llevo: 2)

$b-d=2$ (I)

Orden 2:

$7+2b+\boxed{2}=2(8)+d$ (llevo: 2)

$2b-d=7$ (II)

De (I) y (II)

$b=5 \wedge d=3$

$\therefore\ a+b+c+d=16$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

Se sabe lo siguiente:

$\overline{1yy}_{(n)}+\overline{2yy}_{(n)}+\overline{3yy}_{(n)}+...+\overline{(n-1)yy}_{(n)}=\overline{abc4}_{(n)}$

Calcule $a+b+c+n+y$, si, además, se sabe que $n+y=12$.

A) 18 B) 27 C) 29
D) 37 E) 21

Resolución

Sea $\overline{1yy}_{(n)}+\overline{2yy}_{(n)}+\overline{3yy}_{(n)}+...+\overline{(n-1)yy}_{(n)}=\overline{abc4}_{(n)}$

Sumando las últimas cifras tenemos

$$\underbrace{y+y+...+y}_{(n-1)\text{ sumandos}}=...4_{(n)}$$

$$y\cdot(n-1)=...4_{(n)} \qquad \text{(I)}$$

Como $y\cdot(n-1)=\dfrac{yn-y}{\overline{y(-y)}_{(n)}}$

Por propiedad

$$\overline{y(-y)}_{(n)}=\overline{(y-1)(n-y)}_{(n)}$$

Reemplazamos en (I)

$$\overline{(y-1)(n-y)}_{(n)}=...4_{(n)}$$

$$n-y=4$$

Tenemos $n-y=4$ | Dato: $n+y=12$ } Resolviendo $n=8 \wedge y=4$

Reemplazando, tenemos

$$\begin{array}{rccl} & \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ & ③ & ③ & \\ & 1 & 4 & 4_{(8)}\ + \\ & 2 & 4 & 4_{(8)} \\ 7\text{ numerales} & 3 & 4 & 4_{(8)} \\ & \vdots & & \\ & 7 & 4 & 4_{(8)} \\ \hline a & b & c & 4_{(8)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 7 & 7 & \end{array}$$

Columna I:

$4\times7=28=34_{(8)}$ (lleva 3, queda 4)

Columna II:

$4\times7+3=31=37_{(8)}$ (lleva 3, queda 7)

Columna III:

$(1+2+...+7)+3$

$=\dfrac{7\times8}{2}+3$

$=31=37_{(8)}$

Luego

$a=3 \wedge b=7 \wedge c=7$

$\therefore\ a+b+c+n+y=29$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

Se cumple que

$$S=74+7474+747474+...+\underbrace{747474...74}_{74\text{ cifras}}$$

Calcule S y dé como respuesta la suma de sus dos últimas cifras.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

Resolución

Sea

$$S=74+7474+747474+...+\underbrace{747474...74}_{74\text{ cifras}}$$

Observamos que son $\dfrac{74}{2}=37$ sumandos, luego

$$\begin{array}{r} 74\ + \\ 7474 \\ 747474 \\ \vdots \\ 74....747474 \\ \hline ...38 \end{array}$$

En las unidades

$$37\times4=148=\underline{14}(10)+8$$

(14 → llevo; 8 → queda)

En las decenas

$$37\times7+\boxed{14}=273=\underline{27}(10)+3$$

(27 → llevo; 3 → queda)

$\therefore\ 3+8=11$

Clave C

PROBLEMA N.° 7

Si $\overline{abcde}+$

$\overline{edcba}$

$\overline{8*8**}$

además

- $a>b>c>d>e>0$
- $a^2+e^2=b^2+c^2+d^2$

calcule $a+b+c+d+e$.

A) 16 B) 17 C) 18

D) 19 E) 20

Resolución

Sea $\overline{abcde}+$

$\overline{edcba}$

$\overline{8_8_\ _}$

- $(c+c)$ es par: 8
- no lleva del orden anterior

→ en ningún orden se lleva

Tenemos $a+e=8\ \wedge\ 2c=8$

$c=4$

a	e
7	1
6	2

De los datos:

(suman 8: a y e)

$$a>b>c>d>e>0\wedge a^2+e^2=b^2+c^2+d^2$$

a	c	e	
7	4	1	(I)
6	4	2	(II)

Caso (I):

Si $\begin{cases}a=7\\c=4\\e=1\end{cases}$

entonces

$$7>\underbrace{b}_{5}>4>\underbrace{d}_{3}>1\ \wedge\ 34=\underbrace{b^2}_{5^2}+\underbrace{d^2}_{3^2}$$

cumple

$b=5\wedge d=3$

$\therefore\ a+b+c+d+e=20$

Caso (II):

Si $\begin{cases}a=6\\c=4\\e=2\end{cases}$

entonces

$$\underbrace{6>b>4>d>2}_{\text{Sólo puede ser } b=5\ \wedge\ d=3}\wedge\underbrace{b^2+d^2=24}_{\text{No cumple}}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 8

Calcule la suma de todos los números capicúas de cuatro cifras del sistema senario. Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 10 B) 15 C) 18

D) 22 E) 32

Resolución

Sea $\overline{a\ b\ b\ a}_{(6)}$

a	b
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
	5

$5\times6=30$ numerales

Luego, calculamos la suma de ellos

Orden 1:

$$\frac{30}{5}[1+2+3+4+5]=90 \rightarrow 230_{(6)}+$$

Orden 2:

$$\frac{30}{6}[0+1+2+3+4+5]=75 \rightarrow 2030_{(6)}$$

Orden 3:

$$\frac{30}{6}[0+1+2+3+4+5]=75 \rightarrow 20300_{(6)}$$

Orden 4:

$$\frac{30}{5}[1+2+3+4+5]=90 \rightarrow 230000_{(6)}$$

$$253000_{(6)}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 10.

Clave **A**

Observación

Cada resultado lo llevamos a base 6 y luego se coloca en el orden que le corresponde.

PROBLEMA N.° 9

Calcule $a+b+c$ si se cumple que

$\overline{abbc}+\overline{(a-1)cab}+\overline{baa}+\overline{bd}=\overline{63(b+2)d}$

A) 12 B) 15 C) 10
D) 18 E) 20

Resolución

Tenemos

$$\overline{abbc}+\overline{(a-1)cab}+\overline{baa}+\overline{bd}=\overline{63(b+2)d}$$

Reagrupamos convenientemente

$$\overline{abbc}+\overline{(a-1)cab}+\overline{baa}=\overline{63(b+2)d}-\overline{bd}$$

$$\overline{abbc}+\overline{(a-1)cab}+\overline{baa}=\overline{6320};\ (b<8)$$

Por la primera cifra

$$a+(a-1)\leq 6$$

a	$a-1$	
3	2	
2	1	No cumple

$a=3$:

$$\begin{array}{r} \overline{3bbc}\ + \\ \overline{2c3b} \\ \overline{b33} \\ \hline 6320 \end{array}$$

- En el orden 1:

$b+c+3=...0$

$b+c=(...7)$: 7, 17

Considerando el orden 3;

$b+c+b+1=13$

$b+c+b=12$

7, 5

17 No cumple

- En el orden 2:

$b+7=...2$ ($b=5$, 12)

$b=5 \wedge c=2$

$\therefore\ a+b+c=10$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Si $\overline{9ba}+\overline{ac8}+\overline{d24}=\overline{cc1d}$

halle $a+b+c+d$.

A) 15 B) 16 C) 18
D) 19 E) 20

Resolución

Sea

$$\begin{array}{r} \overline{9ba}\ + \\ \overline{ac8} \\ \overline{d24} \\ \hline \overline{cc1d} \end{array}$$

Vemos que: $a>0$, $c>0 \wedge d>0$

Luego:

$\square$: Lo que se lleva del orden anterior.

Orden 3:

$9+a+d+\square=\overline{cc} \rightarrow c=2$

$\square$ ↓ mínimo=1

Orden 2:

$b+4+\square=...1=11$

$\square$ ↓ máximo=2

Orden 3:

$9+a+d+\boxed{1}=22$

$\rightarrow a+d=12$ (I)

Orden 1:

$a+12=\begin{cases} 1(10)+d & \text{Sí cumple} \\ 2(10)+d & \text{No cumple} \end{cases}$ (II)

De (I) y (II):

$\left.\begin{array}{l} a+d=12 \\ d-a=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=7 \\ a=5 \end{array}$

Orden 2:

$b+4+\boxed{1}=11$

b ↓ 6

$\therefore a+b+c+d=20$

Clave E

PROBLEMA N.° 11

En una sustracción, el minuendo es el triple de la diferencia, y la suma de todos los términos de esa sustracción es 240.
¿Cuál es el complemento aritmético del sustraendo?

A) 80 B) 20 C) 880
D) 40 E) 60

Resolución

Tenemos:

M: minuendo
S: sustraendo
D: diferencia

- $M-S=D \wedge M=3D$
  entonces $S=2D$

- La suma de términos

  $\underbrace{M}_{3D}+\underbrace{S}_{2D}+D=240$

  $6D=240$

  $\rightarrow D=40$

El sustraendo

$S=2\times40$

$S=80$

$\therefore$ CA(80)=20

Clave B

PROBLEMA N.° 12

Si $\overline{ab}-\overline{cn}=40$ y $\overline{cn}+\overline{db}=50$,
halle la suma de cifras del resultado de
$\overline{abdb}+\overline{dbab}$.

A) 15 B) 17 C) 19
D) 18 E) 10

Resolución

De los datos:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{ab}-\overline{cn}=40\\ \overline{cn}+\overline{db}=50\end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{ab}+\overline{db}=90$$

Luego

$$\begin{array}{r}\overline{ab}\ +\\ \overline{db}\\ \hline 90\end{array}$$

Reemplazamos en

$$\begin{array}{r}\overline{abdb}\ +\\ \overline{dbab}\\ \hline 9090\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 18.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Si $\overline{abc}_{(m)}-\overline{cba}_{(m)}=\overline{xyz}_{(m)}$

$\overline{xyz}_{(m)}+\overline{zyx}_{(m)}=\overline{defg}_{(m)}$,

además, $d+e+f+g=16$,
calcule m.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Por propiedad:

$$\begin{array}{l}\overline{a\ b\ c}_{(m)}\ -\\ \overline{c\ b\ a}_{(m)}\\ \hline \overline{x\ y\ z}_{(m)}\end{array}$$

$y=m-1$; suman $m-1$

$\rightarrow\ y=m-1;\ x+z=m-1$

Del dato:

$$\begin{array}{r}\overset{1}{}\overline{xyz}_{(m)}\ +\\ \overline{zyx}_{(m)}\\ \hline \overline{defg}_{(m)}\end{array}$$

Efectuamos por cada columna

Orden 1:

$\underbrace{z+x}=g$

$m-1=g$

Orden 2:

$\underbrace{y+y}=\ldots f_{(m)}$

$\underbrace{m}_{m}\underbrace{-1+m-1}_{m-2}=\ldots f_{(m)}$

$\overline{\underset{\text{lleva}}{1}\underbrace{(m-2)}_{f}}_{(m)}=\ldots f_{(m)}$

$\rightarrow\ f=m-2$

Orden 3:

$\underbrace{x+z}_{m-1}+1=\overline{de}_{(m)}$

$m=\overline{de}_{(m)}$

$10_{(m)}=\overline{de}_{(m)}$

$d=1\ \wedge\ e=0$

Dato:

$$\underbrace{d}_{1}+\underbrace{e}_{0}+\underbrace{f}_{m-2}+\underbrace{g}_{m-1}=16 \quad \rightarrow \quad 2m-2=16$$

$\therefore \quad m=9$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

En 1977, la edad de Juan era el inverso de las dos últimas cifras del año de su nacimiento, lo mismo sucede con la edad de su abuelo.
Si la diferencia de sus edades es 45, y la edad del abuelo en 1977 era la inversa de la edad de Juan, ¿cuál fue la edad del abuelo en 1972?

A) 56 B) 55 C) 54
D) 53 E) 52

Resolución

Sabemos que la diferencia entre las edades de dos personas es constante.

Luego, del enunciado tenemos:

	$\overline{19ab}$	$\overline{19ba}$	1977
Abuelo	0	45	$\overline{ba}$
Juan		0	$\overline{ab}$

Para el abuelo

$$1977-\overline{19ba}=\overline{ba}-45$$

$$77-\overline{ba}=\overline{ba}-45$$

$$\rightarrow \quad \overline{ba}=61$$

La edad del abuelo en 1977 era 61 años.

Por lo tanto, la edad del abuelo en 1972 fue 56 años.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Se cumple lo siguiente:
$\overline{abcd}_{(9)}-\overline{dcba}_{(9)}=\overline{mnmb}_{(9)}, \ b>c$
Además, $\overline{ab}_{(9)}+\overline{cd}_{(9)}=\overline{ee}_{(9)}$.
Calcule la suma de los numerales de la forma $\overline{abcde}_{(9)}$ que satisfacen lo anterior.

A) $263\,183_{(9)}$
B) $185\,046_{(9)}$
C) $197\,633_{(9)}$
D) $368\,658_{(9)}$
E) $216\,383_{(9)}$

Resolución

Analizamos la sustracción

$$\begin{array}{cccccl} \overline{a} & b & \overset{9}{c} & \overset{9}{d}_{(9)} & - & (b>c) \\ \overline{d} & c & b & a_{(9)} & & (a>d) \\ \hline \underbrace{(a-d)}_{m} & \underbrace{(b-1-c)}_{n} & \underbrace{(8+c-b)}_{m} & \underbrace{(9+d-a)}_{b} & _{(9)} & \end{array}$$

Tenemos el valor de m

$$m=a-d=8+c-\textcircled{b}$$

$$\downarrow$$

$$a-d=8+c-\underbrace{(9+d)-a}_{9+d-a}$$

$$1=c$$

Del orden 1:

$$b=9+d-a \quad \rightarrow \quad b+a=9+d \qquad \text{(I)}$$

Por dato: se presentan dos casos

$$\begin{array}{l} \overline{a\ b}_{(9)}\ + \\ \overline{1\ d}_{(9)} \\ \hline \overline{e\ e}_{(9)} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} b+d=e \\ a+1=e \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} b+d=\overline{1e}_{(9)} \\ a+2=e \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

Caso 1:

$e=b+d-1$

En (I)

$\textcircled{a}+b=9+d$

$\downarrow$

$b+d-1+b=9+d \rightarrow b=5$

Luego

$c=1 \wedge b=5 \wedge e=5+d=a+1 \quad (e<9)$

e	d	a
6	1	5
7	2	6
8	3	7

Hay 3 soluciones

$\overline{abcde}_{(9)} \in \{55\,116_{(9)};\ 65\,127_{(9)};\ 75\,138_{(9)}\}$

La suma es

$$\begin{array}{r} 55\,116_{(9)} + \\ 65\,127_{(9)} \\ 75\,138_{(9)} \\ \hline 216\,383_{(9)} \end{array}$$

$\therefore\ 216\,383_{(9)}$

Observación

El caso (II) no cumple.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 16

Al restar un número de tres cifras significativas con el número que resulta de invertir sus cifras, ambos en base n, se obtiene $\overline{abc}_{(n)}$. Luego, al sumar los números

$\overline{cccccc}_{(n)}+\overline{bbbaaa}_{(n)}+\overline{aaabbb}_{(n)}$

se obtiene que la suma de cifras del resultado es igual a cinco veces la base. Calcule el máximo valor de $\overline{abc}_{(n)}$ en base 10.

A) 175 B) 451 C) 352
D) 246 E) 140

Resolución

Del dato:

$\overline{mpq}_{(n)}-\overline{qpm}_{(n)}=\overline{abc}_{(n)}$

Por propiedad

$a+c=n-1 \quad \wedge \quad b=n-1$

$\rightarrow\ a+b+c=2(n-1)$

Como $2(n-1)=\overline{1(n-2)}_{(n)} \rightarrow a+b+c=\overline{1(n-2)}_{(n)}$

Luego

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & c & c & c & c & c & c_{(n)} & + \\ & b & b & b & a & a & a_{(n)} & \\ & a & a & a & b & b & b_{(n)} & \\ \hline 1 & (n-1) & (n-1) & (n-1) & (n-1) & (n-1) & (n-2)_{(n)} & \end{array}$$

Orden 1:

$a+b+c=1\times n+(n-2)$

(1: llevo; $n-2$: queda)

Orden 2:

$a+b+c+\boxed{1}=1\times n+(n-1)$

(1: llevo; $n-1$: queda)

De igual manera en los siguientes órdenes:

Por condición

$1+5(n-1)+(n-2)=5n \rightarrow n=6$

Reemplazamos

$a+c=5 \quad \wedge \quad b=5$

Entonces, el máximo $\overline{abc}_{(n)}$ es $352_{(6)}$

Por lo tanto, su máximo valor en base 10 es 140.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 17

Si $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mnp}$, halle $a+b+c$, dado que $\overline{abc}$ es máximo y $\overline{mnp}$ es el menor posible.

A) 13 B) 18 C) 19
D) 21 E) 25

Resolución

De la sustracción

$$\underbrace{\overline{abc}}_{\text{máximo}}-\overline{cba}=\underbrace{\overline{mnp}}_{\text{mínimo}}$$

$$100a+\underline{10b}+c-(100c+\underline{10b}+a)=\overline{mnp}$$

$$99\underbrace{(a-c)}_{2}=\underbrace{\overline{mnp}}_{198\text{ mínimo}}$$

$b\in\{0;1;2;...;9\}$

Tomamos los máximos valores:

$b=9 \wedge a-c=2$

$\quad\quad\quad\quad\downarrow\ \downarrow$

$\quad\quad\quad\quad 9\ \ 7$

$\therefore\ a+b+c=25$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 18

Se cumple que $\overline{(2a)bc}-\overline{cd(a-3)}=\overline{def}$
Además, $c-d=4$ y $b+e=10$.
Halle $d+e+f$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 20

Resolución

Del dato:

$$\overline{(2a)bc}-\overline{cd(a-3)}=\overline{def}$$

Vemos que

$0<(2a)<10 \wedge 0\leq(a-3)<10 \rightarrow\ a$: 3 ó 4

Además

$c-d=4 \rightarrow (c+d)$ es par, luego

$$\begin{array}{rrrl} (2a) & b & c & - \\ & c & d & (a-3) \\ \hline & d & e & f \end{array}$$

Analizando, tenemos:

Orden 3: no presta al orden 2

$(2a)-c=d\ ;\ c+d=2a$ Cumple

$\quad\quad\downarrow$

$\quad\quad c-4 \rightarrow c=a+2$

Orden 1: $c-(a-3)=f$

Reemplazamos:

$(a+2)-(a-3)=5=f$

$b+e=10$(dato) $\wedge\ d=c-4=a-2$

Orden 2:

$b\ -\ d\ =\ e$

$\downarrow\quad\ \downarrow$

$(10-e)\ (a-2)$

$\rightarrow\ e=6-\dfrac{a}{2}$

Luego: $a=4;\ e=4 \wedge d=2$

$\therefore\ d+e+f=11$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Se sabe que

$$\overline{b\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)}_{(K)}-\overline{a(a^2)(a^3)}_{(K)}=\overline{m7m}_{(K)}$$

Halle $m\times b$; si: $K<11$.

A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

Resolución

Dato:

- $\overline{b\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)}_{(K)} - \overline{a(a^2)(a^3)}_{(K)} = \overline{m7m}_{(K)}$
- $K < 11$

Se puede observar que

$b = \overset{o}{6} \;\wedge\; \underbrace{b}_{6} \leq K < 11 \;\wedge\; \underbrace{a^3}_{} < K < 11$

1^3 (I)

2^3 (II)

I. Si $b=6 \;\wedge\; a=1$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 2_{(K)} - \\ 1 & 1 & 1_{(K)} \\ \hline m & 7 & m_{(K)} \end{array}$$

$m=5 \quad m=1$ No cumple, se contradice

II. Si $b=6 \;\wedge\; a=2$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 2_{(K)} - \\ 2 & 4 & 8_{(K)} \\ \hline m & 7 & m_{(K)} \end{array}$$

Orden 1: $K+2-8=m$

Orden 2: $K+2-4=7 \rightarrow K=9$

Reemplazamos $m=3$

$\therefore\; m \cdot b = 3 \cdot 6 = 18$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Si $\overline{abc}_{(8)} = 2(\overline{cba}_{(8)})$

calcule $\overline{ab}_{(8)} + c$ en base 10.

A) 26 B) 30 C) 40
D) 49 E) 52

Resolución

Del dato:

$\overline{abc}_{(8)} = 2(\overline{cba}_{(8)})$

Tenemos

$\overline{abc}_{(8)} - \overline{cba}_{(8)} = \overline{cba}_{(8)}$

Por propiedad

$b=7 \;\wedge\; c+a=7$

Luego

$$\begin{array}{l} \overline{abc}_{(8)} - \quad (a > c) \\ \overline{cba}_{(8)} \\ \hline \overline{cba}_{(8)} \end{array}$$

Orden 1: $\underset{(7-a)}{(c+8)} - a = a \rightarrow a=5$

Piden

$\overline{ab}_{(8)} + c = 8a + b + c$

$= \underset{5}{7a} + \underbrace{(a+b+c)}_{14}$

$\therefore\; \overline{ab}_{(8)} + c = 49$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

Sea $\overline{ab}_{(n)} + \overline{abab}_{(n)} + \overline{ababab}_{(n)}$

$+ \ldots + \underbrace{\overline{abab\ldots abab}_{(n)}}_{(4n)\text{ cifras}} = \ldots 3310_{(n)}$

Además, $CA(\overline{ab}) = \overline{mp}$, ¿en cuántos sistemas de numeración $\overline{bmn}$ se escribe con $(a-b)$ cifras? Considere que n es máximo.

A) 12 B) 14 C) 13
D) 15 E) 10

Resolución

- Como n es máximo y $n < 10$, consideremos $n=9$

- $$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{\scriptsize 2b}}{\overline{ab}}_{(9)} + \\ \overline{abab}_{(9)} \\ \overline{ababab}_{(9)} \\ \vdots \\ \overline{ab\ldots abab}_{(9)} \leftarrow \text{36 cifras} \\ \hline \ldots 3310_{(9)} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{18 sumandos}$$
  (acarreo $(2a+1)$)

Sumando en base 9 (agrupamos de 9 en 9):

- Orden 1:

  $b \cdot 18 = 9 \cdot \underline{2b} + \underline{0}$

  $\underline{2b}$ ↓ lleva, $\underline{0}$ ↓ queda

- Orden 2:

  $\underbrace{a \cdot 18}+2b=\underbrace{\ldots 1_{(9)}}$ (I)

  $\overset{\circ}{9} + 2b = \overset{\circ}{9} + 1$

  $2b = \overset{\circ}{9} - 8 \rightarrow b = \overset{\circ}{9} - 4$

  $b = \overset{\circ}{9} + 5 \rightarrow b=5$

En (I):

$2a \cdot 9 + 2(5) = \ldots 1_{(9)}$

$9(\underline{2a+1}) + \underline{1} = \ldots 1_{(9)}$

$\underline{2a+1}$ ↓ lleva, $\underline{1}$ ↓ queda

- Orden 3:

  $2a+1+b \cdot 17 = \ldots 3_{(9)}$

  $\underbrace{2a+1+5 \cdot 17}=\underbrace{\ldots 3_{(9)}}$

  $2a + \overset{\circ}{9} + 5 = \overset{\circ}{9} + 3$

  $2a = \overset{\circ}{9} - 2 \rightarrow a = \overset{\circ}{9} - 1 \rightarrow a=8$

Luego $\overline{ab}=85$

Por dato:

$$\mathrm{CA}(\overline{ab}) = \overline{mp} \rightarrow \overline{mp}=15$$

$\downarrow\downarrow$

$8\ 5$

$\therefore\ m=1 \wedge p=5$

Si $\overline{bmn}=519$ se escribe con $(a-b)=3$ cifras en base K:

$$519=\overline{xyz}_{(K)}$$

$$100_{(K)} \leq \overline{xyz}_{(K)} < 1000_{(K)}$$

$$K^2 \leq 519 < K^3$$

$$K^2 \leq 519 \wedge 519 < K^3$$

Los valores que cumplen:

$$K \in \underbrace{\{9; 10; 11; \ldots; 22\}}_{22-8=14 \text{ bases}}$$

Por lo tanto, las condiciones se cumplen en 14 sistemas de numeración.

Clave B

PROBLEMA N.° 22

Dado que $\mathrm{CA}(\overline{abcd})=a+b+c+d$ halle $a+b+c+d$.

A) 30 B) 36 C) 24
D) 32 E) 28

Resolución

Observación

Si el CA de un número de n cifras es un número de m cifras, entonces, las $(n-m)$ primeras cifras del número inicial son cifras máximas.

Sea

$$CA(\overline{abcd}) = \underbrace{a+b+c+d}_{\text{máximo}=4(9)=36},$$

Entonces

$a=9 \wedge b=9$

$CA(\overline{99cd}) = 18+c+d$

$10^4 - \overline{99cd} = 18+c+d$

Desarrollamos

$$82 = \overset{\text{par}}{\overline{11c}} + 2d$$

6	8	Sí cumple
4	19	No cumple

$\therefore\ a+b+c+d=32$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 23

Si a un número de tres cifras se le suma dos veces la cifra de las decenas, se obtiene el complemento aritmético de dicho número, siendo la cifra de unidades significativa. Calcule la suma de los cuadrados de las cifras del número.

A) 98 B) 49 C) 126
D) 63 E) 48

Resolución

Sea el número de 3 cifras: $\overline{abc}$

Del dato:

$\overline{abc} + 2b = CA(\overline{abc});\ (c \neq 0)$

$\overline{abc} + 2b = 1000 - \overline{abc}$

$2\overline{abc} + 2b = 1000$

Como $b \leq 9$, entonces $\overline{abc} \geq 491$; se obtiene $a=4$ y $b=9$.

$\overline{abc} + b = 500$

$\downarrow\downarrow\downarrow\quad\downarrow$

$491\quad 9$

$\therefore\ 4^2+9^2+1^2=98$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Halle $a+b$ si el complemento aritmético de $\overline{a7b}$ es igual al producto de sus cifras de mayor y menor orden.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 9

Resolución

Sea $CA(\overline{a7b}) = \underbrace{a \cdot b}_{\text{máximo}=9\times 9=81}$

Entonces $a=9$, luego

$CA(\overline{97b}) = 9 \cdot b$

$10^3 - \overline{97b} = 9 \cdot b$

$10^3 - (970+b) = 9 \cdot b \ \rightarrow\ b=3$

$\therefore\ a+b=12$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

El complemento aritmético del numeral $\overline{a(a+1)(a+2)}$ es igual a 34 veces el complemento aritmético de $\overline{(2a)a}$. Calcule la suma de cifras del $CA[\overline{(a-1)a(a+1)}]$.

A) 20 B) 12 C) 8
D) 10 E) 16

Resolución

Se observa

$$CA(\overline{a(a+1)(a+2)})=34\cdot CA(\overline{(2a)a});\ 2a<10$$

$$a<5$$

$$1000-\overline{a(a+1)(a+2)}=34\cdot[100-\overline{(2a)a}]$$

Se observa que $(a+2)$ es cifra par, entonces a es par y $a<5$ solo puede ser 2 ó 4.

$$\overbrace{34\cdot\underbrace{\overline{(2a)a}}}^{\text{par}}-\overline{a(a+1)\underbrace{(a+2)}}=\overbrace{2400}^{\text{par}};$$

	$\overline{(2a)a}$	$(a+2)$
No cumple:	42	4
Sí cumple:	84	6

$\rightarrow\ a=4$

Nos piden $CA[\overline{(a-1)a(a+1)}]$.

$$CA(345)=655$$

Por lo tanto, la suma de cifras es $6+5+5=16$

Clave E

PROBLEMA N.° 26

Si $CA(\overline{aba0})=\overline{7(b+1)(4a)m}$, halle $a+b+m$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Aplicamos la regla práctica

$$CA(\overline{\overset{9}{a}\ \overset{9}{b}\ \overset{10}{a}\ 0})=\overline{7(b+1)(4a)\underset{\substack{\downarrow\\0}}{m}}\ ;\ a>0$$

Se tiene:

$$9-a=7\ \rightarrow\ a=2\ \wedge\ 9-b=b+1\ \rightarrow\ b=4$$

$\therefore\ a+b+m=6$

Clave B

PROBLEMA N.° 27

Si $CA(\overline{abcd}_{(8)})=\overline{(a+1)c}$, calcule $a+b+c+d$.

A) 25 B) 19 C) 26
D) 18 E) 21

Resolución

El complemento aritmético se opera en la misma base

$$CA(\overline{abcd}_{(8)})=\overline{(a+1)c}$$

$$10\,000_{(8)}-\overline{abcd}_{(8)}=\underbrace{\overline{(a+1)c}}$$

$$10\,000_{(8)}=\underbrace{\overline{abcd}_{(8)}}_{\geq 7635_{(8)}}+\underbrace{\overline{(a+1)c}}_{\substack{\leq 99\\ \leq 143_{(8)}}}$$

$$\overline{abcd}_{(8)}\geq 7635_{(8)}$$

a es cifra máxima de base 8

$a=7\ \wedge\ b\geq 6$

Descomponiendo, se reduce a la expresión

$$432=64b+9c+d$$

b ↓
6 Sí cumple
7 No cumple, $64\times 7=448$ se pasa

$$b=6\ \wedge\ 48=9c+d$$

$c=5$, $d=3$ (↓ 5 ↓ 3)

$\therefore\ a+b+c+d=21$

Clave E

PROBLEMA N.° 28

En el sistema de numeración octal, determine un número capicúa de cuatro cifras, tal que su complemento aritmético sea otro número capicúa de tres cifras. Dé como respuesta la suma de las cifras del número pedido.

A) 26 B) 32 C) 30
D) 28 E) 34

Resolución

Como un número de 4 cifras tiene por CA un número de 3 cifras, entonces la primera cifra del número inicial es máxima.

Aplicamos la regla práctica

$$\text{CA}(\overset{7778}{\overline{7aa7}}_{(8)})=\overline{bcb}_{(8)}$$

Se tiene

$8-7=b \rightarrow b=1$

$7-a=b \rightarrow a=6$

Nos piden la suma de cifras del capicúa de cuatro cifras

$2a+14=26$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Si se cumple que

$\text{CA}(\overline{abc}_{(n)})=\overline{adb}_{(n)}$; $\overline{ad}=\overline{d0}_{(n)}$ y $a<5$,

calcule la suma de valores de $(a+b+c+d+n)$.

A) 27 B) 32 C) 49
D) 47 E) 36

Resolución

Por el método práctico del CA de un número de base n.

- $\text{CA}[\overline{a\ b\ c}_{(n)}]=\overline{adb}_{(n)}$ (a y b: $n-1$; c: n)

  Se deduce que $b \neq 0$, el método práctico se aplica desde la última cifra:

  $n-1-a=a \wedge n-1-b=d \wedge n-c=b$

  $n=2a+1 \wedge n=b+d+1 \wedge n=b+c$ (I)

- $\overline{ad}=\overline{d0}_{(n)}$

  $10a+d=\underset{2a+1}{ⓝ}\cdot d$

  $10a+d=2a\cdot d+d$

  $10=2d \rightarrow d=5$

Por dato $a<5$, analizamos

$a \in \{4; 3; 2; 1\}$

Si $a=4$ entonces, reemplazando en (I)

$n=9;\ d=5$, $b=3;\ c=6$ $\Big\}$ $a+b+c+d+n=27$

Si $a=3$ entonces, reemplazamos en (I)

$n=7;\ d=5$, $b=1;\ c=6$ $\Big\}$ $a+b+c+d+n=22$

Si $a=2$, Si $a=1$ — No cumple

$\therefore\ a+b+c+d+n=$ 27 ; 22

suman $=49$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Se cumple lo siguiente:

- $\text{CA}(\overline{abc})+\text{CA}(\overline{den})=\overline{mpq}$
- $\text{CA}(\overline{mpq})=75$

Halle la suma de cifras del resultado de $\overline{137den}+\overline{54abc}$.

A) 20 B) 24 C) 30
D) 17 E) 19

Resolución

De los datos:

$$\text{CA}(\overline{abc}) + \text{CA}(\overline{den}) = \overline{mpq}$$

$$\overbrace{(10^3-\overline{abc})}+\overbrace{(10^3-\overline{den})}=\overline{mpq}$$

$$10^3+\underbrace{(10^3-\overline{mpq})}_{\text{CA}(\overline{mpq})=75}=\overline{abc}+\overline{den}$$

$$\rightarrow \overline{abc}+\overline{den}=1075$$

Luego, sumamos en forma vertical

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ \overline{137den}\ + \\ \overline{54abc} \\ \hline 192075 \end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 24.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 31

Calcule la suma de cifras de

$\overline{abcd}\times\overline{m00n}$ (0: cero),

si se sabe lo siguiente:

- $\overline{abcd}\times m=4272$
- $\overline{abcd}\times n=2848$

A) 39
B) 38
C) 35
D) 37
E) 36

Resolución

Tenemos por dato:

- $\overline{abcd}\times m=4272$
- $\overline{abcd}\times n=2848$

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & & & \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} & \times \\ & & & \overline{m} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{n} & \\ \hline & & & 2 & 8 & 4 & 8 & \longrightarrow n\times\overline{abcd} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 4 & 2 & 7 & 2 & & & & \longrightarrow m\times\overline{abcd} \\ \hline 4 & 2 & 7 & 4 & 8 & 4 & 8 & \end{array}$$

$$4+2+7+4+8+4+8=37$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 37.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 32

Si $\overline{abcd}=3\times\overline{ab}\times\overline{cd}$, halle el valor de $a+b+c+d$.

A) 15 B) 11 C) 9
D) 16 E) 19

Resolución

Sea $\overline{abcd}=3\times\overline{ab}\times\overline{cd}$

Descomponemos polinómicamente por bloques:

$$100\times\overline{ab}+\overline{cd}=3\times\overline{ab}\times\overline{cd}$$

$$100\times\overline{ab}=\overline{cd}(3\times\overline{ab}-1)$$

$$2\times2\times5\times5\times\overline{ab}=\overline{cd}\underbrace{(3\times\overline{ab}-1)}$$

$\overline{ab}$ No cumple

$2\times\overline{ab}$ No cumple

Luego, el mínimo valor de $3\times\overline{ab}-1$ es 29.

De donde

$$2\times5\times5=3\times\overline{ab}-1 \;\rightarrow\; \overline{ab}=17\text{, además}$$

$$2\times\overline{ab}=\overline{cd} \;\rightarrow\; \overline{cd}=34$$

$\therefore\; a+b+c+d=15$

Clave A

PROBLEMA N.° 33

Se multiplica un numeral capicúa de cuatro cifras por otro de tres cifras impares consecutivas crecientes y se obtiene que la suma de los productos parciales es 43 956.

Halle la suma de las cifras diferentes del numeral capicúa.

A) 12 B) 10 C) 14
D) 8 E) 16

Resolución

Sea:

- Numeral capicúa de 4 cifras: $\overline{abba}$
- Numeral de 3 cifras impares consecutivas crecientes:

  $\overline{n(n+2)(n+4)}$; (n es impar)

Se múltiplican

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & b & a & \times \\ & n & (n+2) & (n+4) & \\ \hline \end{array}$$

Productos parciales

$\longrightarrow (n+4)\times\overline{abba}$

$\longrightarrow (n+2)\times\overline{abba}$

$\longrightarrow n\times\overline{abba}$

Suma de productos parciales:

$$[n+4+n+2+n]\times\overline{abba}=43\,956$$

$$3\times(n+2)\times\overline{abba}=43\,956$$

$$\overbrace{(n+2)}^{\text{impar}}\times\overline{abba}=14\,652$$

$$\underbrace{(n+2)}_{3}\times\underbrace{\overline{abba}}_{4884}$$

5 No cumple
7 No cumple $\Big\rangle$ 14 652 no es $\overset{\circ}{5}$ ni $\overset{\circ}{7}$

Entonces

$n=1;\; a=4;\; b=8$

$\therefore\; a+b=12$

Clave A

PROBLEMA N.° 34

Si $\dfrac{\overline{abcd}}{9}=\dfrac{\overline{ab}\times\overline{cd}}{8}$

calcule la suma de valores posibles de $\overline{acdb}$.

A) 8689 B) 9846 C) 8468
D) 9864 E) 8754

Resolución

Sea

$$\frac{\overline{abcd}}{9}=\frac{\overline{ab}\times\overline{cd}}{8}$$

$$800\times\overline{ab}+8\times\overline{cd}=9\times\overline{ab}\times\overline{cd}$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} 800\times\overline{ab}&=\overline{cd}\times(9\times\overline{ab}-8)\\ 8\times\overline{cd}&=\overline{ab}\times(9\times\overline{cd}-800)\end{aligned}\right\}\times$$

$$6400=(9\times\overline{ab}-8)\underbrace{(9\times\overline{cd}-800)}_{>0\;\rightarrow\; c:\,8\text{ ó }9}$$

- Con $c=8$:

$$6400=(9\times\overline{ab}-8)(9\times d-80)$$
$$\downarrow$$
$$9$$

$\rightarrow\ \nexists\ \overline{ab}$

- Con $c=9$:

$$6400=(9\times\overline{ab}-8)(9\times d+10)$$

$$\frac{6400}{(9\times d+10)}=9\times\overline{ab}-8\ \in\mathbb{Z}^{+}$$

$\rightarrow d$: 0 ó 6

Si $d=0$:

$$640=9\times\overline{ab}-8\ \rightarrow\ \overline{ab}=72$$

Si $d=6$:

$$100=9\times\overline{ab}-8\ \rightarrow\ \overline{ab}=12$$

Entonces

$$\overline{acdb}=\begin{cases}7902\\1962\end{cases}$$

$\therefore\ 7902+1962=9864$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Si $\overline{abcd}\times117_{(8)}=\overline{xy8953}$, calcule $m+n$.

Además, se sabe que

$$\overline{m(b-1)(d+1)}_{(a)}=\overline{nn(b-1)(c+4)}_{(x+1)}.$$

A) 6
B) 10
C) 8
D) 19
E) 7

Resolución

- Reconstruyendo la multiplicación, tenemos,

$$\overline{abcd}\times\underbrace{117_{(8)}}_{79}=\overline{xy8953}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & & 7 & 9\ \times\\ & & a & b & c & d\\ \hline & & & 5 & 5 & 3\\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & 4 & 7 & 4 & & \\ 7 & 1 & 1 & & & \\ \hline x & y & 8 & 9 & 5 & 3\\ \downarrow & \downarrow & & & & \\ 7 & 5 & & & & \end{array}$$

- $9\times d=\ldots3$ $\downarrow$ 7
- $9\times c=\ldots0$ $\downarrow$ 0
- $9\times b=\ldots4$ $\downarrow$ 6
- $9\times a=\ldots1$ $\downarrow$ 9

$a=9;\quad b=6;\quad c=0;\quad d=7;\quad x=7,\quad y=5$

- Reemplazamos

$$\underbrace{\overline{m58}_{(9)}}=\underbrace{\overline{nn54}_{(8)}}$$

$$\overset{\circ}{8}+m+5+8=\overset{\circ}{8}+4$$

$$m=\overset{\circ}{8}-1$$

$$m=7$$

$$758_{(9)}=\overline{nn54}_{(8)}$$

$\downarrow$ cambiando de base: $758_{(9)}=1154_{(8)}$

$$\rightarrow\ 1154_{(8)}=\overline{nn54}_{(8)}$$
$$n=1$$

$\therefore\ m+n=8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 36

Si $\overline{cvcv}_{(7)} \times \overline{cv}_{(7)} = \overline{aaccaa}_{(7)}$; $a < c < v$
calcule $a+c+v$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

Sea $\overline{cvcv}_{(7)} \times \overline{cv}_{(7)} = \overline{aaccaa}_{(7)}$; $a < c < v$

Vemos que

$0 < a < c < v < 7$

a ↓ 1, 2, 3, 4

Descomponemos polinómicamente

$$\underbrace{50 \times \left[\overline{cv}_{(7)}\right]^2}_{...0} = 19216a + 392c$$

a	c	
1	2	
2	4	
3	1	No cumple
3	6	No cumple
4	3	No cumple

- Con $a=1 \wedge c=2$

  $50 \times \left[\overline{cv}_{(7)}\right]^2 = 20\,000$

  $\overline{cv}_{(7)} = 20 = 26_{(7)} \rightarrow v=6$

- Con $a=2 \wedge c=4$

  $50 \times \left[\overline{cv}_{(7)}\right]^2 = 40\,000$

  $\left[\overline{cv}_{(7)}\right]^2 = 800$ No cumple

$\therefore\ a+c+v=9$

Clave B

PROBLEMA N.° 37

Dado que

$\overline{aba}_{(9)} \times \overline{ab}_{(9)} = \overline{cde7(a-3)}_{(9)}$; $a > b$

calcule $a+b+c+d+e$.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

Resolución

Por la última cifra

$$\underbrace{\overline{aba}_{(9)}} \times \underbrace{\overline{ab}_{(9)}} = \underbrace{\overline{cde7(a-3)}_{(9)}} \quad (a > b)$$

$$(\overset{o}{9} + a) \times (\overset{o}{9} + b) = \overset{o}{9} + a - 3$$

$$a \times b = \overset{o}{9} + a - 3$$

considerando

$$a \times \underbrace{(b-1)} = \overset{o}{9} + 6 = \overset{o}{3} \quad \begin{cases} a \geq 3 \\ a > b \end{cases}$$

Cumple 5 3

$\rightarrow\ a=5 \wedge b=4$

Luego

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 5_{(9)} \times \\ 5\ 4_{(9)} \\ \hline 2\ 4\ 0\ 2_{(9)} \\ 3\ 0\ 4\ 7_{(9)}\ \ \\ \hline c\ d\ e\ 7\ 2_{(9)} \end{array}$$

c, d, e ↓ 3 2 8

$c=3$; $d=2$; $e=8$

$\therefore\ a+b+c+d+e=22$

Clave B

PROBLEMA N.° 38

Si $\overline{cvcv}_{(7)}\times\overline{cv}_{(7)}=\overline{aaccaa}_{(7)}$; $a < c < v$,

calcule $S=\overline{cva}_{(7)}+\overline{vac}_{(7)}+\overline{acv}_{(7)}$.

A) $1332_{(7)}$ B) $1232_{(7)}$ C) $1552_{(7)}$

D) $1442_{(7)}$ E) $1333_{(7)}$

Resolución

En el problema **36**, se encontraron los valores

$a=1$; $c=2 \wedge v=6$

Piden

$S=\overline{cva}_{(7)}+\overline{vac}_{(7)}+\overline{acv}_{(7)}$

Luego

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\phantom{_{(7)}} \\ \overline{c\ v\ a}_{(7)}\ + \\ \overline{v\ a\ c}_{(7)} \\ \overline{a\ c\ v}_{(7)} \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2_{(7)} \end{array}$$

Orden 1:

$a+c+v=9=1(7)+2$

↓ llevo ↓ queda

Orden 2:

$9+\boxed{1}=10=1(7)+3$

↓ llevo ↓ queda

Orden 3:

$9+\boxed{1}=10=1(7)+3$

↓ llevo ↓ queda

$\therefore\ S=1332_{(7)}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

Se cumple lo siguiente:

- $\overline{ab}_{(7)}\times\overline{ba}_{(7)}=\overline{bb(a-1)(b+1)}_{(7)}$
- $\overline{ab}_{(8)}\times\overline{ba}_{(8)}=\overline{(b-1)(a+1)(a+1)(b-1)}_{(8)}$

Calcule $a\times b$.

A) 24 B) 15 C) 18

D) 21 E) 16

Resolución

Analizamos la última cifra:

- $\overline{a\underline{b}}_{(7)}\times\overline{b\underline{a}}_{(7)}=\overline{bb(a-1)(\underline{b+1})}_{(7)}$ (I)

$=\overset{\circ}{7}+b+1$

- $\overline{ab}_{(8)}\times\overline{ba}_{(8)}=\overline{(b-1)(a+1)(a+1)(b-1)}_{(8)}$

$=\overset{\circ}{8}+b-1$

Entonces

$b\times a=\overset{\circ}{7}+b+1 \ \wedge\ b\times a=\overset{\circ}{8}+b-1$

$b(a-1)=\overset{\circ}{7}+1 \ \wedge\ b(a-1)=\overset{\circ}{8}-1$

$$b\times(a-1)=\begin{cases}\overset{\circ}{7}+1+14\\ \overset{\circ}{8}+7+8\end{cases}$$

$\rightarrow\ b\times(a-1)=\overset{\circ}{56}+15$

b	$(a-1)$	
5	3	15
3	5	

Verificando en (I)

solo cumple para:

$a=6 \ \wedge\ b=3$

$\therefore\ a\times b=18$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Si

$\overline{(a+2)6} \times \overline{a9} = \overline{(a+5)8n}$,

halle $a+n$

A) 7 B) 12 C) 6
D) 5 E) 8

Resolución

Sea

$$\underbrace{\overline{(a+2)6} \times \overline{a9}}_{...4} = \overline{(a+5)8n}$$

$$n \downarrow 4$$

Vemos que

$(a+5) < 10$

$\rightarrow a < 5$

También

$\overline{(a+2)6} \times \overline{a9} = \overline{(a+5)84}$

a:
1 Sí cumple
2
3 No cumplen
4 (el producto tiene 4 cifras)

$\therefore\ a+n=5$

Clave D

PROBLEMA N.° 41

Al dividir $\overline{ab7a}$ entre $\overline{ba}$, se obtuvo como cociente 67 y residuo:

$$\overline{(b-a)(b-a)}$$

Calcule $(a+b)$

A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución

De la división

$\overline{ab7a}$ | $\overline{ba}$; $(b \neq 0)$

67

$r=\overline{(b-a)(b-a)}$

Por el algoritmo de la división

$$\underbrace{\overline{ab7a}}_{\overset{\circ}{10}+a} = \underbrace{\overline{ba}}_{\overset{\circ}{10}+a} \times \underbrace{67}_{\overset{\circ}{10}+7} + \underbrace{\overline{(b-a)(b-a)}}_{\overset{\circ}{10}+b-a}$$

$$\overset{\circ}{10}+a = \overset{\circ}{10}+7a + \overset{\circ}{10}+b-a$$

$$\underbrace{\overset{\circ}{10}}_{\overset{\circ}{5}} = \underbrace{5a}_{\overset{\circ}{5}}+b$$

$\rightarrow b=\overset{\circ}{5}$, luego: $b=5$

Reemplazamos

$\overline{a57a}=\overline{5a}\times 67+\overline{(5-a)(5-a)}$

Descomponemos

$1001a+570=(50+a)\times 67+55-11a$

Resolviendo tenemos

$\rightarrow a=3$

$\therefore\ a+b=8$

Clave B

PROBLEMA N.° 42

Halle el mayor número entero tal que, al dividirlo entre 137, se obtiene por resto un número que es el cuádruple del cociente.

A) 3148 B) 5124 C) 5117
D) 4794 E) 4612

Resolución

Del enunciado tenemos

$$\begin{array}{l|l} N & 137 \\ \hline & q \end{array}$$

$r=4q$

$\rightarrow\ N=137q+r=141q$

Piden el mayor valor de N, para ello q debe tomar su máximo valor.

Sabemos que: residuo < divisor

$r<137$

$4q<137$

$q<34{,}25$

$\downarrow$

34

$\therefore\ N=141(34)=4794$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 43

Se tiene un número que al ser dividido por 23 da como residuo el doble del cociente. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) 14

Resolución

De los datos:

$$\begin{array}{l|l} N & 23 \\ \hline r & q \end{array} \quad \wedge \quad r=2q$$

Sólo depende del valor que tome q

$\rightarrow\ N=23q+2q$

Importante:

residuo < divisor

$2q<23$

$q<11{,}5$

$q\in\{1;2;3;...;11\}$

Por lo tanto, 11 valores de q nos dan 11 valores de N.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

Halle $a+b+c$, si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{l|l} \overline{ababl} & \overline{ba} \\ \underline{---} & \overline{66c} \\ \quad\overline{abb} & \\ \quad\underline{---} & \\ \quad\ \overline{acl} & \\ \quad\ \underline{---} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

A) 10 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

Resolución

Sea

$$\begin{array}{rl|l} & \overline{ababl} & \overline{ba} \\ \text{(I)} \longrightarrow & \underline{---} & \overline{66c} \\ & \quad\overline{abb} & \\ \text{(II)} \longrightarrow & \quad\underline{---} & \\ & \quad\ \overline{acl} & \\ & \quad\ \underline{---} & \\ & \qquad 0 & \end{array}$$

En (I)

$\overline{aba}-6\times\overline{ba}=\overline{ab}$

Descomponemos polinómicamente

$(101a+10b)-6\times(10b+a)=10a+b$

$85a=51b$

$5a=3b$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3 \quad 5$

En (II)

$\overline{abb}-6\times\overline{ba}=\overline{ac}$

Reemplazando, tenemos

$355-6\times53=\overline{3c}$

$37=\overline{3c}$

$\downarrow$

7

$\therefore\ a+b+c=15$

Clave B

PROBLEMA N.° 45

En una división inexacta, al residuo le faltan 35 unidades para ser máximo y le sobran 29 unidades para ser mínimo. ¿Cuál es el valor del dividendo, si el cociente es 23?

A) 1629 B) 1654 C) 1548
D) 1327 E) 1249

Resolución

En la división inexacta

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q=23 \end{array}$$

Se cumple:

$$\begin{cases} r_{\text{máximo}}=d-1 \\ r_{\text{mínimo}}=1 \end{cases}$$

Por dato:

$r+35=d-1 \ \wedge \ r-29=1$

Entonces

$r=30 \ \wedge \ d=66$

En el algoritmo de la división

$D=d\times q+r$

$D=66\times23+30$

$\therefore\ D=1548$

Clave C

PROBLEMA N.° 46

Cierto ganadero agrupa sus animales en grupos de 19 cada uno, tras lo cual le sobran cierta cantidad de animales. Si compra 264 animales y los vuelve a agrupar, el número de grupos aumenta en 14 y le sobrarían 5 animales. Indique la mayor cantidad de animales que tenía inicialmente si esta era menor de 550.

A) 539 B) 541 C) 543
D) 545 E) 547

Resolución

Inicialmente tenía N animales.

Del enunciado, tenemos

$$\begin{array}{l|l} N & 19 \\ \hline r & q \end{array} \quad ; \quad N<550 \ (\downarrow \text{máximo})$$

$N=19\cdot q+r$

Luego

$$\begin{array}{l|l} r+264 & 19 \\ \hline 5 & (14) \end{array} \leftarrow \text{aumento del cociente}$$

$\rightarrow\ r+264=19\times14+5$

$\rightarrow\ r=7$

Luego en N

$N=19\cdot q+7<550$

Para que N sea máximo, q debe tomar su máximo valor, entonces:

$q<28{,}57$

↓

28 (máximo)

$\rightarrow\ N=19(28)+7$

$\therefore\ N=539$

Clave A

PROBLEMA N.° 47

En una división inexacta, se observa que el divisor es cuatro veces más que el residuo, y si al residuo se le disminuye 17, este sería mínimo (la división sigue siendo inexacta). Halle la suma de cifras del dividendo si el cociente es los 5/3 del residuo.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 24 E) 27

Resolución

En la división, tenemos

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Por dato:

- $d=5r$
- $r-17=r_{mínimo}$

  $r-17=1\ \rightarrow\ r=18$

Tenemos

$r=18\ \wedge\ d=90$

Además

$$q=\frac{5}{3}(18)=30$$

El dividendo es

$D=d\times q+r$

$D=90\times 30+18$

$D=\underbrace{2718}_{2+7+1+8=18}$

Por lo tanto, la suma de cifras del dividendo es 18.

Clave A

PROBLEMA N.° 48

Si en una división inexacta al dividendo se le multiplica por 3 (pero no al divisor), el residuo se hace cero. Halle la suma del cociente y residuo original si la suma de los cocientes es 22 y el nuevo cociente excede en 5 al residuo original.

A) 8 B) 17 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

De los datos:

$$\left.\begin{array}{r} q_{original}+q_{nuevo}=22 \\ q_{nuevo}-r_{original}=5 \end{array}\right\rbrace(-)$$

$\therefore\ q_{original}+r_{original}=17$

Clave B

PROBLEMA N.° 49

Al dividir $\overline{abcd}_{(11)}$ entre $\overline{cd}_{(11)}$ la división es exacta con cociente igual a $121_{(11)}$.
Si $\overline{cdab}_{(11)}$ es igual al producto de tres números pares consecutivos, halle el menor valor de $\overline{ab}+\overline{cd}$.

A) 44 B) 63 C) 54
D) 45 E) 66

Resolución

- De la división, tenemos

$$\underbrace{\overline{ab}}\underbrace{\overline{cd}}_{(11)}=\overline{cd}_{(11)}\times 121_{(11)}$$

Descomponiendo por bloques

$$\overline{ab}_{(11)}\times 11^2+\overline{cd}_{(11)}=\overline{cd}_{(11)}\times 144$$

$$\overline{ab}_{(11)}\times 11^2=\overline{cd}_{(11)}\times 143$$

$$\frac{\overline{ab}_{(11)}}{\overline{cd}_{(11)}}=\frac{13}{11}\Bigg\}\ \begin{matrix}\overline{ab}_{(11)}=13K\\ \overline{cd}_{(11)}=11K\end{matrix}$$

- Por dato:

$$\underbrace{\overline{cd}}\underbrace{\overline{ab}}_{(11)}=\underbrace{(2n)(2n+2)(2n+4)}_{\text{3 factores pares}}$$

$$\underbrace{\overline{cd}_{(11)}}_{11K}\times 11^2+\underbrace{\overline{ab}_{(11)}}_{13K}=2\times2\times2\times n(n+1)(n+2)$$

$$1344\times K=8\times n(n+1)(n+2)$$

$$6\times7\times4K=n(n+1)(n+2)$$

$$\underbrace{2\ \ 6}_{8}\ \ 7\ \ \ 8$$

El mínimo valor de K es 2, luego

$$\underbrace{\overline{ab}_{(11)}=13\times2}\ \wedge\ \underbrace{\overline{cd}_{(11)}=11\times 2}$$

$$\overline{ab}_{(11)}=24_{(11)}\qquad \overline{cd}_{(11)}=20_{(11)}$$

$$a=2\wedge b=4\qquad c=2\ \wedge d=0$$

$\therefore\ \overline{ab}+\overline{cd}=24+20=44$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 50

En una división, el dividendo es par, el divisor es $\overline{(2n-1)(n+2)}$, el cociente es $\overline{(a-1)(3a)}$ y el residuo $\overline{(b^3)(b^4-9)}$. Calcule la suma de los términos de la división si se realiza por exceso.

A) 3007 B) 3017 C) 3027
D) 3037 E) 3047

Resolución

Del enunciado:

$$D\ \underline{|\ d\ }\ \to\ \underset{\text{par}}{D}=d\times q+r \qquad \text{(I)}$$
$$r\qquad q$$

Analizando los términos

$$r=\overline{(b^3)(b^4-9)}\ \to\ b=2\ \therefore\ r=87$$

Reemplazamos en (I)

$$D=d\times q+87$$

$$\to\ d\times q \text{ debe ser impar }\begin{cases}d\text{: impar}\\ q\text{: impar}\end{cases}$$

Luego

$$q=\overline{(a-1)(3a)}=29$$

↓
2 No cumple
3 Sí cumple

Como

$$d=\overline{(2n-1)(n+2)}$$

↳ 1; 3; 5

Además, sabemos que

$$r<d$$

$$87<d\ \to\ n=5\ \wedge\ d=97$$

Luego

$$D=97\times29+87=2900$$

Piden la suma de los términos de la división por exceso

$$2900\ \underline{|\ 97\ }$$
$$10\qquad q+1=30$$

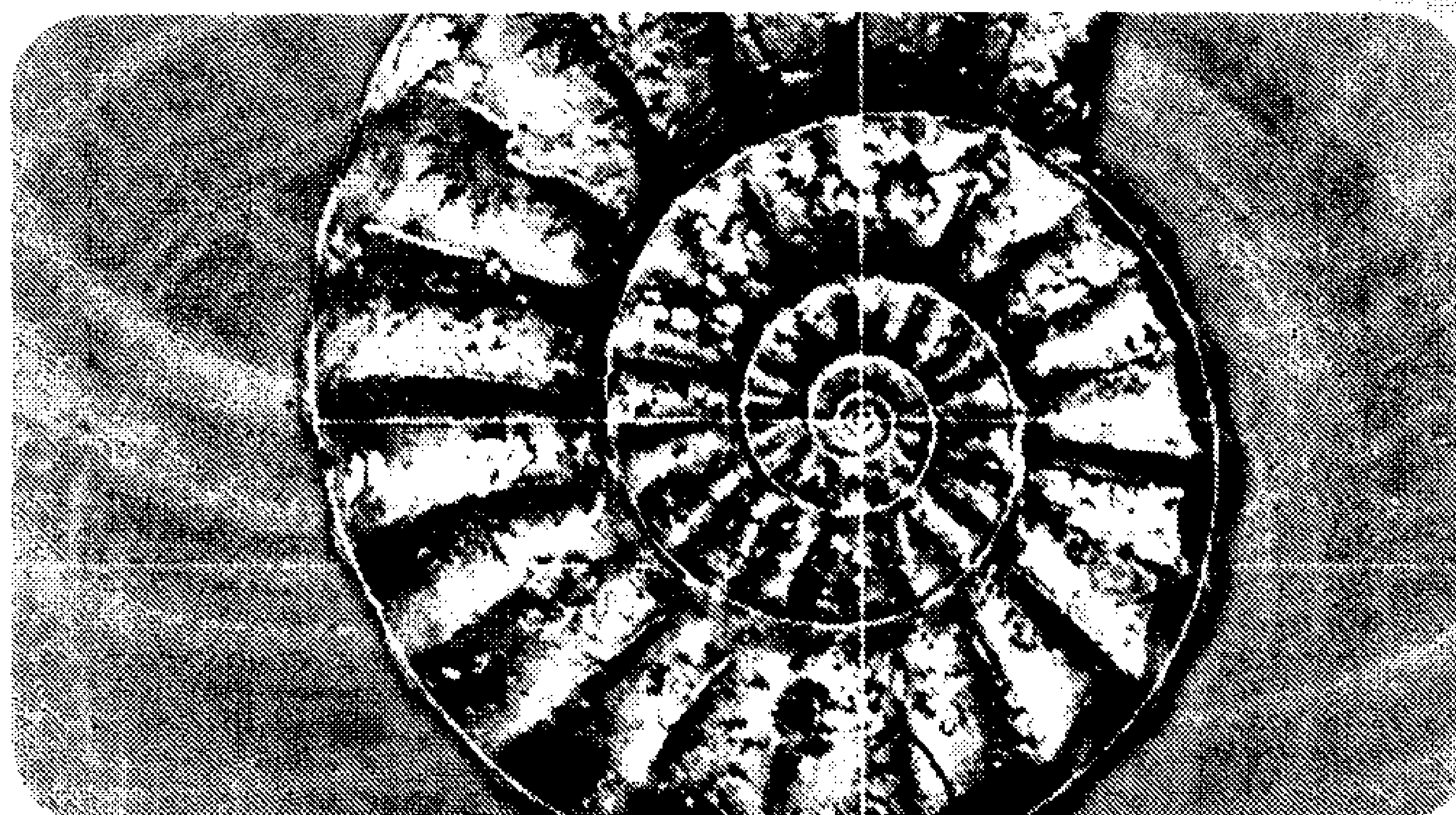
Por lo tanto, la suma de términos es 3037.

Clave **D**

Capítulo

6

Sucesiones



Los principios generales de divisibilidad son una consecuencia del desarrollo que había alcanzado la teoría de los números. Los hindúes, por ejemplo, llegaron a conocer la divisibilidad por tres, nueve y siete. Griegos y egipcios establecieron la clasificación de los números en pares o impares. El genial matemático francés Blas Pascal (1623-1662), propuso las reglas para determinar la divisibilidad por cualquier número.

Euclides, hacia el 300 a. n. e., demostró en sus *Elementos*, los teoremas básicos de la divisibilidad de los números enteros, lo que permitió a Gauss, en 1801, deducir el teorema fundamental de la aritmética. Además Gauss, en una de las secciones de su obra *Disquisitiones arithmeticae*, presenta una revolucionaria notación aritmética: las congruencias.

Dados dos números enteros a y b, si su diferencia ($a-b$ o $b-a$) es divisible por el número m, decimos que a y b son congruentes respecto al módulo m, y simbolizamos esto escribiendo $a \equiv b$ (mód m).

Así, $100 \equiv 30$ (mód 7), $45 \equiv 100$ (mód 11).

Capítulo 6

Sucesiones

PROBLEMA N.° 1

Si $S=2+6+12+20+30+42+...+600$,
halle S y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Observación

Tenemos

$$\underbrace{1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)}_{n\text{ términos}}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Nos piden

$S=2+6+12+20+...+600$

Tiene la forma

$$S=\underbrace{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+...+24\times25}_{24\text{ términos}}$$

$$S=\frac{24\times25\times26}{3}\ \rightarrow\ S=5200$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$5+2=7$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Sea la P. A. $\overline{4a6}$; ...; $\overline{68b}$; $\overline{6c(b-2)}$; $\overline{70d}$, en la que el término del trigésimo lugar es $\overline{68b}$.
Calcule $a+b+c+d$.

A) 26 B) 24 C) 30
D) 25 E) 13

Resolución

Tenemos la P. A.

$\overline{4a6}$; ...; $\overline{68b}$; $\overline{6c(b-2)}$; $\overline{70d}$

Se observa que la P. A. es creciente $\rightarrow$ $c=9$

Hallemos la razón (r)

$r=\overline{69(b-2)}-\overline{68b}$

$r=690+(b-2)-[680+b]=8$

Recuerda

$t_n=t_1+(n-1)r$

$t_{30}=\overline{4a6}+29\times8=\overline{68b}$

$10\times a=42+b$

$\downarrow \quad \downarrow$

$5 \quad 8$

$...0$

Luego, en la P.A.

$\overline{6c(b-2)}+8=\overline{70d}=704$

$\downarrow$

4

$\therefore\ a+b+c+d=26$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

En la siguiente progresión aritmética: $\overline{21}_{(n)}$; $\overline{1(n+1)}_{(5)}$; $14_{(a)}$;..., calcule la suma de los $2a$ primeros términos.

A) 160 B) 240 C) 280
D) 290 E) 300

Resolución

En la progresión aritmética

$$21_{(n)};\ \overline{1(n+1)}_{(5)};\ 14_{(a)};\ \dots\ (2a \text{ términos})$$

con razón r entre términos consecutivos.

Observación

Comparando: cifra < base

$n+1<5 \wedge n>2 \rightarrow n<4 \wedge n>2$

$\therefore\ n=3$

Reemplazamos en la P.A.

$$\underbrace{21_{(3)}}_{7};\ \underbrace{14_{(5)}}_{9};\ \underbrace{14_{(a)}}_{a+4};\ \dots$$

$r=2$ $r=2$

$9+2=a+4$, entonces $a=7$

$\left.\begin{array}{l} a=7 \\ r=2 \end{array}\right\}$ • $t_0=7-2=5$
• $t_n=t_0+nr \rightarrow t_n=5+n\cdot 2$

El término de lugar $2a=14$ es

$t_{14}=5+14\times 2$

$t_{14}=33$

Luego, la suma de los 14 primeros términos es

$$S=\left(\frac{t_1+t_{14}}{2}\right)\times 14$$

$$S=\left(\frac{7+33}{2}\right)\times 14=280$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

En la siguiente creciente $\overline{ab}$; $\overline{ba}$; $\overline{cd}$; ...; $\overline{pq}$, se cumple que la suma de los tres primeros términos es 96; además, la P.A. posee p términos. Calcule $(p-q)$ máximo.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 0

Resolución

En la siguiente P.A.

$\overline{ab}$; $\overline{ba}$; $\overline{cd}$; ...; $\overline{pq}$

$\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{cd}=96$

$(+)$: $\overline{ab}+\overline{cd}=2\times\overline{ba}$

$3\overline{ba}=96 \rightarrow \overline{ba}=32$

Hallamos la razón (r)

$r=\overline{ba}-\overline{ab}=32-23=9$

Luego

$$\underbrace{23;\ 32;\ \overline{cd};\ \dots;\ \overline{pq}}_{p \text{ términos}}$$

$t_p=23+(p-1)\times r$

$\overline{pq}=23+(p-1)9$

$p+q=14$

p	q
9	5
8	6
7	7
6	8
5	9

Piden $(p-q)$ máximo.

$\therefore\ p-q=4$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

Si se escriben todos los numerales desde la unidad hasta $\overline{abc}_{(6)}$ (todos en base 6), la cantidad de cifras usadas coincide con la cantidad de numerales de la forma $\overline{p(p+3)n}_{(K)}$.
Dado que $\overline{abc}_{(6)}=\text{MCD}(10!;\ (n+6)!;\ 5!)$, determine K.

A) 20 B) 22 C) 16
D) 18 E) 24

Resolución

- $\overline{abc}_{(6)}=\text{MCD}(10!;\ (n+6)!;\ \underline{5!})$
  ↓
  Es el menor de los factoriales.

$\rightarrow\ \overline{abc}_{(6)}=5!$, luego

$\overline{abc}_{(6)}=120$

$\overline{abc}_{(6)}=320_{(6)}$

$\rightarrow\ a=3\ \wedge\ b=2\ \wedge\ c=0$

- Por dato:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de cifras}\\ \text{usadas desde } 1_6\\ \text{hasta } 320_{(6)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de nume-}\\ \text{rales de la forma}\\ \overline{p(p+3)n}_{(K)}\end{array}\right)$$

$$(320_6+1)\times 3-111_6\ =\ (K-4)\ \times\ K$$

$$320=\underbrace{(K-4)}_{16}\times\underbrace{K}_{20}$$

$\therefore\ K=20$

Observación

$\underbrace{1;2;3;4;\ldots;N}$ (N tiene K cifras)

Cantidad de cifras: $(N+1)\times K-\underbrace{111\ldots1}_{K\text{ cifras}}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

En la siguiente sucesión:

$12_{(a)};\ 23_{(a+1)};\ 34_{(a+2)};\ \ldots$

se cumple que la diferencia entre el 18.° y 10.° término es 264. Calcule la suma de cifras del numeral correspondiente a la base vigesimal.

A) 22
B) 23
C) 32
D) 33
E) 42

Resolución

Se tiene

$$\overset{t_1}{\downarrow}12_{(a)};\ \overset{t_2}{\downarrow}23_{(a+1)};\ \overset{t_3}{\downarrow}34_{(a+2)};\ \ldots;\ \overset{t_{10}}{\downarrow}(10)(11)_{(a+9)};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \overset{t_{18}}{\downarrow}(18)(19)_{(a+17)}$$

Donde

$t_{18}-t_{10}=264$

$[18(a+17)+19]-[10(a+9)+11]=264$

$8a=40\ \rightarrow\ a=5$

Piden la suma de cifras del numeral correspondiente a la base vigesimal.

Veamos

$$\begin{array}{lccccc} & t_1 & ; & t_2 & ; & t_3;\ \ldots;\ t_{16}\\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \qquad \uparrow\\ \text{base:} & 5 & ; & 6 & ; & 7;\ \ldots;\ 20\end{array}$$

Luego

$t_{(16)}=(16)(17)_{(20)}$

$\therefore\ 16+17=33$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

Calcule cuántos términos tiene la siguiente secuencia:
9; 12; 15; 16; 21; 20;...; 87; 64.

A) 28
B) 24
C) 34
D) 16
E) 23

Resolución

La secuencia

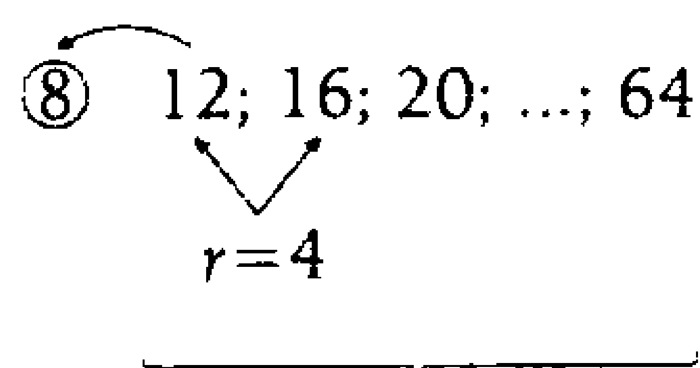
9; 12; 15; 16; 21; 20; ...; 87; 64

Se observa:

- Los términos pares aumentan de 4 en 4 (P. A.).
- Los términos impares aumentan de 6 en 6 (P. A.).

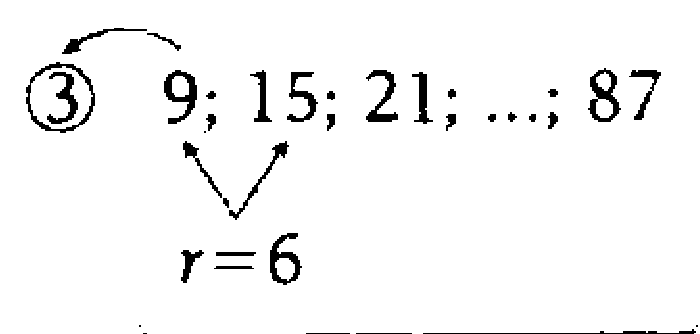
Se divide en dos P. A.

1.°



n.° de términos: $\frac{64-8}{4}=14$

2.°



n.° de términos: $\frac{87-3}{6}=14$

Por lo tanto, en total son
$14+14=28$ términos

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Se divide 40 en cuatro partes que están en progresión aritmética creciente, de modo que el producto de los términos extremos sea al producto de los medios como 2 es a 3. Indique el producto del segundo y cuarto término de dicha P. A.

A) 64
B) 60
C) 128
D) 48
E) 120

Resolución

Sea la P.A. creciente:
$a;\ a+r;\ a+2r;\ a+3r$

Donde: suma de términos=40
$2a+3r=20$ (I)

Además

$$\frac{a(a+3r)}{(a+r)(a+2r)}=\frac{2}{3}$$

Resolvemos
$r=a$ Sí cumple
$r=-\frac{a}{4}$ No cumple (P. A. es creciente)

Reemplazamos en (I)
$a=r=4$
$\therefore\ (a+r)(a+3r)=8\times16=128$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Halle cuántos tipos de imprenta se necesitan para numerar las 500 últimas páginas de un libro que tiene 637 hojas.

A) 1625
B) 1775
C) 1425
D) 1745
E) 3989

Resolución

- Un tipo de imprenta <> una cifra
- Tiene 637 hojas <> 1274 páginas.
- Veamos las 500 últimas páginas.

$$1;\,2;\,3;\ldots;\ \overbrace{\underbrace{\ldots;\,999}_{\substack{225\text{ páginas}\\ \text{de 3 cif. c/u}}}\ ;\ \underbrace{1000;\ldots;\,1274}_{\substack{275\text{ páginas}\\ \text{de 4 cif. c/u}}}}^{500\text{ páginas}}$$

Cantidad de cifras:

$225\times3+275\times4=1775$

Por lo tanto, se necesitan 1775 cifras.

Clave B

PROBLEMA N.° 10

De la siguiente P.A.

$16_{(m)};\ \overline{bn}_{(p)};\ \overline{cm}_{(n)};\ \ldots;\ \overline{42p}$

halle $m+n+p+b+c$

A) 34 B) 26
C) 28
D) 29 E) 30

Resolución

En la P.A.:

$16_{(m)};\ \overline{bn}_{(p)};\ \overline{cm}_{(n)};\ \ldots;\ \overline{42p}$

Vemos que:

$$6<m<n<p<10$$
$$m=7,\quad n=8,\quad p=9$$

Reemplazamos

$16_{(7)};\ \overline{b8}_{(9)};\ \overline{c7}_{(8)};\ \ldots;\ 429$

Luego, se cumple:

$\overline{b8}_{(9)}-16_{(7)}=\overline{c7}_{(8)}-\overline{b8}_{(9)}$

$18b=8c+4$

$\underbrace{9b}_{\text{par}}=\underbrace{4c+2}_{\text{par}};\ c<8$

$b=2,\quad c=4$

$\therefore\ m+n+p+b+c=30$

Clave E

PROBLEMA N.° 11

En una P.A., la suma del quinto y noveno término es la mitad del trigésimo primer término. Halle la suma de los 10 primeros términos, si el primer término es 2.

A) 65
B) 280
C) 270
D) 265
E) 325

Resolución

- El primer término es 2

$t_1=2$

Como: $t_n=t_1+(n-1)r \rightarrow t_n=2+(n-1)r$
$t_5=2+4r$
$t_9=2+8r$

- Dato:

$t_5+t_9=\frac{t_{31}}{2}$

$\rightarrow (2+4r)+(2+8r)=\frac{2+30r}{2}$

$r=1$

La P.A. es

$$\underbrace{2\ ;\ 3\ ;\ 4;\ ...;\ 11}_{10\text{ términos}}$$

($r=1$, $r=1$)

La suma de los 10 primeros términos es

$\left(\frac{2+11}{2}\right)\times 10=65$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Si $S_n=3n^2+n$ nos da la suma de los términos de una progresión aritmética de n términos, calcule el promedio aritmético de los términos de lugar 15; 20 y 25.

A) 116 B) 120 C) 132
D) 118 E) 140

Resolución

Sea la P.A.
$t_1; t_2; t_3; ...; t_n$

Se tiene que $S_n=3n^2+n$

Entonces:

$n=1$; $S_1=t_1=3(1)^2+1=4$

$n=2$; $S_2=t_1+t_2=3(2)^2+2=14$

$\rightarrow t_2=10$

Luego

razón$=r=t_2-t_1=6$

Piden

$\overline{MA}(t_{15}; t_{20}; t_{25})=\frac{t_{15}+t_{20}+t_{25}}{3}$

$\overline{MA}(t_{15}; t_{20}; t_{25})=\frac{(t_{20}-5r)+t_{20}+(t_{20}+5r)}{3}$

$\overline{MA}(t_{15}; t_{20}; t_{25})=t_{20}\ \wedge$

$t_{20}=t_1+19r=4+19(6)=118$

$\therefore \overline{MA}(t_{15}; t_{20}; t_{25})=118$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Se define una sucesión mediante
$a_1=4$; $a_{(n)}=28(n-1)+4n$; $\forall\ n>1$; $n\in\mathbb{N}$
Además, A resulta de la diferencia entre a_7 y a_9. Dada la siguiente progresión aritmética:

$\overline{ab}_{(n)}; \overline{a(b+3)}_{(n)}; \overline{(2b)2}_{(n)}; ...; \overline{a(a+b)b}_{(n)}$

que tiene 41 términos, $B=a+b+n$ y C es la suma de los 16 términos que presenta la progresión aritmética mostrada

$\overline{ppp}; \overline{pq4}; \overline{pr1}; \overline{(q-1)r(r-1)}...$

Calcule $A+B+C$.

A) 13 351
B) 13 350
C) 13 352
D) 13 347
E) 13 354

Resolución

Por dato:

$a_1=4$

$a_n=28(n-1)+4n$ ($\forall$ $n > 1; n \in \mathbb{N}$)

$a_n=32n-28$

Además

$A=a_9-a_7$

$A=(32\times 9-28)-32\times 7-28)$

$A=64$

En la P.A. de 41 términos:

$\overline{ab}_{(n)}; \overline{a(b+3)}_{(n)}; \overline{(2b)2}_{(n)}; ...; \overline{a(a+b)b}_{(n)}$

$r=3$ $r=3$

Analizamos

$$\begin{array}{rl} & ^{1} \\ t_2: & \overline{a\,(b+3)}_{(n)} + \\ & \;3 \\ t_3: & \overline{(2b)\;2}_{(n)} \end{array}$$

- $b+3+3=12_{(n)}$
  $b+4=n$
  $b=n-4$

- $a+1=2b$
  $a+1=2(n-4)$
  $a=2n-9$

Como

$t_{41}=t_1+40\cdot r$

Reemplazando

$\overline{a(a+b)b}_{(n)}=\overline{ab}_{(n)}+40\times 3$

$\rightarrow$ $\overline{ab0}_{(n)}=120$

En base 10

$an^2+bn=120$

$n[an+b]=120$

Reemplazamos

$n[(2n-9)n+(n-4)]=120$

$n[2n^2-8n-4]=120$

$n=6$

$\rightarrow$ $b=2 \wedge a=3$

$\therefore$ $B=a+b+n=11$

- C es la suma de los 16 primeros términos de la P.A.

  $\overline{ppp}; \overline{pq4}; \overline{pr1}; \overline{(q-1)r(r-1)}$

  La razón es

  $\overline{pq4}-\overline{ppp}=\overline{pr1}-\overline{pq4}$

  $...4-...p = ...7$

  $\downarrow$

  7

  $p=7$; luego, la P.A. es

  $777; \overline{7q4}; \overline{7r1}; \overline{(q-1)r(r-1)}$

  $q=8$, $r=9$; $7\;9\;8$

  Hallando el primer término, tenemos:

  $t_1=777 \wedge$ razón$=7$

  Hallamos el decimosexto término:

  $t_{16}=777+(16-1)(7)$

  $t_{16}=882$

C es la suma de los 16 términos

$$C=\left(\frac{777+882}{2}\right)\times 16=13\,272$$

Reemplazamos

$A+B+C=64+11+13\,272$

$\therefore\ A+B+C=13\,347$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

Una progresión armónica es una sucesión de números tales que sus inversas están en progresión aritmética y S_n es la suma de los n primeros términos de una progresión armónica. Si los tres primeros términos de una progresión armónica son 3, 4 y 6; y además el mayor promedio de los m primeros términos de la sucesión $t_K=C_K^m$ es 6,2, calcule S_4+m.

A) 28 B) 30 C) 32
D) 34 E) 35

Resolución

Si los cuatro primeros términos de la progresión armónica son: 3; 4; 6; a, entonces sus inversas estan en P.A.:

$$\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{a}$$

Luego, se cumple:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{a}-\frac{1}{6}$$

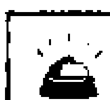
$\rightarrow\ a=12$

Asimismo

$S_4=3+4+6+a=25$

Ahora, sabemos que el mayor promedio ($\overline{MA}$) de los m primeros términos de la sucesión $t_K=C_K^m$ es 6,2

$$\overline{MA}=\frac{\sum_{K=1}^{m}t_K}{m}=\frac{C_1^m+C_2^m+C_3^m+\ldots+C_m^m}{m}=6,2$$

 **Recuerda**

$C_0^n+C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n=2n$

Luego

$$\frac{2^m-1}{m}=6,2\ \rightarrow\ 2^m=6,2m+1\ \rightarrow\ m=5$$

$\therefore\ S_4+m=30$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

Sea $S=9+16+27+42+\ldots+826$ y A es la suma de cifras de dicho resultado. Sea la sucesión $-1; 5; 15; 29; \ldots; 1797$, en la que B es el número de términos y C es la suma de los 2 términos centrales, calcule $A+B+C$.

A) 998 B) 996 C) 994
D) 995 E) 999

Resolución

I. Analizamos la sucesión

$c=$	6	9	16	27	42 ... 826
$a+b=$		3	7	11	15
$2a=$			4	4	4 ...

La sucesión es de 2.° orden o cuadrática

$2a=4;\ a+b=3;\ c=6$

Resolvemos

$a=2\ \wedge\ b=1\ \wedge\ c=6$

$t_n=an^2+bn+c$

Reemplazamos

$$t_n=2n^2+n+6$$

Para conocer la cantidad de términos

$$t_n=2n^2+n+6=286 \rightarrow n=20$$

Entonces, S es la suma de los 20 primeros términos de la sucesión

$$S=\sum_{i=1}^{20} t_i$$

$$S=\sum_{i=1}^{20}(2i^2+i+6)$$

Desarrollamos

$$S=2\times\sum_{i=1}^{20} i^2+\sum_{i=1}^{20} i+20\times 6$$

$$S=2\times\left(\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}\right)+\left(\frac{20\cdot 21}{2}\right)+120$$

$$S=\underbrace{6070}$$

$$A=\left(\begin{array}{c}\text{Suma de}\\ \text{cifras de S}\end{array}\right)=6+0+7+0$$

$$A=13$$

II. Analizamos la sucesión

(*B* términos)

$c=-3$; -1 5 15 29 ... 1797

$a+b=$ 2 6 10 14

$2a=$ 4 4 4

Resolvemos

$$a=2 \wedge b=0 \wedge c=-3$$

Sabemos que

$$t_n=an^2+bn+c$$

Reemplazamos en el término general (t_n)

$$t_n=2n^2-3$$

Para saber cuántos términos son

$$t_n=2n^2-3=1797 \rightarrow n=30$$

$$B=30$$

C es la suma de los 2 términos centrales

$$C=t_{\left(\frac{30}{2}\right)}+t_{\left(\frac{30}{2}+1\right)}$$

$$\rightarrow C=t_{15}+t_{16}$$

$$C=(2\cdot 15^2-3)+(2\cdot 16^2-3)$$

$$\rightarrow C=956$$

$$A+B+C=13+30+956$$

$$\therefore A+B+C=999$$

Clave **E**

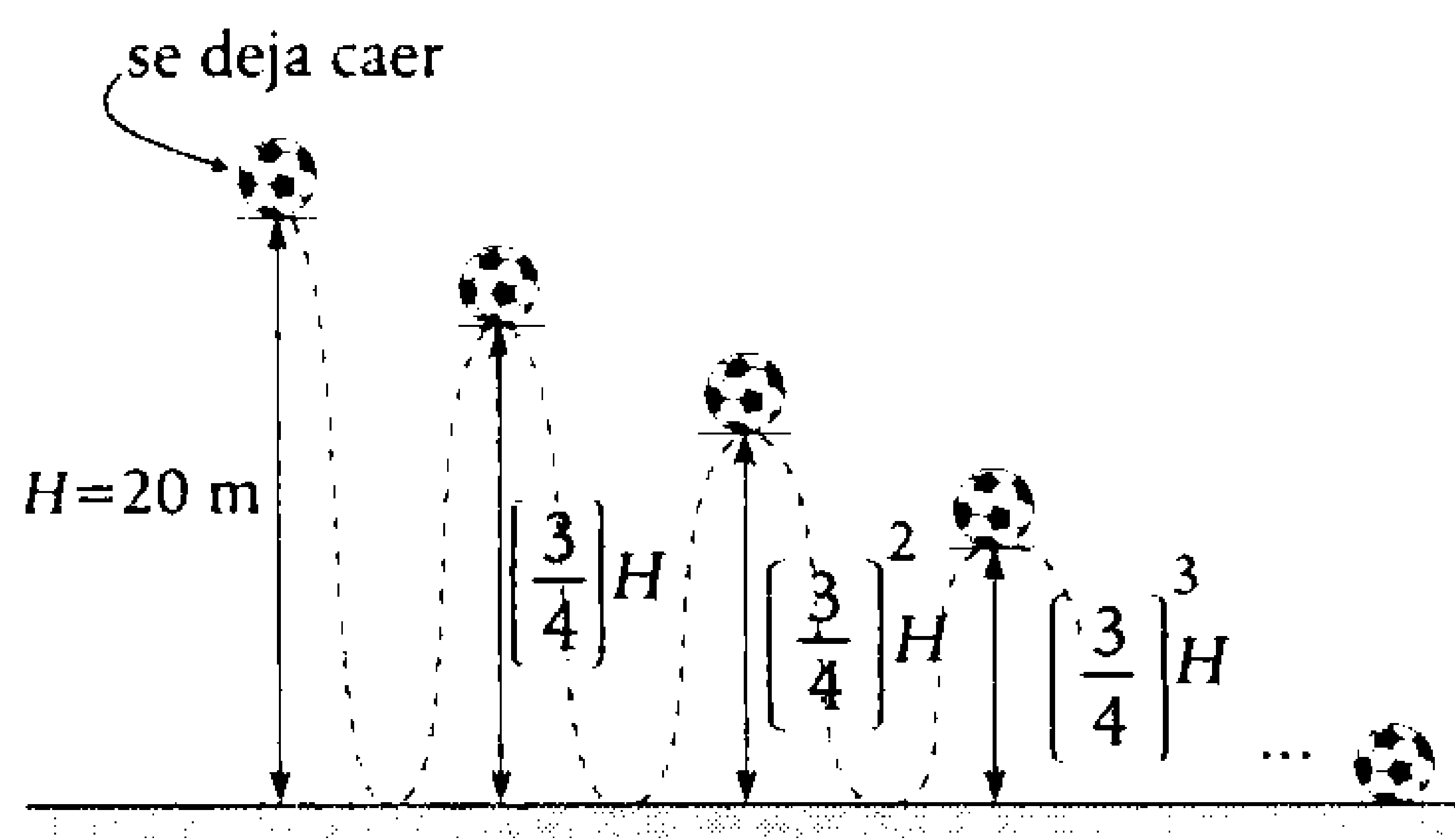
PROBLEMA N.° 16

Se deja caer una pelota desde una altura de 20 metros. Cada vez que toca el suelo rebota hasta 3/4 de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota hasta llegar al reposo.

A) 20 m
B) 120 m
C) 140 m
D) 60 m
E) 200 m

Resolución

Del enunciado tenemos



La distancia total será

$$S=H+2\left(\frac{3}{4}H\right)+2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2H\right)+2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3H\right)+\ldots$$

Calculamos

$$S=H+2H\underbrace{\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots\right]}$$

$$\left[\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right]=3$$

$$S=H+2H(3)=7H$$

$$\therefore\ S=7(20)=140\text{ m}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 17

Fernando tiene un libro de 4760 páginas, y decide arrancar 3 hojas el primer día, 5 hojas el segundo día, 7 hojas el tercer día y así sucesivamente. ¿Qué día será cuando arranque la última hoja, si la primera la arrancó el día miércoles?

A) lunes
B) miércoles
C) viernes
D) martes
E) domingo

Resolución

Sabemos que

4760 páginas <> 2380 hojas

Por dato:

Día	:	1	2	3	4	...	n.°	...
(n.° de hojas arrancadas)	:	3	5	7	9	...	$2n+1$	...

$\underbrace{3\ 5\ 7\ 9\ \ldots\ 2n+1\ \ldots}_{2380\text{ hojas}}$

Total de hojas arrancadas

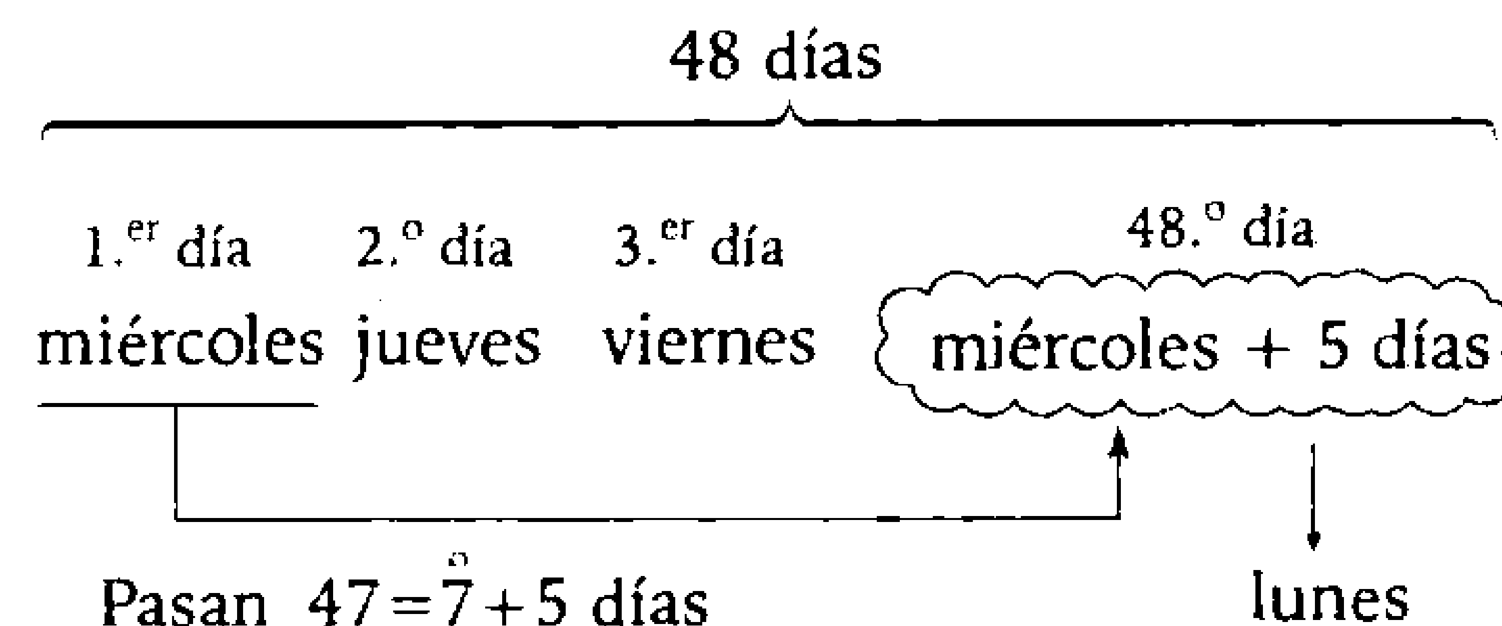
$$\left(\frac{3+2n+1}{2}\right)n\leq 2380$$

$$(n+2)n\ \leq\ 2380\ \rightarrow\ n_{máx}=47$$

luego, para $n=47$ arranca en total

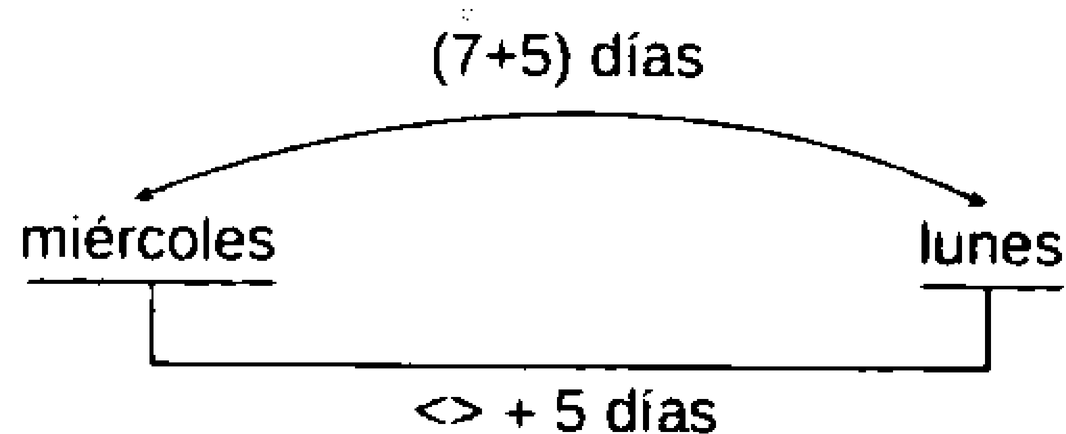
$$49\times 47=2303\text{ hojas}$$

Entonces, en 47 días arrancó en total 2303 hojas; el día 48 arranca las 2380−2303=77 restantes. Como inició un miércoles, analizamos qué día será el último.



Por lo tanto, arrancará la última hoja un día lunes.

Observación



Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

Sea la progresión aritmética

$\overline{3a}_{(n)}; 43_{(n+1)}; \overline{4a}_{(n+2)}; ...; \overline{xy}_{(3n)}$

en la cual la suma de los tres primeros términos es mayor que 170. Halle el mínimo valor de la suma de términos.

A) 3242 B) 3896 C) 4728
D) 4964 E) 5974

Resolución

De la P.A.

$\overline{3a}_{(n)}; 43_{(n+1)}; \overline{4a}_{(n+2)}; ...; \overline{xy}_{(3n)}$

Se tiene:

- $43_{(n+1)} - \overline{3a}_{(n)} = \overline{4a}_{(n+2)} - 43_{(n+1)}$

  $\overline{3a}_{(n)} + \overline{4a}_{(n+2)} = 2\times 43_{(n+1)}$

  $\rightarrow\ n+6=2a$ (I)

- $\overline{3a}_{(n)} + 43_{(n+1)} + \overline{4a}_{(n+2)} > 170$

  $3\times 43_{(n+1)} > 170$

  $12n > 149$

  $n > 12{,}4$

- De (I), n es par.

  Tomamos $n=14$, para que la suma de los términos sea mínima, entonces, $a=10$.

Reemplazamos en la P.A:

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_{29} \\ 3(10)_{(14)} & ; & 43_{(15)} & ; & 4(10)_{(16)} & ; ... ; & \overline{xy}_{(42)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 52 & ; & 63 & ; & 74 & ; & ; \underbrace{52+28(11)}_{360} \end{array}$$

(las bases son -13 de cada término: t_1, t_2, t_3, t_{29})

razón = 11

Por lo tanto, el mínimo valor de la suma es

$$\left(\frac{52+360}{2}\right)29=5974$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

En la siguiente sucesión:

$13_{(x)}; 24_{(x+1)}; 35_{(x+2)}$ ...

se cumple que la diferencia entre el 18.° término y el 10.° término es 264. Calcule la suma de cifras del 28.° término.

A) 18 B) 20 C) 21
D) 17 E) 16

Resolución

La sucesión

$13_{(x)}; 24_{(x+1)}; 35_{(x+2)}; ...$

El término general tiene la forma

$t_n=\overline{n(n+2)}_{(x+n-1)}$ (I)

$t_{10}=(10)(12)_{(x+9)}$

$t_8=8(10)_{(x+7)}$

Por dato:

$t_{10}-t_8=264$

$\overline{(10)(12)}_{(x+9)}-\overline{8(10)}_{(x+7)}=264$

$10(x+9)+12-[8(x+7)+10]=264$

$\rightarrow\ x=5$

En (I), reemplazamos $x=5$ y tenemos:

$$t_n=\overline{n(n+2)}_{(n+4)}$$

El término 28 será

$$t_{28}=(28)(30)_{(32)}$$

$$t_{28}=28\times 32+30$$

$$t_{28}=926$$

Por lo tanto, la suma de cifras es $9+2+6=17$

Clave D

PROBLEMA N.° 20

Dada la siguiente progresión aritmética:

$\underbrace{a; b; \overline{aa}; \ldots}_{K \text{ términos}}$

Si se sabe que el término central es $\overline{bb}$, calcule la suma de cifras del último término.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 D) 7

Resolución

En la P.A. de K términos

$$a;\ b;\ \overline{aa};\ \ldots;\ \underset{\underset{t_{central}}{\downarrow}}{\overline{bb}};\ \ldots;\ t_K$$

Observación

En la P.A: t_1; t_2; t_3; ...; t_n, si la cantidad de términos es impar, entonces:

$$t_{central}=\frac{t_1+t_n}{2}$$

Vemos que

- $a+\overline{aa}=2\times b$

  $6a=b$

  ↓ ↓

  1 6

- $a+t_K=2\times\overline{bb}$

  $t_K=2\times 66-1=131$

Por lo tanto, la suma de cifras es 5.

Clave C

PROBLEMA N.° 21

Halle el término 25 en la siguiente sucesión de segundo orden.

$27_{(n)}$; $45_{(n)}$; $67_{(n)}$; $115_{(n)}$; ...

A) 1462
B) 1461
C) 1465
D) 1470
E) 1463

Resolución

Por ser una sucesión de 2.° orden, en la segunda resta se obtiene una cantidad constante

$\{t_K\}$: $27_{(n)}$; $45_{(n)}$; $67_{(n)}$; $115_{(n)}$; ...

$\{t_K\}$: $(2n+7)$ $(4n+5)$ $(6n+7)$ (n^2+n+5)

$2n-2$ $2n+2$ n^2-5n-2

4 n^2-7n-4

deben ser iguales

Luego

$$4=n^2-7n-4 \ \rightarrow\ n=8$$

La sucesión es

$\{t_K\}$: $C=13$ 23 37 55 77 ...

$A+B=$ 10 14 18 22

$2A=$ 4 4 4

$$t_K=AK^2+BK+C$$

Como

$A=2;\ B=8 \wedge C=13$

Reemplazamos

$t_K=2K^2+8K+13$

El término 25 será

$t_{25}=2(25^2)+8(25)+13=1463$

Clave E

PROBLEMA N.° 22

Si la suma del primer y séptimo término de la sucesión $\overline{a2b}$; $\overline{a3b}$; $\overline{a4b}$; ... es $\overline{c7c2}$, calcule $a+b+c$.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 14 E) 15

Resolución

Observamos que la sucesión:

$\overline{a2b}; \overline{a3b}; \overline{a4b}; \ldots$

es una P.A. con razón igual a 10, entonces,

$t_7=t_1+6\times\text{razón}=t_1+60$

$t_7 \doteq \overline{a8b}$

Luego

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1} \\ \overline{a\,2\,b} \; + \\ \overline{a\,8\,b} \\ \hline \overline{c\,7\,c\,2} \end{array}$$

Orden 3 : llevo 1 → $c=1$

Orden 2 : $2+8+\boxed{\ }=\ldots1=1(10)+1$
↓ 1 ↓ llevo

Orden 1 : $2b=12 \rightarrow b=6$

Orden 3 : $2a+\boxed{1}=17 \rightarrow a=8$

$\therefore\ a+b+c=15$

Clave E

PROBLEMA N.° 23

Sea la progresión aritmética

$\overline{aaa}; \overline{ab2}; \overline{ac1}; \overline{(a+1)(d+2)d}; \ldots,$

halle la suma de los 20 primeros términos.

A) 11 220 B) 12 170 C) 12 940
D) 13 640 E) 15 630

Resolución

La P.A. es

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{aaa}; & & \overline{ab2}; & & \overline{ac1}; & & \overline{(a+1)(d+2)d}; \ldots \\ & r & & r & & r & \end{array}$$

La razón es

$r=\overline{ab2}-\overline{aaa}=\overline{ac1}-\overline{ab2}=\overline{(a+1)(d+2)d}-\overline{ac1}$

$(\ldots2)-(\ldots a)=\ \ldots9\ =\ (\ldots d)\ -\ (\ldots1)$

↓ 3 ↓ 0

$\rightarrow a=3 \wedge d=0$

Luego, la P.A. es

$$\begin{array}{ccccccc} 333; & & \overline{3b2}; & & \overline{3c1}; & & 420; \ldots \\ & r & & r & & r & \end{array}$$

$\rightarrow 333+3r=420$, de donde: $r=29$

Tenemos:

- $t_1=333$
- $r=29$
- $t_{20}=333+(20-1)(29)=884$

Por lo tanto, la suma de los 20 primeros términos es

$$\left(\frac{333+884}{2}\right)20=12\,170$$

Clave B

PROBLEMA N.° 24

Si $S_n=\underbrace{23+46+69+\ldots}_{n\text{ sumandos}}$, calcule $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{30}$.

A) 114 354 B) 114 980 C) 114 080 D) 117 325 E) 118 630

Resolución

Sabemos que: $S_n=\underbrace{23+46+69+\ldots}_{n\text{ sumandos}}$

Entonces:

$$S_n=23\times 1+23\times 2+23\times 3+\ldots+23\times n$$

$$S_n=23(1+2+3+\ldots+n)=\frac{23}{2}\times n(n+1)$$

Luego

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{23}{2}\times 1\times 2\\
S_2 &= \frac{23}{2}\times 2\times 3\\
S_3 &= \frac{23}{2}\times 3\times 4\\
&\vdots\\
S_{30} &= \frac{23}{2}\times 30\times 31
\end{aligned}\right\}(+)$$

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{30}=\frac{23}{2}\underbrace{[1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+30\times 31]}_{}=\frac{30\times 31\times 32}{3}$$

$\therefore\ S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{30}=114\ 080$

Clave C

PROBLEMA N.° 25

Determine cuántas cifras se han utilizado para escribir los 1000 términos de la siguiente sucesión: 13; 18; 23; 28;... Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Resolución

De la sucesión, se observa que los términos terminan en cifras 3 ó 8.

$$\overbrace{13\ ;\ 18\ ;\ 23\ ;\ 28\ ;\ \ldots}^{1000\text{ términos}}$$

$5\quad 5\quad 5$

Luego, el término general es $t_n=13+(n-1)5$

El último término es $t_{1000}=13+(1000-1)\times 5$

$t_{1000}=5008$

Analizamos por partes:

$$\underbrace{13;18;\ldots;98;}_{\text{De 2 cif. c/u}}\quad \underbrace{103;108;\ldots;998;}_{\text{De 3 cif. c/u}}\quad \underbrace{1003;1008;\ldots;5008}_{\text{De 4 cif. c/u}}$$

$$\frac{98-8}{5}=18\ \#_s \qquad \frac{998-98}{5}=180\ \#_s \qquad \frac{5008-998}{5}=802\ \#_s$$

Cantidad de cifras $18\times2+180\times3+802\times4=\mathbf{3784}$

Por lo tanto, la suma de cifras es $3+7+8+4=22$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

Sea la siguiente P.A.: $\overline{a(a+1)}_{(3)}$; $\overline{(a+1)a}_{(3)}$; c; $\overline{aa}$; ...

Siendo t_n el término enésimo de la P.A., además, $S_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$, calcule la suma de los 10 primeros términos de la siguiente sucesión: S_1; S_2; S_3; ...

A) 405 B) 505 C) 605 D) 705 E) 805

Resolución

En la P.A.

$\overline{a(a+1)}_{(3)}$; $\overline{(a+1)a}_{(3)}$; c; $\overline{aa}$; ...

Vemos que

$a>0 \wedge (a+1)<3 \rightarrow a=1$

Reemplazamos y descomponemos polinómicamente

5; 7; c; 11; ... (razón=2)

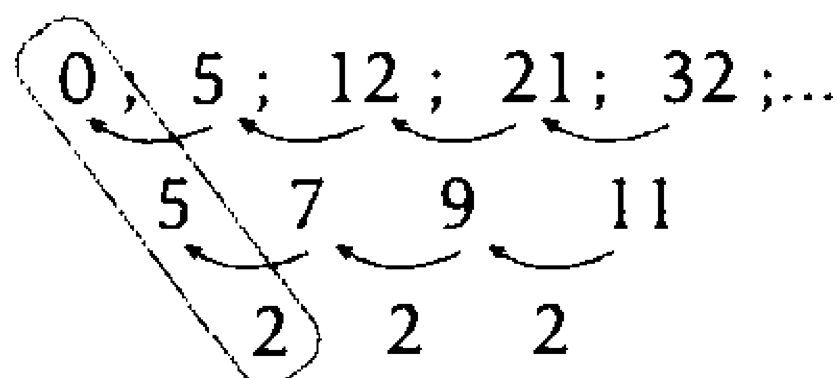
$c \rightarrow 9$

Además

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} t_i = t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n$$

Siendo los t_i, términos de la P.A., entonces la sucesión

$S_1; S_2; S_3; \ldots$ es cuadrática



$$t_K=AK^2+BK+C=K^2+4K$$

$\left(\frac{2}{2}\right)$ $(5-A)$ 0

Piden

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{10}=\sum_{K=1}^{10} t_K$$

$$\sum_{K=1}^{10} t_K=\sum_{K=1}^{10}(K^2+4K)$$

$$\sum_{K=1}^{10} t_K=\sum_{K=1}^{10}K^2+4\sum_{K=1}^{10}K$$

$$\sum_{K=1}^{10} t_K=\frac{10\times11\times21}{6}+4\left(\frac{10\times11}{2}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{K=1}^{10} t_K=605$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 27

Se tiene la siguiente P.A.:

$\overline{ab};\ \overline{a(b+4)};\ \overline{b(b-2)};\ \ldots;\ \overline{(b+1)(b+1)b}$

de 156 términos. Halle la suma de cifras de la suma de términos de la siguiente sucesión:

$\overline{(b-1)(a-2)};\ \overline{a(b+1)};\ \overline{b(a-4)};\ \ldots;\ \overline{(b+3)(a+2)}$

A) 18 B) 21 C) 23
D) 25 E) 27

Resolución

Sea la P.A.

$\overline{ab};\ \overline{a(b+4)};\ \overline{b(b-2)};\ \ldots;\ \overline{(b+1)(b+1)b}$ } 156 términos

$r=4$ $r=4$

Analizamos

$t_{156}=t_1+155\times r$

$\overline{(b+1)(b+1)b}=\overline{ab}+155\times4$

$\overline{(b+1)(b+1)0}=\overline{a0}+620$

$11b=a+51$

↓ ↓

5 4

Reemplazamos $b=5 \wedge a=4$

$\underbrace{\overline{(b-1)(a-2)}}_{42};\ \underbrace{\overline{a(b+1)}}_{46};\ \underbrace{\overline{b(a-4)}}_{50};\ \ldots;\ \underbrace{\overline{(b+3)(a+2)}}_{86}$

Cantidad de términos: $\frac{86-38}{4}=12$

La suma de los 12 términos es

$$\left(\frac{42+86}{2}\right)12=768$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$7+6+8=21$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Dada la siguiente P.A.:

$\underbrace{M; N; 60; \ldots;}_{y\text{ términos}} x; \underbrace{\ldots; \overline{ab4}_{(12)}; 324; \overline{cd4}_{(8)}}_{y\text{ términos}}$

además, $a=b$; $c>d$

halle $x+y$.

A) 176 B) 186 C) 196
D) 206 E) 216

Resolución

Del dato:

$$\underbrace{M; N; 60; \ldots;}_{y\text{ términos}} x; \underbrace{\ldots; \overline{ab4}_{(12)}; 324; \overline{cd4}_{(8)}}_{y\text{ términos}}$$

Notamos que la P.A. es creciente, entonces

$\overline{ab4}_{(12)} < 324;\ a=b$

$156a+4 < 324$

$\downarrow$

$1 \rightarrow$ razón$=164 \wedge \overline{cd4}_{(8)}=488=750_{(8)}$

$2\ \checkmark$

- $a=1$

  razón$=324-114_{(12)}=164$

  $\rightarrow \overline{cd4}_{(8)}=488=750_{(18)}$ no cumple

- $a=2$

  rarón$=324-224_{(12)}=8$

  $\rightarrow \overline{cd4}_{(8)}=332=514_{(8)}$ sí cumple

Luego

$M=60-2(8)=44$

Reemplazamos en la P.A.

$$\underbrace{44; \ldots}_{y\text{ términos}}; x; \underbrace{\ldots; 332}_{y\text{ términos}}$$

Donde x es el término central, entonces:

$x=\dfrac{44+332}{2}=188$, además:

$y=\dfrac{332-x}{8}=18$

$\therefore\ x+y=206$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Halle la suma de los 45 términos de una P.A., cuyos dos primeros términos son

$\overline{(n+1)a}$ y $\overline{(2a)(a+n)}$.

Además, se cumple que

$\overline{na}_{(5)}=$ $\overline{1a}$, $\overline{1a}$, …, $\overline{1a}_{(n)}$ (7 veces)

A) 4160 B) 4380 C) 4590

D) 4860 E) 4970

Resolución

Del dato:

$\overline{na}_{(5)}=$ $\overline{1a}$, $\overline{1a}$, $\overline{1a}$, …, $\overline{1a}_{(n)}$ (7 veces) $(n<5)$

Descomponiendo

$5n+a=7a+n \rightarrow 4n=6a$

Luego

$\dfrac{n}{a}=\dfrac{3}{2}$

Como $n<5$; entonces $n=3 \wedge a=2$

los dos primeros términos de la P.A. son:

$$\underbrace{\overline{(n+1)a}}_{42}\ ;\ \underbrace{\overline{(2a)(a+n)}}_{45}$$

$r=3$

Tenemos:

$\left.\begin{array}{l} t_1=42 \\ \text{razón}=3 \end{array}\right\} t_n=t_1+(n-1)r$

$t_{45}=42+44(3)=174$

Por lo tanto, la suma de los 45 términos es

$\left(\dfrac{42+174}{2}\right)45=4860$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Calcule la suma de inversas de los términos de la sucesión
10; 40; 88; 154; ... (36 términos).

A) $\frac{9}{55}$ B) $\frac{12}{37}$ C) $\frac{37}{55}$ D) $\frac{18}{25}$ E) $\frac{19}{75}$

Resolución

La sucesión tiene 36 términos: 10; 40; 88; 154; ...; analizando, tenemos:

$$\underline{2}\times 5;\ \underline{5}\times 8;\ \underline{8}\times 11;\ \underline{11}\times 14;\ ...;\ \overbrace{\underline{107}\times 110}^{t_{36}}$$

(diferencias: 3, 3, 3; $107 = 2+35(3)$)

Piden

$$S=\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\ldots+\frac{1}{107\times 110}$$

$$S=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{107}-\frac{1}{110}\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right]$$

$$\therefore\quad S=\frac{9}{55}$$

Clave A

PROBLEMA N.° 31

Calcule la siguiente suma

$$M=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{6\times 5}+\frac{1}{10\times 7}+\frac{1}{14\times 9}+\ldots+\frac{1}{138\times 71}$$

A) $\frac{70}{142}$ B) $\frac{30}{132}$ C) $\frac{40}{35}$ D) $\frac{35}{142}$ E) $\frac{142}{35}$

Resolución

Observación

$$S=\underbrace{\frac{a}{n\times(n+a)}+\frac{a}{(n+a)\times(n+2a)}+\frac{a}{(n+2a)(n+3a)}+\ldots+\frac{a}{[n+(K-1)a][n+ka]}}_{K\text{ sumandos}}$$

$$S=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right)+\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+2a}\right)+\left(\frac{1}{n+2a}-\frac{1}{n+3a}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+(K-1)a}-\frac{1}{n+Ka}\right)$$

$$S=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+Ka}$$

$$\rightarrow\quad S=\frac{Ka}{n(n+Ka)}$$

Le damos forma a M:

$$M=\left[\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{6\times5}+\frac{1}{10\times7}+\frac{1}{14\times9}+\ldots+\frac{1}{138\times71}\right]\times\frac{2}{2}$$

$$M=\frac{2}{2\times6}+\frac{2}{6\times10}+\frac{2}{10\times14}+\frac{2}{14\times18}+\ldots+\frac{2}{138\times142}$$

$$2M=\frac{4}{2\times6}+\frac{4}{6\times10}+\frac{4}{10\times14}+\frac{4}{14\times18}+\ldots+\frac{4}{138\times142}$$

$$2M=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{138}-\frac{1}{142}\right)$$

$$\rightarrow\quad 2M=\frac{1}{2}-\frac{1}{142}$$

$$\therefore\quad M=\frac{35}{142}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 32

Se ubican los números formando cuadrados concéntricos del siguiente modo:

43	45	47	49	51	·
41	15	17	19	21	·
39	13	3	5	23	·
37	11	9	7	25	·
35	33	31	29	27	·

Calcule la suma de cifras del número que cierra el 18.° cuadrado, si el primer cuadrado está formado por el 3.

A) 12 B) 15 C) 13
D) 17 E) 19

Resolución

43	45	47	49	**51**
41	15	17	**19**	21
39	13	3	5	23
37	11	9	7	25
35	33	31	29	7

En los cuadrados concéntricos, observamos

cuadrado n.°: 1 2 3 ... 18

cantidad de términos: 1^2 3^2 5^2 $[2(18)-1]^2$

$= (35)^2$
$= 1225$

Entonces, los términos del cuadrado n.° 18 forman la siguiente P.A.

$3; 5; 7; 9; ...; t_{1225}$

$t_{1225} = 3 + 1224(2) = 2451$

Por lo tanto, la suma de cifras es 12.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Halle la suma de los 20 primeros términos de la sucesión
9; 99; 999; 9999; 99 999...
Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 25 B) 27 C) 18
D) 31 E) 21

Resolución

$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + \underbrace{999...99}_{20\text{ cifras}}$$

$$\begin{aligned} 9 &= 10 - 1 + \\ 99 &= 100 - 1 \\ 999 &= 1000 - 1 \\ 9999 &= 10\,000 - 1 \\ \vdots &= \vdots \\ \underbrace{999...99}_{20\text{ cifras}} &= \underbrace{10...000}_{21\text{ cifras}} - 1 \end{aligned}$$

$$S = \underbrace{11...1110}_{21\text{ cifras}} - 20$$

$$S = \underbrace{11...1090}_{21\text{ cifras}}$$

Suma de cifras: $1 \times 18 + 9 = 27$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

Dadas las siguientes sucesiones:
S_1: 7; 12; 17; 22; ...; 297
S_2: 4; 11; 18; 25; ...
¿cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

A) 6 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

- En la primera sucesión:

$$S_1:\ \underbrace{7\ ;\ 12}_{5}\ ;\ \underbrace{\ }_{5}17\ ;\ \underbrace{\ }_{5}22\ ;\ \dots\ ;\ 297$$

$t_n=7+5a;\quad a\geq 0$

$7+5a=297$

$\rightarrow\quad a=58$

- En la segunda sucesión:

$$S_2:\ \underbrace{4\ ;\ 11}_{7}\ ;\ \underbrace{\ }_{7}18\ ;\ \underbrace{\ }_{7}25\ ;\ \dots$$

$t_m=4+7b;\quad b\geq 0$

Piden $t_n = t_m$

$7+5a=4+7b$

$7b=5a+3$

b	a
↓	↓
4	5
9	12
14	19
⋮	⋮

Analizando para a ($a_{\text{máx}}=58$)

$$\underbrace{5\ ;\ 12}_{7}\ ;\ \underbrace{\ }_{7}19\ ;\ \dots\ ;\ t_k\leq 58$$

Luego

$t_K=5+(K-1)7=7K-2\leq 58$

$\downarrow$

8

Por lo tanto, hay 8 términos comunes.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

¿Cuántos términos hay que considerar en las dos series para que la suma de ambas sea la misma?

$A_1=1+2+3+4+5+\dots$

$A_2=100+98+96+94+\dots$

A) 45 B) 56 C) 59
D) 67 E) 72

Resolución

- $A_1=\underbrace{1+2+3+4+\dots+n}_{n\text{ términos}}$

$$A_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

- $A_2=\underbrace{100+98+96+94+\dots+(102-2n)}_{n\text{ términos}}$

$$A_2=\left(\frac{100+102-2n}{2}\right)n$$

$A_2=(101-n)n$

Por dato:

$A_1=A_2$

$$\frac{n(n+1)}{2}=(101-n)\times n$$

$n+1=202-2n$

$3n=201$

$\therefore\quad n=67$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Calcule la suma de los n primeros términos de la serie

$S=69+6969+696\,969+\ldots$

A) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}\right]$

B) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n}-100n+99}{100}\right]$

C) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n+1}+99n-99}{99}\right]$

D) $\frac{69}{99}\left[\frac{99^{n+1}+99n+100}{99}\right]$

E) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n}-99(n+1)-100}{99}\right]$

Resolución

La serie tiene n términos:

$$S=\underbrace{69}_{2\times 1\text{ cif.}}+\underbrace{6969}_{2\times 2\text{ cif.}}+\underbrace{696\,969}_{2\times 3\text{ cif.}}+\ldots+\underbrace{696969\ldots69}_{(2n)\text{ cifras}}$$

$$S=69[1+101+10\,101+\ldots\underbrace{10101\ldots1}_{(2n-1)\text{ cifras}}]$$

$$S=\frac{69}{99}[99+9999+999\,999+\ldots+\underbrace{999999\ldots99}_{(2n)\text{ cifras}}]$$

$$S=\frac{69}{99}[100^1+100^2+100^3+\ldots+100^n-n\times 1]$$

Recuerda

$$1+100+100^2+100^3+\ldots+100^n=\frac{100^{n+1}-1}{100-1}$$

Efectuando

$$S=\frac{69}{99}\left[\left(\frac{100^{n+1}-1}{100-1}\right)-1-n\right]$$

$$\therefore\ S=\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}\right]$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 37

Una esfera es soltada desde lo alto de una pendiente y se observa que recorre durante el primer segundo 0,10 cm; durante el segundo $3\times 0{,}10$ cm; durante el tercero $5\times 0{,}10$ cm; durante el cuarto $7\times 0{,}10$ cm, y así sucesivamente. Si el descenso dura un minuto, calcule la distancia recorrida por la esfera.

A) 3,6 m B) 4,2 m C) 4,8 m
D) 5,4 m E) 6 m

Resolución

Por dato:

En el	1.^{er} segundo recorre	0,10 cm
	2.° segundo recorre	3(0,10 cm)
	3.^{er} segundo recorre	5(0,10 cm)
	4.° segundo recorre	7(0,10 cm)
	⋮	
	60.° segundo	119(0,10 cm)

En total recorre durante 1 minuto (60 segundos)

$$(\underbrace{1+3+5+7+\ldots+119}_{60\text{ sumandos}})\times(0{,}10\text{ cm})$$

$$=60^2\times(0{,}10)\text{ cm}=360\text{ cm} <> 3{,}6\text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por la esfera es 3,6 m.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

En la siguiente sucesión:

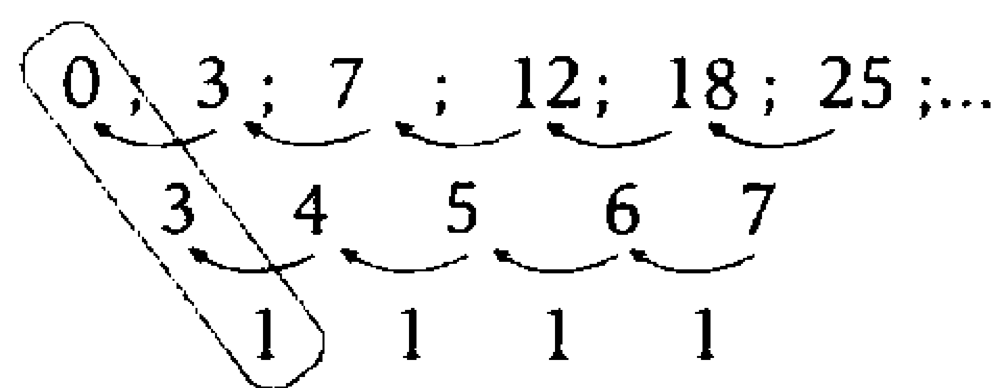
3; 7; 12; 18; 25; ...

¿Cuál es el último término de tres cifras y cuál es el primer término de cuatro cifras? Dé como respuesta la suma de ambos términos.

A) 1995
B) 1996
C) 1997
D) 2019
E) 1999

Resolución

De la sucesión:



$$\rightarrow t_n = an^2 + bn + c = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3-a) \quad 0$$

Piden el último término de 3 cifras y el primer término de 4 cifras:

$$t_n = \frac{1}{2}n(n+5) \leq 1000$$

$$n(n+5) \leq 2000$$

Luego

$n=42 \rightarrow t_{42}=987$

$n=43 \rightarrow t_{43}=1032$

$\therefore\ 987+1032=2019$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 39

Halle la mayor suma de términos de la siguiente sucesión:

$$\underbrace{\overline{ab4}; \overline{ab6}; \overline{ab8}; \ldots; \overline{ac8}}_{\overline{2a} \text{ términos}} \quad (a > c)$$

Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 19 B) 24 C) 21
D) 22 E) 23

Resolución

Se observa que es una P.A. de razón 2

$$\overbrace{\overline{ab4}; \overline{ab6}; \overline{ab8}; \ldots; \overline{ac8}}^{\overline{2a} \text{ téminos}} \quad (a > c)$$

Analizamos el último término

$$t_{\overline{2a}} = t_1 + (\overline{2a}-1)\cdot r$$

$$\overline{ac8} = \overline{ab4} + (\overline{2a}-1)\cdot 2$$

$$10c+8=10b+4+2\times\overline{2a}-2$$

$$\underbrace{5(c-b)}+3=\overline{2a}$$

...0 → 3

...5 → 8 (máximo)

$a_{\text{máximo}}=8$ entonces $c-b=5$ $(a>c)$

$c=7$, $b=2$ (máximos)

La suma de los 28 términos es

$$\left(\frac{824+878}{2}\right)\times 28 = 23\,828$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$2+3+8+2+8=23$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 40

Si S_1: 23; 32; 41; ... ; 410

S_2: 39; 46; 53; ... ; 494

¿cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

- En la primera sucesión:

$$S_1: \underbrace{23 ; 32}_{9} ; \underbrace{32 ; 41}_{9} ; ... ; 410$$

$$t_n = 23+9a; \quad a \geq 0$$

Como

$$23+9a=410 \rightarrow a=43$$

- En la segunda sucesión:

$$S_2: \underbrace{39 ; 46}_{7} ; \underbrace{46 ; 53}_{7} ; ...; 494$$

$$t_m = 39+7b; \quad b \geq 0$$

Si $39+7b=494 \rightarrow b=65$

Piden $t_n = t_m$:

$$23+9a=39+7b$$

$$9a=7b+16 \qquad \text{(I)}$$

a	b
8	8
15	17
22	26
⋮	⋮

Analizamos para a ($a_{máx}=43$):

$$\underbrace{8 ; 15}_{7} ; \underbrace{15 ; 22}_{7} ; ... ; t_k \leq 43$$

Luego

$$t_K = 8+(K-1)7 = 7K+1 \leq 43$$

$$K \rightarrow 6$$

Verificando en (I)

$b=53 < 65$ (cumple)

Por lo tanto, hay 6 términos comunes.

Clave B

PROBLEMA N.° 41

En la distribución mostrada, indique la columna en la que se encuentra el número que representa el tercer año bisiesto aumentado en un año del siglo XXI.

P	Q	R	S	T
	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A) P B) Q C) R
D) S E) T

Resolución

- Los años bisiestos del siglo XXI son: 2000; 2004; 2008; 2012; ...
- El 3.er año bisiesto aumentado en uno es 2008+1=2009

La secuencia de impares la analizamos en grupos de 8 números.

$$\underbrace{1; 3; 5; \ldots; 2009}$$

$$\frac{2009-(-1)}{2} = 1005 \text{ términos}$$

En grupos de 8, tenemos:

$$1005 \,\underline{|\; 8 \;}$$
$$\quad 5 \quad 125$$

P	Q	R	S	T		
	1	3	5	7	8 $\#_s$ impares	125 veces
15	13	11	9			
	17	19	21	23	8 $\#_s$ impares	
31	29	27	25			
	33	35	37	39	8 $\#_s$ impares	
47	45	43	41			
					⋮	
					8 $\#_s$ impares	
	2001	2003	2005	2007	5 $\#_s$ impares	
2015	2013	2011	2009			

↓

columna S

Por lo tanto, se encuentra en la columna S.

Clave D

PROBLEMA N.° 42

Se escriben los números pares en la forma mostrada:

2

4 6

8 10 12

14 16 18 20

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Los términos de la última fila suman 29 822. ¿Cuánto suman los términos de la fila central?

A) 3375 B) 3125 C) 2048
D) 4112 E) 5212

Resolución

Fila n.°					
1	2 → 1×2				
2	4	6 → 2×3			
3	8	10	12 → 3×4		
4	14	16	18	20 → 4×5	
⋮	⋮	⋮	⋮		
n	t_1		...		$t_n \rightarrow n(n+1)=n^2+n$

(n términos)

$$t_1=t_n-(n-1)\times 2=n^2-n+2$$

Por condición

$$\left[\frac{t_1+t_n}{2}\right]\times n=29\,822$$

Reemplazamos y desarrollamos

$$n(n^2+1)=31\times 2\times 13\times 37 \rightarrow n=31$$

Luego, la fila central es la n.° 16, entonces

$$\underbrace{272-15(2)=242 \quad \ldots \quad 16\times 17=272}_{16 \text{ términos}}$$

Por lo tanto, la suma de los términos de la fila central es

$$\left(\frac{242+272}{2}\right)\times 16=4112$$

Clave D

PROBLEMA N.° 43

Para imprimir un libro se emplean 255 tipos de imprenta, luego se elimina el último capítulo que tenía 28 páginas y se reemplaza por otro de 40 páginas. Calcule cuántas páginas tiene el nuevo libro.

A) 128 B) 130 C) 133
D) 135 E) 137

Resolución

Analizamos

$$\underbrace{1;\ldots;9}_{9\,\#_s};\underbrace{10;11;\ldots;99}_{90\,\#_s};\underbrace{100;101;\ldots;N}_{(N-99)\,\#_s}$$

cantidad de cifras

$$9+90\cdot 2+(N-99)\times 3=255$$

$$N=121$$

El libro tiene 121 páginas, se le quitan 28 páginas y se reemplazan por 40 páginas.Por lo tanto, ahora tendrá

$$121-28+40=133 \text{ páginas.}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

El número de páginas de un libro está formado por las tres últimas cifras de
$E=1^2+2^2+3^2\ldots+50^2$.

Si dicho libro se enumera en base 8, ¿cuántos tipos de imprenta se utilizarán para su enumeración?

A) 3119 B) 3130 C) 3095
D) 3096 E) 3132

Resolución

Por condición

$$E=1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2$$

$$E=\frac{50\times 51\times 101}{6}=42925$$

Entonces el número de páginas del libro será 925.

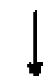
Observación

Al enumerar un libro de N páginas en base n, siendo $N=\underbrace{\overline{abc\ldots k}}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)}$, se cumple:

$$\begin{matrix}\text{Número de}\\ \text{cifras utilizadas}\end{matrix}=(N+1)\times k-\underbrace{111\ldots1}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)}$$

Si se enumera en base 8, tenemos:

$$925=1635_{(8)}$$



4 cifras

Cantidad de tipos de imprenta utilizados

$$(925+1)4-1111_{(8)}=3119$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Halle el valor de

$$S=a+\overline{aa}_{(b)}+\overline{aaa}_{(b)}+\overline{aaaa}_{(b)}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n \text{ cifras}}{}_{(b)}$$

A) $S=\dfrac{a}{(b-1)^2}\times\left[b^{n+1}+(b-1)n+b\right]$

B) $S=\dfrac{a}{(b-1)^2}\times\left[b^{n+1}-(b-1)n-b\right]$

C) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times\left[b^{n+1}-(b-1)n+b\right]$

D) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times\left[b^{n+1}-(b-1)n-b\right]$

E) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times\left[b^{n+1}+(b-1)n+b\right]$

Resolución

Por condición

$$S=a+\overline{aa}_{(b)}+\overline{aaa}_{(b)}+\overline{aaaa}_{(b)}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots a}_{(b)}}_{n\text{ cifras}}$$

$$\underbrace{\overline{aa\ldots a}_{(b)}}_{K\text{ cifras}}=a\cdot b^{K-1}+a\cdot b^{K-2}+\ldots+a\cdot b^2+a\cdot b^1+a$$

$$\underbrace{\overline{aa\ldots a}_{(b)}}_{K\text{ cifras}}=a\cdot[b^{K-1}+b^{K-2}+\ldots+b^2+b+1]$$

$$\underbrace{\overline{aa\ldots a}_{(b)}}_{K\text{ cifras}}=a\cdot\left[\frac{[b^K-1]}{b-1}\right]$$

Descomponiendo cada uno de los sumandos, tenemos:

$$a = a\left(\frac{b-1}{b-1}\right) +$$

$$\overline{aa}_{(b)} = a\left(\frac{b^2-1}{b-1}\right)$$

$$\overline{aaa}_{(b)} = a\left(\frac{b^3-1}{b-1}\right)$$

$$\overline{aaaa}_{(b)} = a\left(\frac{b^4-1}{b-1}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\underbrace{\overline{a\ldots aa}_{(b)}}_{n\text{ cifras}} = a\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)$$

$$S=\frac{a}{b-1}[b-1+b^2-1+b^3-1+\ldots+b^n-1]$$

$$S=\frac{a}{b-1}[\underbrace{1+b+b^2+b^3+\ldots+b^n}-n-1]$$

$$S=\frac{a}{b-1}\left[\frac{b^{n+1}-1}{b-1}-n-1\right]$$

$$S=\frac{a}{(b-1)^2}[b^{n+1}-(b-1)n-b]$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 46

Al enumerar desde $\overline{ab}$ hasta $\overline{bba}$ se han utilizado 768 cifras. ¿Cuántas veces se utiliza la cifra 3?

A) 91 B) 92 C) 93
D) 94 E) 95

Resolución

Del dato

$$\underbrace{\overline{ab};\ldots;99}_{[99-(\overline{ab}-1)]\text{ números}}\;;\;\underbrace{100;\ldots;\overline{bba}}_{(\overline{bba}-99)\text{ números}}$$

Cantidad de cifras utilizadas

$$2\times(100-\overline{ab})+3\times(\overline{bba}-99)=768$$

Descomponemos polinómicamente

$$328b=17a+865$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$3 \quad 7$$

Ahora, hallamos cuántas veces se ha utilizado la cifra 3 desde 73 hasta 337.

- En las unidades:

$$\underbrace{73; 83; 93; \ldots; 333}$$

$$\frac{333-63}{10}=27\text{ veces}$$

- En las decenas:

$$\left.\begin{array}{l}130;\ 131;\ 132;\ \ldots;\ 139\\ 230;\ 231;\ 232;\ \ldots;\ 239\\ 330;\ 331;\ 332;\ \ldots;\ 337\end{array}\right\}\ 28\text{ veces}$$

- En las centenas:

$$\underbrace{300; 301; 302; \ldots; 337}_{38 \text{ veces}}$$

$\therefore\ 27+28+38=93$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 47

De un libro de 1005 hojas se han arrancado 5 hojas seguidas, luego se notó que en las hojas que quedaron se habían utilizado 6906 tipos en su numeración. Determine el número de la primera página arrancada.

A) 93 B) 95 C) 97
D) 99 E) 101

Resolución

Sabemos que

1005 hojas <> 2010 páginas

Cantidad total de cifras:

$(2010+1)\times 4-1111=6933$ cifras

Al arrancar 5 hojas <> 10 páginas, quedan 6906 cifras.
Entonces, se tiene $6933-6906=27$ cifras en las 10 páginas arrancadas y todas no pueden ser de 2 cifras ni de 3 cifras, porque sobrarían o faltarían cifras; una parte serán de 2 cifras y las restantes de 3 cifras.

$$\overbrace{\underbrace{\ldots; 98; 99}_{\substack{n \text{ páginas de} \\ 2 \text{ cifras c/u}}};\ \underbrace{100; 101; \ldots}_{\substack{(10-n) \text{ páginas de} \\ 3 \text{ cifras c/u}}}}^{10 \text{ páginas; } 27 \text{ cifras}}$$

$2n+3(10-n)=27\ \rightarrow\ 3=n$

Arrancó

$$\underbrace{97; 98; 99}_{3 \text{ páginas}};\underbrace{100; 101; 102; 103; 104; 105; 106}_{7 \text{ páginas}}$$

Por lo tanto, la primera página arrancada es 97.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 48

En las últimas 36 páginas de un libro se han empleado 129 cifras en la escritura de estas. ¿Cuántas hojas tiene el libro?

A) 509 B) 510 C) 1018
D) 1020 E) 1022

Resolución

Analizamos la cantidad de cifras de las últimas 36 páginas:

- Todas de 3 cifras: $\rightarrow\ 3(36)=108$ cifras
- Todas de 4 cifras: $\rightarrow\ 4(36)=144$ cifras

Entonces, tenemos páginas de 3 y 4 cifras:

$3(36-n)+4n=129$

$n=21$

Si hay 21 páginas de 4 cifras, la última es 1020.

Por lo tanto, la cantidad de hojas es

$\dfrac{1020}{2}=510$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 49

En la enumeración de las páginas de un libro, se han utilizado 324 cifras 1. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 1011 B) 1012 C) 1013
D) 1014 E) 1015

Resolución

Por dato:

$$\underbrace{1; 2; 3; 4; \ldots; N}_{\text{hay 324 cifras 1}}$$

Analizamos por partes:

- del 1 al 99 hay 20 cifras 1
- del 100 al 199 hay $20+100=120$ cifras 1
- del 1 al 999 hay $20\times10+100=300$ cifras 1

Aún faltan 24 cifras 1

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 2\\ & & \vdots & \\1 & 0 & 0 & 9\end{array}\right\}\text{11 cifras 1}\\\left.\begin{array}{cccc}1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1 & 3\\1 & 0 & 1 & 4\\1 & 0 & 1 & 5\end{array}\right\}\text{13 cifras 1}\end{array}\right\}\text{24 cifras 1}$$

Por lo tanto, la última página es 1015.

Clave E

PROBLEMA N.° 50

En la enumeración de un libro de $\overline{(a+2)8}$ páginas se han utilizado 811 tipos de imprenta menos que en la enumeración de las páginas de un libro de $\overline{3a2}$ páginas. Halle cuántos tipos de imprenta se necesitan para enumerar un libro de $\overline{1a(a-4)}$ páginas en base 6.

A) 444 B) 446 C) 448
D) 450 E) 452

Resolución

Tenemos:

- $1; 2; 3; \ldots; \overline{(a+2)8}$
  La cantidad de tipos de imprenta es
  $[\overline{(a+2)8}+1]\times2-11=20a+47$

- $1; 2; 3; \ldots; \overline{3a2}$
  La cantidad de tipos de imprentas es
  $[\overline{3a2}+1]\times3-111=30a+798$

Sabemos que

$(30a+798)-(20a+47)=811$

$\rightarrow\ a=6$

Ahora, se enumera en base 6 hasta la página:

$$\overline{1a(a-4)}=162=\underbrace{430_{(6)}}_{\text{3 cifras}}$$

Por lo tanto, la cantidad de tipos de imprenta que se necesitan es

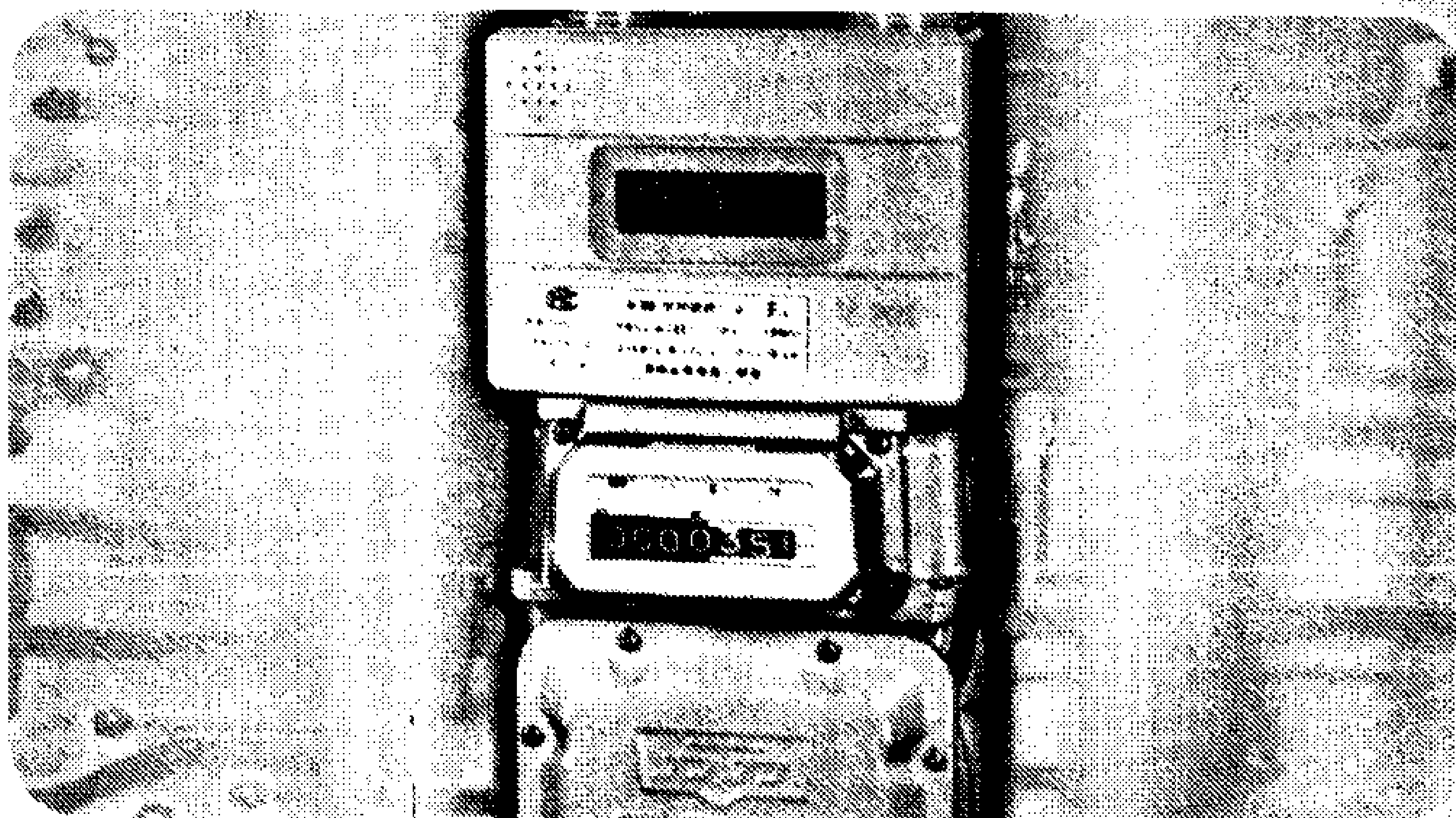
$(162+1)3-111_{(6)}=446$

Clave B

Capítulo

7

Teoría de la divisibilidad



Podemos decir que la teoría de números es la rama de las matemáticas que estudia en profundidad los números y sus propiedades, y que tuvo sus inicios con el matemático griego Diofanto de Alejandría en el s. III a.n.e., pero la contribución (indirecta) más importante de Diofanto fue a partir de la traducción al latín de los seis primeros libros con el nombre de *Aritmética*, en 1621 por C.G. Bachet. Esta traducción fue la que inspiró al verdadero padre de la teoría de números, Pierre de Fermat (1601-1665).

De Pierre de Fermat podemos destacar la invención (junto con Descartes) de las ahora llamadas coordenadas cartesianas, que permiten "traducir" los problemas geométricos a problemas algebraicos.

Entre los resultados más conocidos que obtuvo (o anunció) está el llamado "Pequeño teorema de Fermat": Para todo número primo p y para todo número natural a no divisible por p tenemos que p divide a $a^{p-1}-1$.

Capítulo 7

Teoría de la divisibilidad

PROBLEMA N.° 1

Si $\overline{abcd}=\overset{o}{45}$ y $\overline{badc}=\overset{o}{44}$, además $c>d$, calcule el residuo al dividir

$\underbrace{\overline{dcabdcab\ldots}}_{122\text{ cifras}}$ entre 13.

A) 1
B) 4
C) 6
D) 7
E) 5

Resolución

Analizamos

- $\overline{abcd}=\overset{o}{45}\begin{cases}\overset{o}{5} \rightarrow d=5\\ \overset{o}{9} \rightarrow \overline{badc}=\overset{o}{9}\end{cases}$

- $\overline{badc}=\overset{o}{44}\begin{cases}\overset{o}{4} \quad \overline{dc}=\overset{o}{4};\ c>d \\ \quad\ 52 \text{ No cumple}\\ \quad\ 56 \text{ Sí cumple}\\ \overset{o}{11}\end{cases}$

Tenemos

$d=5 \ \wedge\ \overline{ba56}=\begin{cases}\overset{o}{11}\\ \overset{o}{9}\end{cases}$
$c=6$

$\rightarrow\ \overline{ba56}=\overset{o}{99}$

Por el criterio del 99

$\overline{ba}+56=\overset{o}{99}$
$b=4,\ a=3$

Reemplazamos y aplicamos el criterio del 13:

122 cifras $=\overset{o}{12}+2$

$$\begin{array}{c|c|c} 56 & 345634\ldots56 & 345634563456\\ 31 & & 431431431431\\ -+ & & +\ \ -\ \ +\ \ -\ \ + \\ & 0 & 0 \end{array}$$

cada 12 cifras nos da cero.

$=\overset{o}{13}-3\times5+1\times6$

$=\overset{o}{13}-9$

$=\overset{o}{13}+4$

Por lo tanto, el residuo de dividir entre 13 es 4.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Calcule la última cifra al expresar $22_{(3)}\times333_{(4)}\times4444_{(5)}\times\ldots\times(27)(27)\ldots(27)_{(28)}$ en el sistema de numeración de base 8^{13}.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 7

Resolución

Observación

Todo número impar positivo elevado al cuadrado es $\overset{\circ}{8}+1$, luego

$$K\in Z^+;\ (2K+1)^2=4\underbrace{K(K+1)}_{\overset{\circ}{2}}=\overset{\circ}{8}+1$$
$$\underbrace{\hphantom{4K(K+1)}}_{\overset{\circ}{8}}$$

Sea

$$N=22_{(3)}\times 333_{(4)}\times 4444_{(5)}\times \ldots \times (27)(27)\ldots(27)_{(28)}$$
$$\downarrow\ (3^2-1)\qquad \downarrow\ (5^4-1)$$

Se observa que de los 26 factores, los de lugar impar son de la forma $(\text{impar})^2-1$, por lo tanto son $\overset{\circ}{8}$. Entonces, N contiene al menos 13 factores 8.

$$N=\overset{\circ}{\overline{(8^{13})}}=\overline{\ldots r}_{(8^{13})}=\overset{\circ}{\overline{(8^{13})}}+\underset{\downarrow\ 0}{r}$$

Por lo tanto, la última cifra es cero.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Karla invirtió S/.1136 en la compra de pantalones y casacas, cuyo costo por unidad era de S/.28 y S/.45, respectivamente. ¿Cuántos artículos compró en total, si la cantidad de pantalones adquiridos fue la menor posible?

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

Resolución

	Pantalón	Casaca
Costo unitario	S/.28	S/.45
Cantidad	P	C

Gasto total

$$\underbrace{28P}_{\overset{\circ}{4}}+45C=\underbrace{1136}_{\overset{\circ}{4}}$$

$$\overset{\circ}{4}+45C=\overset{\circ}{4}\quad\rightarrow\quad 45\cdot C=\overset{\circ}{4}$$

son PESI

$$\rightarrow\ C=\overset{\circ}{4}$$

Sea $C=4K$:

$$28P+45(4K)=1136$$

$$7P+45K=284\qquad \text{(I)}$$

Con módulo 7: $\overset{\circ}{7}+\left(\overset{\circ}{7}+3\right)K=\overset{\circ}{7}+4$

$$3K=\overset{\circ}{7}+\underbrace{4+14}$$
$$3K=\overset{\circ}{7}+18$$
$$\cancel{3}K=\overset{\circ}{7}+\cancel{3}\times 6$$
$$K=\overset{\circ}{7}+6$$
$$\hookrightarrow 6,13,20,\ldots$$

Única solución en (I) es

$$\left.\begin{array}{l}K=6\ \wedge\ P=2\\ \rightarrow\ C=4(6)=24\end{array}\right\}P+C=26$$

En total, compró 26 artículos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Si $\overline{abcde}=\overset{\circ}{11}+6;\ a\times\overline{bc}=\overline{(2c)(3c)}$ y $\overline{bdaec}=\overset{\circ}{9}$ calcule $a\times b\times c\times d\times e$.

A) 324 B) 432 C) 128
D) 436 E) 864

Resolución

Tenemos

$a\times\overline{bc}=\overline{(2c)(3c)}=23\times c$; $(3c)<10$

$a=3$, $\overline{bc}=23$, $c=3$

Como

$\overline{bdaec}=\overset{o}{9} \rightarrow \overline{abcde}=\overset{o}{9}$

Luego

$\overline{abcde}= \begin{cases} \overset{o}{11}+6+\mathbf{66} \\ \overset{o}{9}+\mathbf{72} \end{cases}$

$\rightarrow \overline{abcde}=\overset{o}{\overline{\text{MCM}(11;9)}}+72=\overset{o}{99}+72$

$\leftrightarrow a+\overline{bc}+\overline{de}=\overset{o}{99}+72$

$\overline{de}=\overset{o}{99}+46 \rightarrow \overline{de}=46$

$\therefore a\times b\times c\times d\times e=432$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

Al formar un numeral, se observa que la cifra de mayor orden es la mitad de la cifra de orden anterior; además, al dividir dicho numeral entre 8; 9 y 11 se obtiene como residuo 7; 2 y 3, respectivamente. Calcule la suma de las cuatro cifras del numeral.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

Resolución

$\overline{a(2a)mn} \begin{cases} \overset{o}{8}+7 \\ \overset{o}{9}+2=\overset{o}{9}+2+\mathbf{45} \\ \overset{o}{11}+3=\overset{o}{11}+3+\mathbf{44} \end{cases}$ $\left.\right\} \overset{o}{99}+47$

Por criterio del 8 y del 99:

- $\overline{(2a)mn}=\overset{o}{8}+7 \rightarrow \underbrace{(2a)\times10^2}_{\overset{o}{8}}+\overline{mn}=\overset{o}{8}+7$

  $\rightarrow \overline{mn}=\overset{o}{8}+7$

- $\overline{a(2a)}+\overline{mn}=\overset{o}{99}+47$

$\overline{a(2a)}$		$\overline{mn}$
1	2	35
2	4	23
3	6	11
4	8	99

El único que cumple con $mn=\overset{o}{8}+7$ es $\overline{mn}=23$

Cumple: $a=2$, $m=2$, $n=3$

El número es 2423.

Por lo tanto, la suma de cifras es

$2+4+2+3=11$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Si $\overline{mnnmnn}_{(5)}=...2_{(17)}$, calcule $m+n$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución

Sabemos que

$$\overline{mnnmnn}_{(5)}=...2_{(17)}=\overset{o}{17}+2$$

$$126\times\overline{mnn}_{(5)}=\overset{o}{17}+2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\overset{o}{17}+7\right)$$

$$\rightarrow\ \overline{mnn}_{(5)}=\overset{o}{17}+10$$

$$25m+6n=\overset{o}{17}+10$$

$$8m+6n=\overset{o}{17}+10$$

$$4m+3n=\overset{o}{17}+5\,;\ m<5\ \wedge\ n<5$$

$$4m+3n=22$$

$$\downarrow\quad\downarrow$$

$$4\quad 2$$

$$\therefore\ m+n=6$$

Clave **E**

Comprará el mayor número de entradas con S/.1610; entonces, del más barato compra más (a) y del más caro compra menos (b y c).

$$\underbrace{42a}+66b+\underbrace{77c}=\underbrace{1610}$$

$$\overset{o}{7}+66b=\overset{o}{7}=\overset{o}{7}$$

$$b=\overset{o}{7}\ \rightarrow\ b=7\ \text{(mínimo)}$$

Reemplazando b y reduciendo, tenemos

$$\underbrace{6a}+\underbrace{11c}=\underbrace{164}\qquad(\alpha)$$

$$\overset{o}{6}+\overset{o}{6}-1c=\overset{o}{6}+2\ \rightarrow\ -c=\overset{o}{6}-4$$

Luego

$$c=\overset{o}{6}+4\ \rightarrow\ c=4\ \text{(mínimo)}$$

En (I): $6a+11(4)=164$

$\therefore\ a=20$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Para un concierto se han dispuesto tres clases de entradas, cuyos costos son S/.42; S/.66 y S/.77 cada una. Jesús Fernando es un vendedor de entradas que cuenta con S/.1610 y desea comprar el mayor número de entradas. ¿Cuántas entradas de menor costo comprará como máximo? Considere que debe invertir todo su dinero y también comprar al menos una de cada precio.

A) 17 B) 19 C) 20
D) 21 E) 23

Resolución

Clases de entrada	Precio	Cantidad de entradas
A	42	*a*
B	66	*b*
C	77	*c*

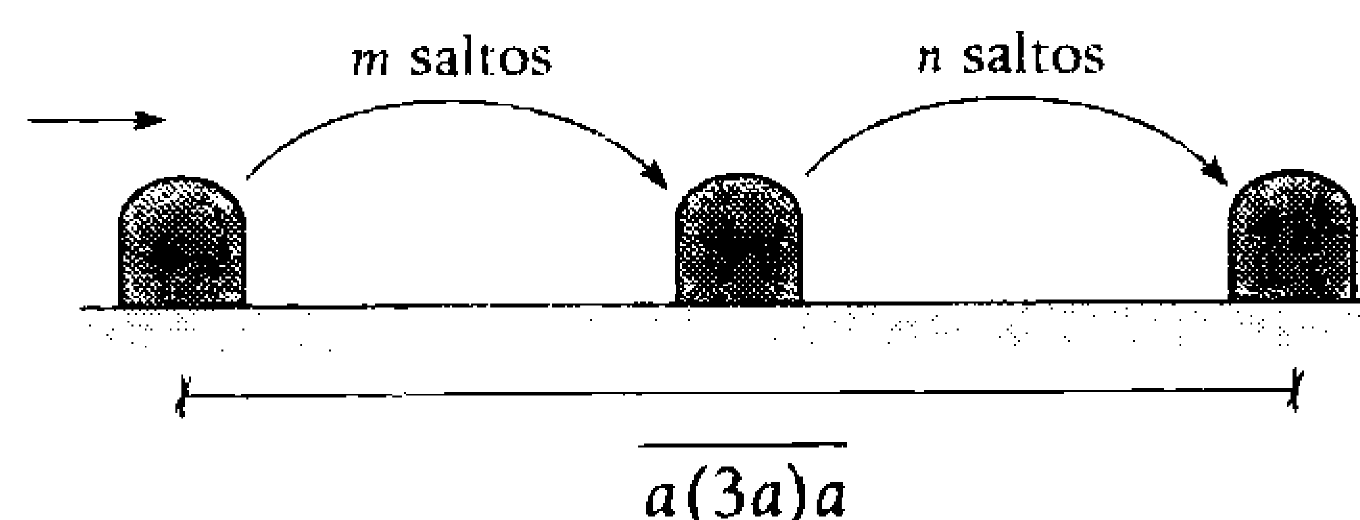
PROBLEMA N.° 8

Un ratón sale de su hueco hacia otro hueco dando saltos de 11 cm cada uno, y luego va a otro hueco con saltos de 7 cm cada uno. Si en total ha recorrido un número par de centímetros, de la forma $\overline{a(3a)a}$, halle el total de saltos que ha dado en todo su recorrido.

A) 10 B) 15 C) 17
D) 25 E) 30

Resolución

Del enunciado, se tiene



a: par $\wedge$ $(3a)<10\ \rightarrow\ a=2$

Luego

$$\underbrace{11m}_{} + \underbrace{7n}_{} = 262 \qquad \text{(I)}$$

$$\left(\overset{o}{7}+4m\right)+\overset{o}{7} = \overset{o}{7}+3$$

Analizamos

$$4m=\overset{o}{7}+3 \text{ ; en (I): } n$$

$4m=\overset{o}{7}+3$	en (I): n
6	28
13	17
20	6

$$\to\ m+n= \begin{cases} 34 \\ 30 \\ 26 \end{cases}$$

Por lo tanto, el total de saltos es 30.

Clave E

PROBLEMA N.° 9

Sea $\overline{abcde}_{(9)}+\overline{edcba}_{(7)}=\overline{\ldots(2c)}_{(8)}$.
Halle el complemento aritmético de $\overline{ae}_{(5)}$, si este es máximo y $a \neq e$.

A) $32_{(5)}$ B) $14_{(5)}$ C) $13_{(5)}$
D) $31_{(5)}$ E) $41_{(5)}$

Resolución

De los datos:

- $\overline{ae}_{(5)}$ es máximo, entonces a es máximo
- $\underbrace{\overline{a\,b\,c\,d\,e}_{(9)}}_{\overset{o}{8}+a+b+c+d+e} + \underbrace{\overline{\underset{+\,-\,+\,-\,+}{e\,d\,c\,b\,a}}_{(7)}}_{\overset{o}{8}+e-d+c-b+a} = \underbrace{\overline{\ldots(2c)}_{(8)}}_{\overset{o}{8}+2c}$

$$\overset{o}{8}+a+b+c+d+e + \overset{o}{8}+e-d+c-b+a = \overset{o}{8}+2c$$

Luego

$$2a+2e=\overset{o}{8}$$

$$a+e=\underbrace{\overset{o}{4}}_{} \qquad a<5;\ a\neq e$$

	a	e		
(No cumple)	4	4	8	$e<5$
	3	1	4	$(a\neq 0;\ e\neq 0)$

El máximo valor de a es para

$$a=3 \ \wedge\ e=1$$

$$\to\ \text{CA}[\underbrace{\overline{ae}_{(5)}}_{\text{máximo}}]=\text{CA}[31_{(5)}]$$

$$=100_{(5)}-31_{(5)}$$

$$=14_{(5)}$$

Por lo tanto, el complemento aritmético de $\overline{ae}_{(5)}$ es $14_{(5)}$.

Clave B

PROBLEMA N.° 10

Si $N=\underbrace{32323232\ldots}_{2015\text{ cifras}}{}_{(15)}$;

halle la suma de las dos últimas cifras al expresar N en base cinco.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución

Analizamos

$$N=\underbrace{32323232\ldots323}_{2015\text{ cifras}}{}_{(15)}=\overline{\ldots ab}_{(5)}=\overset{o}{25}+\overline{ab}_{(5)}$$

Luego

$$N=\underbrace{32323232\ldots3\times\underbrace{15^2}_{\overset{o}{25}}}_{\overset{o}{25}}+\underbrace{\underbrace{23_{(15)}}_{33}}_{\overset{o}{25}+8}=\overset{o}{25}+8$$

$$\to\ \overline{ab}_{(5)}=8=13_{(5)}$$

Por lo tanto, la suma de las dos últimas cifras es 4.

Clave B

PROBLEMA N.° 11

Dado que $M=\overline{ab3}_{(6)}\times\overline{mn5}_{(18)}\times\overline{cc9}_{(30)}$, halle la cifra de menor orden al expresar M en el sistema senario. Dé como respuesta la última cifra al expresar el menor numeral de la base 5, cuya suma de cifras es 12, en el sistema que tenga por base a la cifra de menor orden que encontró inicialmente.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

$$M=\underbrace{\overline{ab3}_{(6)}}_{\overset{o}{6}+3}\times\underbrace{\overline{mn5}_{(6)}}_{\overset{o}{18}+5}\times\underbrace{\overline{cc9}_{(30)}}_{\overset{o}{30}+9}=\underbrace{\overline{...x}_{(6)}}_{\overset{o}{6}+x}$$

$$\underbrace{\left(\overset{o}{6}+3\right)\left(\overset{o}{6}+5\right)\left(\overset{o}{6}+3\right)}_{\overset{o}{6}+3\cdot 5\cdot 3}=\overset{o}{6}+x$$

Por propiedad

$$\overset{o}{6}+45=\overset{o}{6}+x$$

$$\overset{o}{6}+3=\overset{o}{6}+x$$

$$\rightarrow\ x=3$$

El menor número de base 5 con suma de cifras 12:

$$\underbrace{444_{(5)}}_{\underbrace{124}_{\overset{o}{3}+1}}=\underbrace{\overline{...n}_{(3)}}_{\overset{o}{3}+n}\quad(n<3)$$

$$\overset{o}{3}+1=\overset{o}{3}+n$$

$\therefore\ n=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

¿Cuántos números de la forma $\overline{ab6}$ existen que sean $\overset{o}{12}$?

A) 12 B) 14 C) 15
D) 17 E) 20

Resolución

Por condición

$$\overline{ab6}=\overset{o}{12}=12K\ \rightarrow\ K=\begin{cases}...3\\...8\end{cases}$$

Luego

$$106\le 12K\le 996$$

$$8{,}8\le\ K\ \le 83$$

Entonces, los valores que toma K son:

$$K:\underbrace{13;23;33;...;83}_{8\text{ valores}}$$

$$K:\underbrace{18;28;38;...;78}_{7\text{ valores}}$$

Por lo tanto, cumplen 15 números.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

Si $\overline{abc}$ es el mayor numeral que es igual a 27 veces la suma de sus cifras, calcule el residuo al dividir $\overline{abc}^{\overline{ab(c+2)}}$ entre 7.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Por condición; como a, b y c son cifras, cada una es a lo más 9, por eso $a+b+c$ es a lo más 27.

$$\underbrace{\overline{abc}}_{\text{máximo}}=27(a+b+c)$$

$$\downarrow$$

$$\overline{abc}=\overset{o}{9}$$

Por criterio de divisibilidad

$a+b+c=\overset{o}{9}$

$(a+b+c) \in \{9; 18; 27\}$

$\overline{a\ b\ c} = 27 \times \underbrace{(a+b+c)}$

$a\ b\ c$	$(a+b+c)$	
2 4 3	9	Sí
4 8 6	18	Sí
7 2 9	27	No

Hay dos soluciones, pero el máximo es

$\overline{abc}=486$

Reduciendo respecto al módulo 7

$$486^{488}=\left(\overset{o}{7}+3\right)^{488}$$

$$=\overset{o}{7}+\underbrace{3^{488}}$$

$$=\overset{o}{7}+(3^3)^{162}\times \underbrace{3^2}$$

$$=\overset{o}{7}+\left(\overset{o}{7}-1\right)^{162}\times\left(\overset{o}{7}+2\right)$$

$$=\overset{o}{7}+2$$

Por lo tanto, el residuo es 2.

Clave B

PROBLEMA N.° 14

Se sabe que $(\overline{aaa7})^{\overline{(aaa7)}}=\overset{o}{5}+2$. Determine el menor resto de dividir $\overline{aaa}$ entre 7.

A) 0 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Por condición

$(\overline{aaa7})^{\overline{aaa7}}=\overset{o}{5}+2;$

Como $\overline{aaa7}=\overset{o}{5}+2$

$2^{\overline{aaa7}}=\overset{o}{5}+2$

Analizando los restos potenciales:

$$\left.\begin{array}{l}2^0=\overset{o}{5}+1\\ \mathbf{2^1=\overset{o}{5}+2}\\ 2^2=\overset{o}{5}+4\\ 2^3=\overset{o}{5}+3\end{array}\right\}\text{gaussiano}=4$$

$2^4=\overset{o}{5}+1$

$\vdots$

Tenemos que $2^{\overset{o}{4}+1}=\overset{o}{5}+2$

$\rightarrow \overline{aaa7}=\overset{o}{4}+1$

Luego

$\overline{a7}=\overset{o}{4}+1$; $a\in\{1; 3; 5; 7; 9\}$

Piden el menor valor de r en:

$\overline{aaa}=\overset{o}{7}+r$

$\rightarrow 111a=\overset{o}{7}+r$, con $a \rightarrow 7$

$\therefore\ r_{\text{mínimo}}=0$

Clave A

PROBLEMA N.° 15

A un niño del nivel primario le han pedido en total 10 cuadernos (cuadriculados, rayados y doble raya). Al comprar dichos cuadernos, su padre ha gastado en total S/.46,5. ¿Cuántos cuadernos cuadriculados compró, si se sabe que los cuadernos cuadriculados, rayados y de doble raya cuestan S/.4,00; S/.3,50 y S/.8,00 cada uno, respectivamente?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Colocamos los datos en la tabla:

	Cuadriculado	Rayado	Doble raya	Total
n.° de cuadernos	c	r	d	10
Costo unitario	4	3,5	8	

- $c+r+d=10$ (I)
- $4c+3,5r+8d=46,5$; luego
  $8c+7r+16d=93$ (II)

Del sistema de ecuaciones, tenemos

$$(II)-8\times(I):\ 8\underset{\smile}{d}=13+\underset{\smile}{r}$$

2	3	
3	11	No cumple

Solo puede ser $d=2$ y $r=3$

en (I): $c+3+2=10 \rightarrow c=5$

Por lo tanto, compró 5 cuadernos cuadriculados.

Clave C

PROBLEMA N.° 16

Si

$$(\underbrace{444...444}_{85\text{ cifras}})^{\overline{ab}}=\overset{o}{7}-6,$$

¿cuántos valores toma $\overline{ab}$?

A) 20
B) 25
C) 30
D) 32
E) 47

Resolución

Analizamos

$$(\underbrace{44...\ \underset{-2}{4}\ \underset{-3}{4}\ \underset{-1}{4}\ \underset{2}{4}\ \underset{3}{4}\ \underset{1}{4}}_{85\text{ cifras}})^{\overline{ab}} \quad \text{ó}$$

$$(\underbrace{44...\ \underset{-2}{4}\ \underset{-3}{4}\ \underset{-1}{4}\ \underset{2}{4}\ \underset{3}{4}\ \underset{1}{4}}_{0})^{\overline{ab}}=\overset{o}{7}-6$$

Cada bloque de 6 cifras se anula

Como $85=\overset{o}{6}+1$, entonces: $4^{\overline{ab}}=\overset{o}{7}-6=\overset{o}{7}+1$

Analizando los restos potenciales:

$$\left.\begin{array}{l} 4^0=\overset{o}{7}+1 \\ 4^1=\overset{o}{7}+4 \\ 4^2=\overset{o}{7}+2 \end{array}\right\}\text{gaussiano}=3$$

$4^3=\overset{o}{7}+1$

$\vdots$

Tenemos $4^{\overset{o}{3}}=\overset{o}{7}+1$

$\rightarrow \overline{ab}=\overset{o}{3}$

$\overline{ab}:\underbrace{12;15;18;...;99}$

$$\frac{99-9}{3}=30\text{ números}$$

Por lo tanto, toma 30 valores.

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Se cumple que

$F=\overline{ab3}^{\overline{c2}}+\overline{ab5}^{\overline{c4}}+\overline{ab7}^{\overline{c6}}+...+\overline{3ab9}^{\overline{c0c8}}$

Además, $F=\overline{...d}_{(8)}$. Calcule el residuo de dividir entre 7 el numeral $\overline{(d+8)(2d)(4+d)}$.

A) 1
B) 5
C) 6
D) 3
E) 0

Resolución

Observación

$$(\text{n.° impar})^{\text{n.° par}} = \overset{\circ}{8} + 1$$

Por dato:

$$F = \overline{ab3}^{\overline{c2}} + \overline{ab5}^{\overline{c4}} + \overline{ab7}^{\overline{c6}} + \ldots + \overline{3ab9}^{\overline{c0c8}} = \overline{\ldots d}_{(8)}$$

$$\underbrace{\overset{\circ}{8}+1}\quad \underbrace{\overset{\circ}{8}+1}\quad \underbrace{\overset{\circ}{8}+1}\quad \underbrace{\overset{\circ}{8}+1}\quad \underbrace{\overset{\circ}{8}+d}$$

Cantidad de términos : $\dfrac{\overline{3ab9} - \overline{ab3}}{2} + 1 = 1504$

$$F = \overset{\circ}{8} + \underbrace{1504}_{\overset{\circ}{8}} = \overset{\circ}{8} + d$$

Por propiedad

$$\overset{\circ}{8} = \overset{\circ}{8} + d \;\rightarrow\; d = \overset{\circ}{8}$$

Por ser cifra de la base 8 ($d < 8$)

Reemplazamos

$$\overline{\underbrace{(d+8)}_{8}\underbrace{(2d)}_{0}\underbrace{(4+d)}_{4}} = \overset{\circ}{7} + 6$$

Por lo tanto, el residuo es 6.

Clave C

PROBLEMA N.° 18

Jesús puede ahorrar S/.30 diarios, pero cada día que se encuentra con su amiga María se gasta S/.7, y si no se encuentra con su amiga María sale con Rosa, con quien gasta S/.8. Averigüe al cabo de cuántos días ha logrado ahorrar S/.223, a pesar de que cada día, sin excepción, salió con una de las amigas. Calcule cuántos días han transcurrido como máximo.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

Del enunciado, tenemos:

	N.° de días	ahorro por día (S/.)
María	a	$30-7=23$
Rosa	b	$30-8=22$

Luego, para que la cantidad de días transcurridos sea máxima, debe salir más días con Rosa.

$$\underbrace{23\overset{\text{mín}}{a}} + \underbrace{22\overset{\text{máx}}{b}} = 223$$

$$\left(\overset{\circ}{22} + a\right) + \overset{\circ}{22} = \overset{\circ}{22} + 3$$

$$a = \overset{\circ}{22} + 3 \;\rightarrow\; a = 3 \;\wedge\; b = 7$$

Por lo tanto, han transcurrido 10 días como máximo.

Clave C

PROBLEMA N.° 19

En un salón de clases se observa que la onceava parte de los hombres usan lentes y la treceava parte de las mujeres usan pendientes. Se sabe que el total de alumnos es menor que 100, además, es múltiplo del tercer número cuadrado perfecto y múltiplo del segundo número cubo perfecto. Halle la diferencia entre el número de varones y mujeres.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

- Un onceavo de los varones usa lentes, entonces el número de varones es $\overset{\circ}{11} = 11a$.
- Un treceavo de las mujeres usan pendientes, entonces el número de mujeres es $\overset{\circ}{13} = 13b$.
- El total de alumnos es menor que 100 y múltiplo de 3^2 y de 2^3, el único será 72.

Analizamos

$$\underbrace{11a}+\underbrace{13b}=72$$

$$\overset{o}{11}+2b=\overset{o}{11}+6 \quad \rightarrow \quad b=\overset{o}{11}+3$$

Solo puede ser $b=3$

Luego

$$11a+13(3)=72 \quad \rightarrow \quad a=3$$

La diferencia entre la cantidad de varones y mujeres es

$$13\times(3)-11\times(3)=6$$

Clave D

PROBLEMA N.° 20

A un acto teatral ingresaron 1370 personas entre jóvenes y niños. El total de mujeres que ingresaron es los 3/11 de los jóvenes; la cantidad de personas que usan anteojos es igual a dos séptimos de la cantidad de jóvenes, y la tercera parte de los jóvenes llegaron tarde. ¿Cuántas mujeres llegaron tarde, si son 1/5 del total de jóvenes que llegaron tarde, además, la cantidad de niños es menor que el número de mujeres?

A) 31 B) 44 C) 77
D) 101 E) 105

Resolución

Como la cantidad de personas debe ser entera, del enunciado, tenemos:

J: cantidad de jóvenes

$$J=\begin{cases}\overset{o}{11}\\ \overset{o}{7}\\ \overset{o}{3}\\ \overset{o}{5}\end{cases}$$

$$J=\overline{MCM(11;7;3;5)}^{\,o}=\overset{o}{1155}$$

Luego

$$\underset{1155}{J}+\underset{215}{N}=1370$$

Calculamos la cantidad de mujeres que llegaron tarde

$$\frac{1}{5}\left[\underbrace{\frac{1}{3}J}_{\text{jóvenes que llegaron tarde}}\right]=77$$

Clave C

PROBLEMA N.° 21

Al dividir $\overline{abcd}$ entre $\overline{ef}$ se obtiene de residuo 18, y si $\overline{ghij}$ se divide entre $\overline{ef}$, se obtiene residuo 4. Si se sabe que $\overline{ef}$ divide a 72, calcule el residuo de dividir

$(100\overline{ab}+\overline{cd})^{15}(10\overline{ghi}+j)^{15}$ entre $\overline{ef}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 31 E) 18

Resolución

Del dato:

- $\overline{abcd}=\overset{o}{\overline{ef}}+18$
- $\overline{ef}$ divide a 72 $\rightarrow$ $72=\overset{o}{\overline{ef}}$

Piden

$$\underbrace{(100\times\overline{ab}+\overline{cd})}_{\underbrace{\overline{ab00}+\overline{cd}}_{\overline{abcd}}}{}^{15}\times\underbrace{(10\cdot\overline{ghi}+j)}_{\underbrace{\overline{ghi0}+j}_{\overline{ghij}}}{}^{15}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\overset{o}{\overline{ef}}+18\right)^{15}\times\left(\overline{ghij}\right)^{15}$$

Luego

$$\left(\overset{o}{\overline{ef}}+18^{15}\right)\times\left(\overline{ghij}\right)^{15}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{18\times 18\times 18^{13}}_{\text{Como tiene factor 72 y 72 es } \overset{o}{\overline{ef}}}$$

Reemplazamos

$$\underbrace{\left(\overset{o}{\overline{ef}}+\overset{o}{\overline{ef}}\right)\times\left(\overline{ghij}\right)^{15}}_{\overset{o}{\overline{ef}}}$$

Por lo tanto, el residuo es cero.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Determine la última cifra al llevar al sistema decimal el número

$$(\underbrace{666\ldots66_{(7)}}_{(\overline{abc0}_{(4)})\text{ cifras}})^{\overline{abc}!}$$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 6 E) 8

Resolución

Sea $N=(\underbrace{666\ldots66_{(7)}}_{(\overline{abc0}_{(4)})\text{ cifras}})^{\overline{abc}!}$

Analizamos $\overline{abc0}_{(4)}=4\times\overline{abc}_{(4)}$

$$666\ldots66_{(7)}=(\underbrace{7^4}_{\overset{o}{10}+1})^{\overline{abc}_{(4)}}-1=\overset{o}{10}$$

Reemplazamos

$$N=\left(\overset{o}{10}\right)^{\overline{abc}!}=\overset{o}{10}=\ldots0$$

Por lo tanto, la última cifra es cero.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Calcule la suma de los cinco primeros términos múltiplos de 7 de la siguiente sucesión:

3; 8; 15; 24...

A) 700 B) 777 C) 889
D) 812 E) 847

Resolución

Analizamos la sucesión de 2.° orden

$C=0$, 3, 8, 15, 24,

$A+B=3$ 5 7 9

$2A=2$ 2 2

Resolviendo

$A=1;\ B=2\ \text{ y }\ C=0$

El término general es

$$t_n=An^2+Bn+C$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

$$1\quad 2\quad 0$$

$$t_n=n^2+2n$$

Queremos los términos $\overset{o}{7}$

$$t_n=n^2+2n=\overset{o}{7}$$

$$t_n=n(n+2)=\overset{o}{7}$$

Uno de los factores es $\overset{o}{7}$

$$n=\overset{o}{7}\quad\vee\quad n+2=\overset{o}{7}$$

Luego

n → $\overset{o}{7}$: 7; 14; 21; 28; ...

n → $\overset{o}{7}-2$: 5; 12; 19; 26; ...

cinco primeros valores de n

Entonces $t_n = n(n+2)$

$n=5 \rightarrow t_5 = 5\times 7 = 35$

$n=7 \rightarrow t_7 = 7\times 9 = 63$

$n=12 \rightarrow t_{12} = 12\times 14 = 168$

$n=14 \rightarrow t_{14} = 14\times 16 = 224$

$n=19 \rightarrow t_{19} = 19\times 21 = 399$

$\therefore\ t_5 + t_7 + t_{12} + t_{14} + t_{19} = 889$

Clave C

PROBLEMA N.° 24

Compré cuadernos de S/.1; S/.4 y S/.12. ¿Cuántos cuadernos de cada uno de estos precios compré, si en total compré 40 cuadernos y gasté un total de S/.100?

A) 23; 6; 2 B) 26; 8; 1 C) 27; 10; 5
D) 28; 9; 3 E) 29; 7; 4

Resolución

Del enunciado

Cantidad de cuadernos	a	b	c
Costos unitarios (S/.)	1	4	12

Luego

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=40 \\ a+4b+12c=100 \end{array}\right)(-)$$

$$\underbrace{3b}_{\overset{o}{3}} + 11c = \underbrace{60}_{\overset{o}{3}};\ 11c = \overset{o}{3}$$

$\rightarrow c = \overset{o}{3}$: $c=3$; $b=9$ $\wedge$ $a=28$

$\therefore$ 28; 9; 3

Clave D

PROBLEMA N.° 25

¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 99?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

Resolución

Tenemos $a \neq 0$, por ser la primera cifra del numeral.

$$\overline{abba} = \overset{o}{99}\begin{cases} \overset{o}{11} \\ \overset{o}{9} \end{cases}$$

- Si $\underbrace{\overline{abba}}_{-+-+} = \overset{o}{11}$

$$\overset{o}{11} - a + b - b + a = \overset{o}{11}$$

$$\overset{o}{11} = \overset{o}{11}$$

$\rightarrow$ siempre es $\overset{o}{11}$

- Si $\overline{abba} = \overset{o}{9}$

Suma de cifras:

$$2(a+b) = \overset{o}{9} \rightarrow a+b = \overset{o}{9}$$

$a+b=9 \vee a+b=18$

9 casos:

a	b
1	8
2	7
3	6
⋮	⋮
9	0

1 caso: 9 9

Por lo tanto, son 10 los números divisibles por 99.

Clave D

PROBLEMA N.° 26

Al dividir un número entre 11, el residuo es 3, y al dividir otro número también entre 11, el residuo fue 6. Halle el residuo al dividir el producto de los dos números entre 11 y dé como respuesta el número de sistemas de numeración en los cuales dicho residuo al cuadrado se expresa como un numeral, cuya cifra de menor orden sea máxima.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Del enunciado, se tiene

$A=\overset{o}{11}+3 \quad \wedge \quad B=\overset{o}{11}+6$

$\rightarrow \quad A\times B=\overset{o}{11}+3\times 6=\overset{o}{11}+7$

Luego, por condición

$7^2=\overline{\ldots(n-1)}_{(n)}=\overset{o}{n}+(n-1)$

$50=\overset{o}{n}; \quad n\geq 2$

Además, n es divisor de 50, entonces

n: 2; 5; 10; 25; 50

Por lo tanto, son 5 los sistemas de numeración que verifican la condición.

Clave D

PROBLEMA N.° 27

Si N, al ser escrito en bases 7; 9 y 11, siempre termina en cifra máxima con $N<1000$, determine el valor de la última cifra al expresar N^{996} en base 13.

A) 0 B) 1 C) 4
D) 7 E) 9

Resolución

Por condición

- $N<1000$

- N
  - $\ldots 6_{(7)}=\overset{o}{7}+6=\overset{o}{7}-1$
  - $\ldots 8_{(9)}=\overset{o}{9}+8=\overset{o}{9}-1$
  - $\ldots(10)_{(11)}=\overset{o}{11}+10=\overset{o}{11}-1$

$\rightarrow \quad N=\overset{o}{\overline{\text{mcm}(7;9;11)}}-1$

$N=\overset{o}{693}-1 \quad (N<1000)$

$\therefore \quad N=692$

- $N^{996}=(692)^{996}$

$N^{996}=\left(\overset{o}{13}+3\right)^{996}$

$N^{996}=\overset{o}{13}+3^{996}$

$N^{996}=\overset{o}{13}+\underbrace{(3^3)^{332}}_{(\overset{o}{13}+1)^{332}}$

$N^{996}=\overset{o}{13}+\overset{o}{13}+1^{332}$

$N^{996}=\overset{o}{13}+1$

$N^{996}=\ldots 1_{(13)}$

Por lo tanto, el valor de la última cifra es 1.

Clave B

PROBLEMA N.° 28

Calcule la suma de todos los valores de n si $(356\ 359)^{\overline{n45n}}=\overset{o}{13}+9$.

A) 14 B) 8 C) 12
D) 16 E) 7

Resolución

Por condición

$$(356359)^{\overline{n45n}}=\overset{o}{13}+9$$

Veamos

$$\underset{4\ \ 3\ \ -1\ \ -4\ \ -3\ \ 1}{3\ 5\ 6\ 3\ 5\ 9}=\overset{o}{13}+3$$

Entonces

$$3^{\overline{n45n}}=\overset{o}{13}+9$$

Analizando los restos potenciales:

$$\left.\begin{array}{l} 3^0=\overset{o}{13}+1 \\ 3^1=\overset{o}{13}+3 \\ 3^2=\overset{o}{13}+9 \end{array}\right\}\text{gaussiano}=3$$

$$3^3=\overset{o}{13}+1$$

$$\vdots$$

Tenemos que $3^{\overset{o}{3}+2}=\overset{o}{13}+9$

$$\underbrace{2n+9}_{\text{suma de cifras}}=\overset{o}{3}+2$$

$$n=\overset{o}{3}+1$$

$\rightarrow$ n: 1; 4; 7

$\therefore$ $1+4+7=12$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir $E=2^{3K+1}+2^{6K+4}+2^3$ entre 7?

A) 1 B) 2 C) 6
D) 5 E) 4

Resolución

Por condición

$$E=2^{3K+1}+2^{6K+4}+2^3$$

Respecto al módulo 7

$$E=(2^3)^K\cdot 2^1+(2^6)^K\cdot 2^4+2^3$$

$$(\overset{o}{7}+1)^K\cdot 2+(\overset{o}{7}+1)^K\cdot(\overset{o}{7}+2)+\overset{o}{7}+1$$

Se reduce a

$$E=\overset{o}{7}+\underbrace{1^K\cdot 2}_{2}+\underbrace{1^K\cdot 2}_{2}+1$$

$$E=\overset{o}{7}+5$$

Por lo tanto, el residuo es 5.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Si $(\overline{361a})^7=\overset{o}{56}+35$, halle el residuo de dividir $\overline{aaa}$ entre 17.

A) 5 B) 1 C) 9
D) 13 E) 16

Resolución

Por condición

$$(\overline{361a})^7=\overset{o}{56}+35=\begin{cases}\overset{o}{8}+3\\ \overset{o}{7}\end{cases}$$

$$\overset{o}{56}\downarrow\ \overset{o}{8},\ \overset{o}{7} \qquad 35\downarrow\ (\overset{o}{8}+3),\ \overset{o}{7}$$

Analizamos

- $(\overline{361a})^7 = \overset{\circ}{8}+3$ (impar)

  $\rightarrow$ a es impar

- $(\overline{361a})^7 = \overset{\circ}{7}$

  Como 7 es primo:

  $\overline{361a} = \overset{\circ}{7}$

  -1231

  $\rightarrow$ $12+a=\overset{\circ}{7}$

  $\downarrow$

  2 No cumple

  9 Sí cumple

Luego

$\overline{aaa}=999=\overset{\circ}{17}+13$

Por lo tanto, el residuo es igual a 13.

Clave D

PROBLEMA N.° 31

Dado que $59^{(n^b-24)}=59^{\overline{ab}-12}+58$, halle el residuo de dividir entre 40 al número $\overline{abn}^{\overline{ab}}$.

A) 25 B) 15 C) 20
D) 18 E) 24

Resolución

Por condición

$$59^{n^b-24}=59^{\overline{ab}-12}+58$$

$$\underbrace{59^{\overline{ab}-12}}_{59^0}\times\underbrace{\left[59^{(n^b-24)-(\overline{ab}-12)}-1\right]}_{58}=58$$

Luego

$\overline{ab}-12=0 \quad \wedge \quad n^b-24=1$

$\overline{ab}=12 \quad \wedge \quad n^b=25$

$\rightarrow a=1;\ b=2 \wedge \quad n^b=5^2$

Piden el residuo de dividir entre 40 a

$R=125^{12} \rightarrow R=\overset{\circ}{5}$

$R=\overset{\circ}{8}+1$

$$R=\begin{cases}\overset{\circ}{5}+25\\ \overset{\circ}{8}+1+24\end{cases}$$

$R=\overset{\circ}{40}+25$

Por lo tanto, el residuo es 25.

Clave A

PROBLEMA N.° 32

Si $\underbrace{\overline{a3ba3ba3b\ldots a3b}}_{51\text{ cifras}}=\overset{\circ}{36}$, calcule la suma de los valores de $\overline{ab}$.

A) 128 B) 138 C) 136
D) 125 E) 140

Resolución

Sea

$$N=\underbrace{\overline{a3ba3ba3b\ldots a3b}}_{51\text{ cifras}}=\overset{\circ}{36}=\begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{9}\end{cases}$$

De donde:

- $N=\overset{\circ}{4} \leftrightarrow \overline{3b}=\overset{\circ}{4}$

  $\downarrow$

  2

  6

- $N=\overset{\circ}{9} \leftrightarrow 17(a+b+3)=\overset{\circ}{9}$

  $a+b+3=\overset{\circ}{9}$

  $\downarrow \quad \downarrow$

  4 2

  9 6

Entonces $\overline{ab}=\begin{cases}42\\ 96\end{cases}$

Por lo tanto, la suma de los valores de $\overline{ab}$ es 138.

Clave B

PROBLEMA N.° 33

¿En cuántos números de la forma $\overline{abcd}$ se cumple que la suma de sus cifras sea $\overset{\circ}{9}+3$ y, además, $(2\,098\,759)^{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{17}+14$?

A) 60 B) 61 C) 62 D) 58 E) 64

Resolución

Por condición

$$\underbrace{(2\,098\,759)}^{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{17}+14$$

$$\left(\overset{\circ}{17}+7\right)^{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{17}+14$$

$$7^{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{17}-3 \qquad \text{(I)}$$

Analizamos las potencias de 7 respecto al módulo 17

7^n ➡	7^0	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	7^{10}	7^{11}	7^{12}	7^{13}	7^{14}	7^{15}	7^{16}
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
r ➡	1	7	−2	3	4	−6	−8	−5	−1	−7	2	−3	−4	6	8	5	1

$g=16$

Luego

$$7^{\overset{\circ}{16}+11}=\overset{\circ}{17}-3 \qquad \text{(II)}$$

Entonces de (I) y (II)

$$\overline{abcd}=\overset{\circ}{16}+11$$

Por dato:

$$a+b+c+d=\overset{\circ}{9}+3$$

$$\rightarrow\ \overline{abcd}=\overset{\circ}{9}+3$$

Tenemos

$$\overline{abcd}=\overset{\circ}{16}+11\ \rightarrow\ \overset{\circ}{16}+75$$

Efectuamos

$$\overline{abcd}=\overset{\circ}{9}+3\ \rightarrow\ \overset{\circ}{9}+75$$

$$\rightarrow\ \overline{abcd}=\overset{\circ}{144}+75$$

Entonces

$$100\le 144K+75\le 10\,000$$

$$6{,}4\le K<68{,}9$$

$$K\in\underbrace{\{7;\ 8;\ 9;\ \ldots;\ 68\}}_{62\text{ números}}$$

Por lo tanto, se cumple en 62 números.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Si $\overline{a4a}^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1$;

¿cuántos valores puede tomar a?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

En

$$(\overline{a4a})^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1,$$

analizamos la base:

$$\overline{a4a}=\overset{o}{5}+r;\ r\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$$

- $\overline{a4a}=\overset{o}{5}+1 \leftrightarrow a:1\ 6\ 6$

  $\rightarrow \left(\overset{o}{5}+1\right)^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1$

- $\overline{a4a}=\overset{o}{5}+2 \leftrightarrow a:2\ 6\ 7$

  $2^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1$

Analizando los restos potenciales:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{2^0=\overset{o}{5}+1}\\ 2^1=\overset{o}{5}+2\\ 2^2=\overset{o}{5}+4\\ 2^3=\overset{o}{5}+3\end{array}\right\}\text{gaussiano}=4$$

$$2^4=\overset{o}{5}+1$$

$$\vdots$$

Tenemos que $2^{\overset{o}{4}}=\overset{o}{5}+1$

$\rightarrow \overline{a4a}=\overset{o}{4}$ No cumple

- $\overline{a4a}=\overset{o}{5}+3 \rightarrow a:3\ 6\ 8$

  $\rightarrow 3^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1$

Analizando los restos potenciales:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{3^0=\overset{o}{5}+1}\\ 3^1=\overset{o}{5}+3\\ 3^2=\overset{o}{5}+4\\ 3^3=\overset{o}{5}+2\end{array}\right\}\text{gaussiano}=4$$

$$3^4=\overset{o}{5}+1$$

$$\vdots$$

Tenemos que $3^{\overset{o}{4}}=\overset{o}{5}+1$

$\rightarrow \overline{a4a}=\overset{o}{4}$
$\downarrow$
8

- $\overline{a4a}=\overset{o}{5}+4 \rightarrow a:4\ 6\ 9$

  $\overline{a4a}=\overset{o}{5}-1$

Reemplazamos

$$\left(\overset{o}{5}-1\right)^{\overline{a4a}}=\overset{o}{5}+1$$

$\overline{a4a}$ es par $\rightarrow a=4$

Finalmente

a: 1; 6; 8 y 4

Por lo tanto, a toma 4 valores.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Halle el residuo de dividir A entre 5, si se sabe que $A=8\times 12^{336}+4\times p^{92}+7$; $(p\neq\overset{o}{5})$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

Resolución

Analizamos respecto al módulo 5

- Como p no es $\overset{o}{5}$, entonces la división entre 5 es inexacta, pueden ser 4 casos:

$p=\overset{o}{5}+1 \rightarrow p^4=\overset{o}{5}+1^4=\overset{o}{5}+1$

$p=\overset{o}{5}+2 \rightarrow p^4=\overset{o}{5}+2^4=\overset{o}{5}+1$

$p=\overset{o}{5}+3 \rightarrow p^4=\overset{o}{5}+3^4=\overset{o}{5}+1$

$p=\overset{o}{5}+4 \rightarrow p^4=\overset{o}{5}+4^4=\overset{o}{5}+1$

En los cuatro casos se cumple

$\rightarrow p^4=\overset{o}{5}+1$

$(p^4)^K=(\overset{o}{5}+1)^K$

Entonces $p^{\overset{o}{4}}=\overset{o}{5}+1$

Como $92=\overset{o}{4}$, $p^{92}=\overset{o}{5}+1$

- $A = 8\times \underbrace{\underbrace{12^{336}}_{...6}}_{} + 4\times \underbrace{p^{92}}_{} + 7$

$A = (...8) + 4\times(\overset{o}{5}+1) + \overset{o}{5}+2$

$A = \overset{o}{5}+3 + \overset{o}{5}+4 + \overset{o}{5}+2$

$A=\overset{o}{5}+4$

Por lo tanto, el residuo es 4.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

Si $\underbrace{\overline{nnmmnnmm...nnmm}}_{124\text{ cifras}}{}_{(7)}=\overline{...p3}_{(5)}$,

calcule x máximo en $\overline{mpnnpm}_{(12)}=\overline{...x}_{(7)}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Se tiene

$$\underbrace{\overline{nnmmnnmm...nnmm}}_{124\text{ cifras}}{}_{(7)}=\overline{...p3}_{(5)}=\overset{o}{5}+3$$

Analizamos los restos potenciales:

$$\left.\begin{aligned}7^0&=\overset{o}{5}+1\\7^1&=\overset{o}{5}+2\\7^2&=\overset{o}{5}+4\\7^3&=\overset{o}{5}+3\end{aligned}\right\}\text{gaussiano}=4$$

$7^4=\overset{o}{5}+1$

⋮

En el numeral se repite 31 veces el bloque

$\overline{nnmm}_{(7)}$

3421 ←

$=7n+3m$

Entonces

$31(7n+3m)=\overset{o}{5}+3$

$(\overset{o}{5}+1)(\overset{o}{5}+3)$

$7n+3m=\overset{o}{5}+3$

Luego

$2n+3m=\overset{o}{5}+3;\quad n<7 \wedge m<7$

n	m
1	2
5	1
2	3
6	2
3	4
4	5
5	6

Además

$$\overline{mpnnpm}_{(12)}=\overline{...x}_{(7)}=\overset{o}{7}+x$$

Analizamos los restos potenciales:

$$12^0=\overset{o}{7}+1$$

$$12^1=\overset{o}{7}+5$$

$$12^2=\overset{o}{7}+4$$

$$12^3=\overset{o}{7}+6=\overset{o}{7}-1$$

$$12^4=\overset{o}{7}+2=\overset{o}{7}-5$$

$$12^5=\overset{o}{7}+3=\overset{o}{7}-4$$

Entonces

$$\overline{m\,p\,n\,n\,p\,m}_{(12)}=\overset{o}{7}+x$$

$$-4\;-5\;-1\;4\;5\;1 \leftarrow$$

De donde

$$\underbrace{3(n-m)}=\overset{o}{7}+x$$

$3(n-m)$	x
-1	4
4	5

$\therefore\ x_{máx}=5$

Clave **E**

Resolución

Por condición

$$\overline{nmpnm}=\overset{o}{\overline{495}}$$

$$\downarrow$$

$$5\times 11\times 9$$

es $\overset{o}{5}; \overset{o}{\overline{11}}$ y $\overset{o}{9}$

Aplicamos los criterios:

- $\overline{nmpnm}=\overset{o}{5} \rightarrow m=0 \vee m=5$
- $\overline{nmpnm}=\overset{o}{\overline{11}} \rightarrow \not{n}-\not{m}+p-\not{n}+\not{m}=\overset{o}{\overline{11}}$

  $+-+-+$

  $p=\overset{o}{\overline{11}}\ (p<11)$

  $\rightarrow p=0$

- $\overline{nm0nm}=\overset{o}{9} \rightarrow 2n+2m=\overset{o}{9}$

  $n+m=\overset{o}{9}$

	n	m
Si $m=0$:	9	0
Si $m=5$:	4	5

$\therefore\ \overline{mnpnm}\in\{90\,090;\ 45\,045\}$

suman: $\underbrace{135\,135}$

Por lo tanto, la suma de cifras es: 18

Clave **D**

PROBLEMA N.° 37

Calcule la suma de todos los números de la forma $\overline{nmpnm}$ que son divisibles por 495. Dé la suma de cifras.

A) 15 B) 23 C) 20
D) 18 E) 24

PROBLEMA N.° 38

Si $3x+9y=\overset{o}{\overline{15}}$ y $6x+10y=\overset{o}{\overline{14}}$, entonces, $2x+y$ es siempre divisible por $\overline{a5}$, además, $x, y \in \mathbb{Z}$. Calcule a.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Tenemos:

$$3x+9y=\overset{\circ}{15} \quad \wedge \quad 6x+10y=\overset{\circ}{14}$$

$$3x=\overset{\circ}{15}+6y \qquad 3x+5y=\overset{\circ}{7}$$

$$x=\overset{\circ}{5}+2y \qquad 3x=\overset{\circ}{7}+9y$$

$$2x=\overset{\circ}{5}+4y \qquad x=\overset{\circ}{7}+3y$$

$$\rightarrow\ 2x+y=\overset{\circ}{5} \qquad 2x=\overset{\circ}{7}+6y$$

$$\rightarrow\ 2x+y=\overset{\circ}{7}$$

De donde

$$2x+y=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(5;7)}}=\overset{\circ}{35}$$

Como $2x+y=\overset{\circ}{\overline{a5}}$

$\therefore\ a=3$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

Dado que $\overline{abcd}=\overline{...n0}_{(5)}$, calcule cuántos números de la forma $\overline{dcba}$ son $\overset{\circ}{17}+2$ si c es cifra significativa.

A) 43 B) 47 C) 53
D) 57 E) 61

Resolución

Por dato:

- $\overline{abcd}=\overline{...n0}_{(5)}=\overset{\circ}{5}+0$

  $\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}\ \rightarrow\ d=5$ ó $d=0$

- $\overline{dcba}=\overset{\circ}{17}+2 \quad (c\neq 0)$

  $\downarrow$

  0 ✗

  5 ✓

  $\underbrace{5000}+\overline{cba}=\overset{\circ}{17}+2$

  $\overset{\circ}{17}+2+\overline{cba}=\overset{\circ}{17}+2$

  $\rightarrow\ \overline{cba}=\overset{\circ}{17}$

Resolvemos, por dato $c\neq 0$

$$100\leq \overline{cba}<1000$$

$$100\leq 17K<1000$$

$$5{,}8...\leq K<58{,}8...$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{6;\ 7;\ 8;\ ...;\ 58}_{53\ \text{números}}$$

Por lo tanto, son 53 números.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Calcule el residuo al dividir E entre 8.

$$E=101^{100}+105^{104}+109^{108}+...+405^{404}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

> **Propiedad**
> Todo número impar positivo elevado a un exponente par positivo es $\overset{\circ}{8}+1$. (Ver problema N.° 2)

Entonces, en

$$E=\underbrace{101^{100}+105^{104}+109^{108}+...+405^{404}}_{\frac{405-97}{4}=77\ \text{sumandos}}$$

$$E=77\left(\overset{\circ}{8}+1\right)=\overset{\circ}{8}+5$$

$$\downarrow$$

$$\left(\overset{\circ}{8}+5\right)$$

Por lo tanto, el residuo es 5.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 41

Dado que $\overline{2abba}^{b!-a!}=\overset{\circ}{11}+9$ y $\overline{(b-5)a3cd5}=\overset{\circ}{99}+33$, calcule el máximo valor de $d\times c$.

A) 20 B) 21 C) 24 D) 35 E) 36

Resolución

Tenemos $(\underbrace{\overline{2\,a\,b\,b\,a}}_{+-+-+})^{b!-a!}=\overset{\circ}{11}+9$; se observa que $(b-5)$ es primera cifra, entonces $b>5$.

$$(\overset{\circ}{11}+2)^{b!-a!}=\overset{\circ}{11}+9$$

$$2^{b!-a!}=\overset{\circ}{11}+9 \qquad \text{(I)}$$

Analizamos las potencias de 2 respecto al múltiplo de 11

$$2^n=\overset{\circ}{11}+r$$

2^n	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
r	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

$g=10$

$$\rightarrow\ 2^{\overset{\circ}{10}+6}=\overset{\circ}{11}+9 \qquad \text{(II)}$$

Luego de I y II

$$\underbrace{b!-a!}_{...0}=\underbrace{\overset{\circ}{10}+6}_{...6}$$

$$\underbrace{a!}_{4!}=\underbrace{...4}_{24}$$

$4!=24$ (único caso)

$$\overline{(b-5)4\,3c\,d5}=\overset{\circ}{99}+33$$

Criterio del $\overset{\circ}{99}$

$$\underbrace{\overline{(b-5)4}+\overline{3c}}+\overline{d5}=\overset{\circ}{99}+33$$

$$\overline{(b-5)c}+34+\overline{d0}+5=\overset{\circ}{99}+33$$

Entonces

$$\overline{(b-5)c}+\overline{d6}=\overset{\circ}{99}$$

$(b-5)$	c	d	$\overset{\circ}{99}$
1	3	8	99
2	3	7	
3	3	6	
4	3	5	

Siempre $a=4 \wedge d=8$ (máximo)
$c=3$

$\therefore\ d\times c=24$

Observación

Como $b>5 \rightarrow b!=\underbrace{1\times2\times3\times4\times5}\times...\times b$

$b!=\ 120\ \times...\times b$

$b!=...0$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Si $\overline{abcdef}-\overline{fedcba}=\overline{(g+1)\,ga(g-1)gg}$ y

$$\overline{(g+1)\,ga\,(g-1)\,gg}=\overset{o}{11}+6$$

halle el residuo de dividir entre 7 el numeral

$$\underbrace{\overline{(g-2)af\,(g-2)af\,(g-2)af\ldots}}_{62\text{ cifras}}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Del enunciado

$$\overline{abcdef}-\overline{fedcba}=\overline{(g+1)ga(g-1)gg}$$

Observación

Si $a=(g-1)=9 \rightarrow g=10$ no cumple

Propiedad

La suma de cifras de la diferencia es $3(9)=27$
↳ cifra máxima

Luego $5g+a=27$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{array}$$

Además

$$\overline{(g+1)ga(g-1)gg}=\overset{o}{11}+6$$
$$\begin{array}{cccccc} - & +- & + & -+ & \leftarrow \end{array}$$

$$g-a-2=\overset{o}{11}+6$$

$$g-a=\overset{o}{11}+8$$

$$\begin{array}{ccl} \downarrow & \downarrow & \\ 4 & 7 & \text{Sí cumple} \\ 5 & 2 & \text{No cumple} \end{array}$$

Piden hallar el residuo de dividir entre 7 el numeral

$$\underbrace{\overline{(g-2)af(g-2)af(g-2)af\ldots}}_{62\text{ cifras}}$$

Reemplazamos

$$\begin{array}{cc|cccccccccccccc} 2 & 7 & f & 2 & 7 & f & 2 & 7 & f & \ldots & 2 & 7 & f & 2 & 7 & f & 2 & 7 \\ 3 & 1 & & & & & & & & & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad 0 \qquad\qquad}_{\text{Hay 10 bloques de 6 cifras que se anulan}}$$

$$\rightarrow\ 3(2)+1(7)=\overset{o}{7}+6$$

Por lo tanto, el residuo es 6.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 43

Si $E=1\times16+2\times16^2+3\times16^3+\ldots+100\times16^{100}$, halle la cifra de menor orden al expresar E en el sistema heptanario.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

$E=\overline{\ldots x}_{(7)}$; nos piden conocer x,

$$E=\overset{o}{7}+x \quad (x<7)$$

$$E=1\cdot16+2\cdot16^2+3\cdot16^3+\ldots+100\cdot16^{100}$$

Los sumandos tienen la forma

$$t_n=n\times16^n \quad (n:1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 100)$$

Respecto al módulo 7

$$t_n=n\times\left(\overset{o}{7}+2^n\right)$$

$$t_n=\overset{o}{7}+n\cdot2^n$$

n	2^n	$n\times 2^n$
1	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+2$
2	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+1$
3	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+3$
4	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+1$
5	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+6$
6	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+6$
7	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}$
8	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+4$
9	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+2$
10	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+6$
11	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+2$
12	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+5$
13	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+5$
14	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}$
15	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+1$
16	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+4$
17	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+5$
18	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}+4$
19	$\overset{o}{7}+2$	$\overset{o}{7}+3$
20	$\overset{o}{7}+4$	$\overset{o}{7}+3$
21	$\overset{o}{7}+1$	$\overset{o}{7}$
se repite cada 7	se repite cada 3	se repite cada 21

la suma es $\overset{o}{7}$

$\overset{o}{7}$ y $\overset{o}{3}$ → $\overset{o}{21}$

> **Observación**
>
> - La suma de cada 21 sumandos consecutivos es $\overset{o}{7}$.
> - 100 sumandos tienen 4 bloques de 21 sumandos y sobran 16 sumandos.
> - Solo analizamos la suma de las 16 primeras, y esta es $\overset{o}{7}+6$.

Resolvemos

$$E=\underbrace{1\times 16^1+2\times 16^2+\ldots+84\cdot 16^{84}}_{\overset{o}{7}}+$$

$$\underbrace{+85\cdot 16^{85}+\ldots+100\cdot 16^{100}}_{\overset{o}{7}+6}$$

$$E=\overset{o}{7}+⑥$$

$\therefore\ x=6$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

Calcule las dos últimas cifras del desarrollo de $S=1!+3!+5!+\ldots+2005!$. Dé como respuesta la suma de dichas cifras.

A) 10 B) 14 C) 8
D) 11 E) 9

Resolución

Piden las 2 últimas cifras de S, entonces,

$$S=1!+3!+5!+\ldots+2005!=\overline{\ldots ab}=\overset{o}{\overline{100}}+\overline{ab}$$

Observamos que, a partir de 11!, todos los sumandos son $\overset{o}{\overline{100}}$.

Además

$$\left.\begin{array}{l} 1!=1 \\ 3!=6 \\ 5!=120 \\ 7!=120(6\times 7)=...40 \\ 9!=\underline{(...40)\times 8\times 9=...80} \end{array}\right\}(+)$$
$$=...47$$

Entonces

$$S=\underbrace{1!+3!+5!+7!+9!}_{\overset{o}{\overline{100}}+47}+\underbrace{11!+...+2005!}_{\overset{o}{\overline{100}}}=\overset{o}{\overline{100}}+47$$

$S=...47$

Por lo tanto, las dos últimas cifras suman 11.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 45

Al expresar el número 8^{100} en el sistema de base 15, halle la suma de las dos últimas cifras.

A) 6 B) 1 C) 2
D) 10 E) 8

Resolución

Del enunciado

$8^{100}=\overline{...xy}_{(15)}$

$8^{100}=\overset{o}{\overline{15^2}}+\overline{xy}_{(15)}$ (I)

$15^2=3^2\cdot 5^2$

Con $3^2=\overset{o}{9}$ $\wedge$ $5^2=\overset{o}{\overline{25}}$

Observación

Analizamos con $\overset{o}{9}$ y $\overset{o}{\overline{25}}$;

- $8^{100}=(9-1)^{100}=\overset{o}{9}+1$
- $8^{\phi(25)}=\overset{o}{\overline{25}}+1$ (Teorema de Euler)

$\phi(5^2)=5^1\times(5-1)=20$

Entonces

$8^{20}=\overset{o}{\overline{25}}+1$

$(8^{20})^5=(\overset{o}{\overline{25}}+1)^5 \rightarrow 8^{100}=\overset{o}{\overline{25}}+1$

Tenemos

$$\left.\begin{array}{l} 8^{100}=\overset{o}{9}+1 \\ 8^{100}=\overset{o}{\overline{25}}+1 \end{array}\right\} 8^{100}=\overset{o}{\overline{225}}+1 \qquad \text{(II)}$$

Entonces de I y II

$\overline{xy}_{(15)}=1$

$\overline{xy}_{(15)}=01_{(15)}$

$\rightarrow x=0 \wedge y=1$

$\therefore x+y=1$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 46

Si $\underbrace{\overline{ababab...}_{(7)}}_{60\text{ cifras}}=...0_{(8)}$ $(b>a)$

calcule la suma de valores de $a+b$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Resolución

Recuerda

$\overline{abcd}_{(n)}=\overset{o}{\overline{(n+1)}}-a+b-c+d$
$-+-+$

Aplicando divisibilidad por 8 en el numeral de 60 cifras

$\overline{abab...ab}_{(7)}=...0_{(8)}=\overset{o}{8}$
$-+-+ \quad -+ \leftarrow$

$30(b-a)=\overset{o}{8};$ $b>a$

$15(b-a)=\overset{o}{4}$

Entonces

$b-a=\overset{\circ}{4}\,;\ a<7\ \wedge\ b<7$

$\downarrow\ \ \downarrow$

5 1

6 2

$\rightarrow\ a+b=\begin{cases}6\\8\end{cases}$

$\therefore\ 6+8=14$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 47

Se sabe que

$\overline{a(a+2)(a+1)(a+1)}=\overset{\circ}{31}$.

Halle el residuo de dividir

$\underbrace{\overline{aaa\ldots aaa}}_{\overline{aa}\text{ cifras}}$ entre 80.

A) 3 B) 25 C) 55
D) 35 E) 40

Resolución

Por dato:

- $\overline{a(a+2)(a+1)(a+1)}=\overset{\circ}{31}\qquad (a\leq 7)$

  $\overline{aaaa}+211=\overset{\circ}{31}$

  $1111a+211=\overset{\circ}{31}$

  $(\overset{\circ}{31}-5)a+\overset{\circ}{31}+25=\overset{\circ}{31}$

  $-5a+25=\overset{\circ}{31}$

  $-5\times(a-5)=\overset{\circ}{31}$

  $a-5=\overset{\circ}{31}$

  $a=5$

- $N=\underbrace{555\ldots5555}_{55\text{ cifras}}=\overset{\circ}{80}+x$

Como $80=16\cdot 5$

Criterio del $16=2^4$ (se toman las 4 últimas cifras)

$N=\overset{\circ}{16}+5555$

$N=\overset{\circ}{16}+3$

Criterio del 5

$N=\overset{\circ}{5}$

Tenemos

$$\left.\begin{aligned}N&=\overset{\circ}{16}+3=\overset{\circ}{16}+35\\N&=\overset{\circ}{5}\quad\ \ =\overset{\circ}{5}+35\end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow\ N=\overset{\circ}{80}+\textcircled{35}$

$\downarrow$
residuo 35

Por lo tanto, el residuo es 35.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 48

Si

$N=\overline{200201202203204\ldots9979989991000100 1b}_{(b+1)}$

y al dividirlo entre 9 el residuo fue 5, halle b.

A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Se tiene

$N=\overline{200201202203204\ldots9979989991000100 1b}_{(b+1)}$

$N=\overset{\circ}{9}+5$

Observación

Recuerde que también podemos aplicar el criterio de divisibilidad por 9 sumando por bloques.

Así tenemos:

$$\underbrace{200+201+202+\ldots+1001}_{1001-199=802\text{ sumandos}}+b+(b+1)=\overset{o}{9}+5$$

$$\left(\frac{200+1001}{2}\right)\times 802+2b+1=\overset{o}{9}+5$$

$$1201\times 401+2b+1=\overset{o}{9}+5$$

$$\underbrace{\left(\overset{o}{9}+4\right)\left(\overset{o}{9}+5\right)}_{\overset{o}{9}+2}+2b+1=\overset{o}{9}+5$$

$$2b=\overset{o}{9}+2$$

$$\downarrow$$

$$1$$

$\therefore\ b=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 49

Dado que $\overline{\underbrace{aaaa\ldots aaaa}_{\overline{(c-2)(c+1)}\text{ cifras}}(c+2)c(c+4)}=\overset{o}{88}+7$

halle $a\times c$.

A) 20 B) 15 C) 25
D) 16 E) 18

Resolución

Por dato

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aaa}_{\overline{(c-2)(c+1)}\text{ cifras}}(c+2)c(c+4)}=\overset{o}{88}+7\begin{cases}\overset{o}{8}+7\\ \overset{o}{11}+7\end{cases}$$

$c>2$

- Criterio del 8

$$\overline{(c+2)c(c+4)}=\overset{o}{8}+7\quad (c>2)$$

↓ ↓ impar

5	3	7	=	$\overset{o}{8}+1$	No cumple
7	5	9	=	$\overset{o}{8}+7$	Sí cumple

$\rightarrow\ c=5$

- Criterio del 11

$$\overline{\underbrace{aaa\ldots aaaa759}_{36\text{ cifras}}}=\overset{o}{11}+7$$

$-+-\quad +-+-+-+$

$$\overset{o}{11}-a+7-5+9=\overset{o}{11}+7$$

$$a=\overset{o}{11}+4$$

$$a=4$$

$\rightarrow\ a\times c=20$

Por lo tanto, la respuesta es 20.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 50

Una embarcación de marineros naufragó. De los sobrevivientes, los 5/6 son casados y los 2/9 resultaron ilesos. ¿Cuántos se ahogaron, si inicialmente eran 60? Considere que la cuarta parte de los sobrevivientes eran mujeres.

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

Resolución

Como la cantidad de personas debe ser entera, del enunciado tenemos:

$$\text{sobrevivientes }(S)=\begin{cases}\overset{o}{6}\\ \overset{o}{9}\\ \overset{o}{4}\end{cases}$$

$$S=\overset{o}{\overline{\text{MCM}(6;9;4)}}=\overset{o}{36}$$

Como inicialmente eran 60 personas, entonces

$S=36$

Por lo tanto, se ahogaron 24 personas.

Clave **C**

Capítulo

8

Estudio de los divisores positivos de un número

La primera prueba indiscutible del conocimiento de los números primos se remonta al año 300 a.n.e. y se encuentra en los *Elementos,* de Euclides (tomos VII a IX). Euclides define los números primos y demuestra que hay infinidad de ellos. Otro método que permite hallar números primos lo encontramos en la criba de Eratóstenes, atribuida a Eratóstenes de Cirene.

En 1640, Pierre de Fermat estableció (aunque sin demostración) el pequeño teorema de Fermat, posteriormente demostrado por Leibniz y Euler. Es posible que mucho antes se conociera un caso especial de dicho teorema en China.

Fermat conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n}+1$ eran primos, y verificó esta propiedad hasta $n=4$ (es decir, $2^{16}+1$). Sin embargo, el siguiente número de Fermat $2^{32}+1$ es compuesto (uno de sus factores primos es 641), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo aparte de los que ya conocía el propio Fermat.

El monje francés Marin Mersenne investigó los números primos de la forma 2^p-1, con p primo. En su honor, se los conoce como números de Mersenne.

Capítulo 8

Estudio de los divisores positivos de un número

PROBLEMA N.° 1

Si $N=a^7(a+1)^3 5^{2a} 7^b 11^c$ (D. C.), además, $7^b 11^2 3^4$ tiene 41 divisores compuestos y $\overline{ab}=\overline{...c}_7$, calcule cuántos divisores impares y PESI con 539 tiene N. (D.C.: descomposición canónica).

A) 12 B) 20 C) 36
D) 24 E) 18

Resolución

Del enunciado, tenemos

- $N=\underbrace{a^7\times(a+1)^3}\times 5^{2a}\times 7^b\times 11^c$ (D.C.)

  Números consecutivos y primos: 2 y 3

  $a=2$

- $7^b\times 11^2\times 3^4 \rightarrow \text{CD}_{(\text{compuestos})}=41$

  $\text{CD}_{(\text{total})}=\text{CD}_{(\text{compuestos})}+\text{CD}_{(\text{primos})}+1$

  $(b+1)\times 3\times 5 = 41 + 3 + 1$

  $\rightarrow b=2$

Luego

$\underbrace{\overline{ab}} = \underbrace{...c_{(7)}}$

$22=\overset{\circ}{7}+c \rightarrow c=1$

Nos piden divisores impares $<>\neq\overset{\circ}{2}$ y

PESI con $539=7^2\times 11 <>\neq\overset{\circ}{7}\wedge\neq\overset{\circ}{11}$

Entonces: $N=2^7\times 3^3\times 5^4\times 7^2\times 11$ (D.C.)

$\text{CD}(3^3\times 5^4)=4\times 5=20$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Si el producto de divisores de N es $2^{210}3^{315}$, ¿cuántos divisores cuadrados perfectos tiene N?

A) 12 B) 18 C) 20
D) 22 E) 24

Resolución

Tenemos

$$\text{PD}_{(N)}=2^{210}\times 3^{315}$$

$$N^{\left(\frac{\text{CD}(N)}{2}\right)}=[2^6\times 3^9]^{35}=[2^6\times 3^9]^{\left(\frac{70}{2}\right)}$$

$\rightarrow N=2^6\times 3^9$ (D.C.)

Observación

Si un cuadrado perfecto se multiplica por otro cuadrado perfecto, el producto también será cuadrado perfecto.

$$\rightarrow N=\underbrace{(2^2)^3\times(3^2)^4}\times 3$$

$$(3+1)(4+1)=20$$

Por lo tanto, N tiene 20 divisores cuadrados perfectos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

Sea el valor de verdad de cada proposición:

I. Si A y B son PESI
$\rightarrow$ $A+B$ y $A-B$ son PESI.

II. Si A y B son PESI
$\rightarrow$ A y $A+B$ son PESI.

III. Si A, B y C son PESI
$\rightarrow$ A, B y C son PESI. 2 a 2.

IV. Si $A+B$ y AB son PESI
$\rightarrow$ A y B son PESI.

A) VVFF B) FVFV C) FVVV
D) FFFV E) VVFV

Resolución

I. **Falso**
Si A y B son PESI
$\rightarrow$ $(A+B)$ y $(A-B)$ son PESI
No cumple para
$A=7$ y $B=5$

II. **Verdadero**
Si A y B son PESI
$\rightarrow$ A y $A+B$ son PESI (por propiedad)

III. **Falso**
Si A, B y C son PESI
$\rightarrow$ A, B y C son PESI 2 a 2
No cumple para
$A=10$, $B=12$, $C=15$

IV. **Verdadero**
Si $(A+B)$ y $(A\times B)$ son PESI
$\rightarrow$ A y B son PESI (por propiedad)

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

Sea un número N (el cual posee tres factores primos, los menores posibles) tal que al multiplicarlo por 2 su cantidad de divisores aumenta en 12, al multiplicarlo por 9 su cantidad de divisores aumenta en 30 y al multiplicarlo por 5 su cantidad de divisores aumenta en 20, dé como respuesta la suma de cifras de N.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 12 E) 14

Resolución

Del enunciado, tenemos:

$N=2^a\times 3^b\times 5^c$ (D.C.)

Observación

Como en cada caso solo se altera el exponente de un factor primo, hacemos:

- $N\times 2^1$ (I)
$\rightarrow$ $1\times(b+1)(c+1)=12=4\times 3$
- $N\times 3^2$ (II)
$\rightarrow$ $(a+1)2(c+1)=30$
$(a+1)(c+1)=15=5\times 3$
- $N\times 5^1$ (III)
$\rightarrow$ $(a+1)(b+1)\times 1=20=5\times 4$

Resolvemos (I), (II) y (III):

$a=4,\ b=3\ \wedge\ c=2$

$\rightarrow$ $N=2^4\times 3^3\times 5^2=10\ 800$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es 9.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

De los 8400 primeros números enteros positivos, indique cuántos son PESI con 4725.

A) 3840 B) 3720 C) 3710
D) 1220 E) 3520

Resolución

PESI con $4725=3^3\cdot5^2\cdot7$ <> PESI con $3\cdot5\cdot7=105$

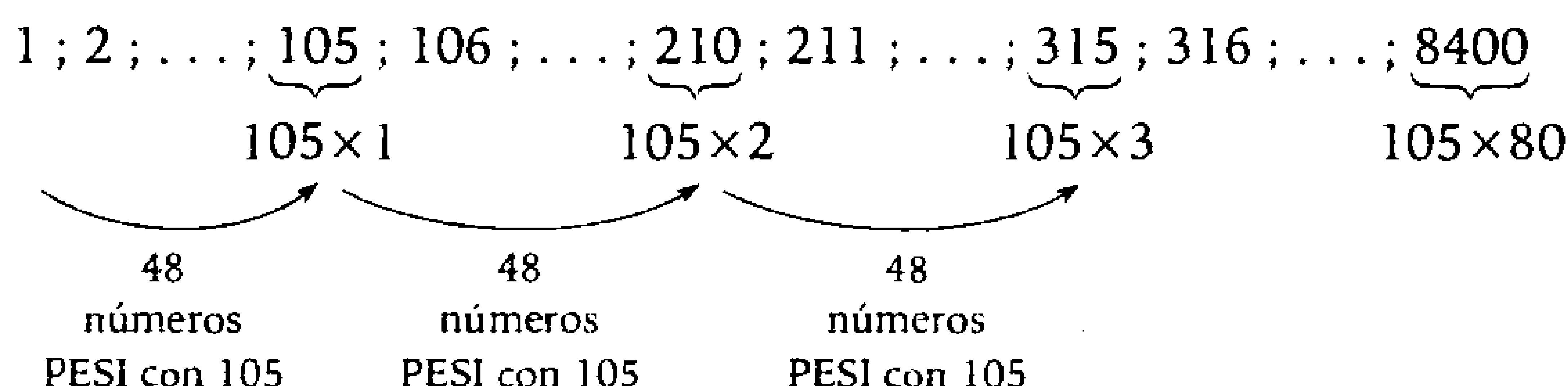
$\phi(105)=\phi(3\cdot5\cdot7)=2\cdot4\cdot6=48$

Por el indicador de un número:

Entonces, entre dos números $\overset{o}{\overline{105}}$ consecutivos hay 48 números PESI con 105.

$$105\times K,\ \underbrace{105K+1,\ 105\times K+2,\ldots,}_{\text{48 números PESI con 105}}\ 105(K+1)$$

Entonces



En total, hay $48\times80=3840$ números PESI con 105.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Si se sabe que $195^m\times21^n$ tiene 2690 divisores compuestos, halle la cantidad de divisores de $195^m\times21^n$ que sean primos relativos con 1925.

A) 42 B) 49 C) 55
D) 63 E) 77

Resolución

Sea $N=195^m\times21^n=(3\times5\times13)^m\times(3\times7)^n$

$N=3^{m+n}\times5^m\times7^n\times13^m$ (D.C.)

Sabemos que

$$\boxed{CD(N)=1+CD_{(\text{primos})}+CD_{(\text{compuestos})}}$$

$CD(N)=1+4+2690=2695$

También

$CD(N)=(m+n+1)(m+1)(n+1)(m+1)=2695$

$(n+1)(m+1)^2(m+n+1)=5\times7^2\times11$

$\rightarrow\ n=4\ \wedge\ m=6$

Luego $N=3^{10}\times5^6\times7^4\times13^6$ (D.C.)

Piden la cantidad de divisores de N

PESI con $1925=5^2\times7\times11$ (D.C.)

Entonces, de N tomamos

$$\underbrace{3^{10}\times13^6}_{11\times7=77}$$

Por lo tanto, hay 77 divisores PESI con 1925.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

Si $173^{1199}=\overline{...xyz}$,

calcule en cuántos ceros termina $[(x+y+z)!]^9$.

A) 9 B) 18 C) 27

D) 36 E) 45

Resolución

Del dato:

$$173^{1199}=\overline{...xyz}$$

Por divisibilidad

$$173^{1199}=\overset{\circ}{10^3}+\overline{xyz}$$

$$173^{1199}=\overset{\circ}{1000}+\overline{xyz}$$

Por el teorema de Euler

$$a^{\phi(m)}=\overset{\circ}{m}+1$$
$(a$ y m son PESI)

Sea $a=173$

$m=1000$

$\phi(m)=2^2\times5^2\times4$

$=400$

$$173^{\phi(1000)}=\overset{\circ}{1000}+1$$

$$173^{400}=\overset{\circ}{1000}+1$$

Elevamos al cubo

$$173^{1200}=\overset{\circ}{1000}+1$$

$$\underbrace{173^{1199}}\times173=\underbrace{\overset{\circ}{1000}+1}$$

$$\overline{...xyz}\times173=...001$$

Reconstruyendo la multiplicación, tenemos:

```
   1 7 3  ×
  ...x y z
  1 2 1 1
  5 1 9
    6
  ⋰
  ...0 0 1
```

- $3\times z=...1 \rightarrow 7$
- $3\times y=...9 \rightarrow 3$
- $3\times x=...6 \rightarrow 2$

$\rightarrow [(x+y+z)!]^9=(12!)^9$

Observación

La cantidad de ceros en que termina es el mayor exponente de 2 y 5 en la D.C.

En $(12!)^9$ el menor exponente lo tiene el factor 5.

$(12!)^9=5^{18}\times...$ (D.C.)

Por lo tanto, termina en 18 ceros.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Dado un número N, se sabe que $SD(N)=42\ 336\,SID(N)$.

¿Cuántos divisores cuadrados perfectos tiene N? Dé también la suma del menor y el mayor de dichos divisores cuadrados perfectos.

A) 16; 5048 B) 12; 7057

C) 24; 3024

D) 24; 1832 E) 12; 2492

Resolución

Del dato:

$$SD(N)=42\ 336\ SID(N)$$

$$SD(N)=42\ 336\left[\frac{SD(N)}{N}\right]$$

Luego

$N=42\,336=2^5\times3^3\times7^2$ (D.C.)

Además

$N=\underbrace{(2^2)^2\times(3^2)^1\times(7^2)^1}_{3\times2\times2=12}\times2\times3$

Entonces, N tiene 12 divisores cuadrados perfectos.

Donde

El menor $=1^2=1$

El mayor $=(2^2)^2\times(3^2)\times(7^2)=7056$

$\therefore$ 12; 7057

Clave B

PROBLEMA N.° 9

Si $69!^{\overline{UNI2005}}=\overset{o}{71}-\overline{ab}$, ¿en cuántos ceros termina $\overline{ab}!$ al ser expresado en base 14?

A) 8 B) 11 C) 13
D) 14 E) 18

Resolución

Si $69!^{\overline{UNI2005}}=\overset{o}{71}-\overline{ab}$

Por el teorema de Wilson

Si P es número primo $\rightarrow$ $(P-1)!=\overset{o}{P}-1$

Sea $P=71$ (71 es número primo)

$(71-1)!=\overset{o}{71}-1$

$70!=\overset{o}{71}-1$

$70\times69!=\overset{o}{71}+70$

$69!=\overset{o}{71}+1$

Elevando al exponente $\overline{UNI2005}$

$(69!)^{\overline{UNI2005}}=\left(\overset{o}{71}+1\right)^{\overline{UNI2005}}$

$(69!)^{\overline{UNI2005}}=\overset{o}{71}+1$

$(69!)^{\overline{UNI2005}}=\overset{o}{71}-70$

$\overline{ab}=70$

$\overline{ab}!=\overline{\ldots x\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ceros}}}_{(14)}$

En base $14=2\times7$, la cantidad de ceros es el menor exponente de 2 y 7 en su D.C.

$\overline{ab}!=70!$ $\rightarrow$ el menor exponente lo tiene el 7.

Calculamos el exponente de 7 por divisiones sucesivas

70 | 7
(10) | 7
(1)

suman 11

$\rightarrow$ $70!=\underbrace{7^{11}\times\ldots}$ (D.C.)

En base 14, termina en 11 ceros.

$\therefore$ 11 ceros

Clave B

PROBLEMA N.° 10

Si $N=48\times64^m\times27^n$ tiene 136 divisores más que el número $\overline{51x7y}$, el cual es divisible por 77, halle $m+n$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Del dato:

- $N=48\times64^m\times27^n=(2^4\times3)\times(2^6)^m\times(3^3)^n$

  $N=2^{6m+4}\times3^{3n+1}$ (D.C.)

Además

- $\overline{51x7y}=\overset{\circ}{77}=\begin{cases}\overset{\circ}{11}\\ \overset{\circ}{7}\end{cases}$

$\overline{5\,1\,x\,7\,y}=\overset{\circ}{11}$
$+\,-\,+\,-\,+$

$x+y-3=\overset{\circ}{11}$

$x+y=\overset{\circ}{11}+3=\begin{cases}3\\ 14\end{cases}$

$\overline{5\;\;1\;\;x\;7\;y}=\overset{\circ}{7}$
$-3\;-1\;\;2\;\;3\;\;1$

$2x+y+5=\overset{\circ}{7}$

$x+\underbrace{(x+y)}=\overset{\circ}{7}+2$

x	$x+y$	
6	3	No cumple
9	14	Sí cumple

$\rightarrow\; y=5$

Luego

$51\,975=3^3\times5^2\times7\times11$ (D. C.)

- $CD(\overline{N})-CD(51\,975)=136$

$(6m+5)(3n+2)-4\times3\times2\times2=136$

$\overbrace{(6m+5)}^{\text{impar}}(3n+2)=184=2\times2\times2\times23$

$\rightarrow\; m=3 \;\wedge\; n=2$

$\therefore\; m+n=5$

Clave E

PROBLEMA N.° 11

Se sabe que $A=12\times30^m$ tiene el triple de la cantidad de divisores de $B=12^m\times30$. Halle n si $N=7^{n+2}+7^n$ tiene $(3m-19)$ divisores compuestos.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución

Por dato:

- $A=12\times30^m \qquad \wedge \qquad B=12^m\times30$
  $A=2^{m+2}\times3^{m+1}\times5^m \qquad B=2^{2m+1}\times3^{m+1}\times5$

Asimismo

$CD(A)=3\times CD(B)$

$(m+3)(m+2)(m+1)=3\times(2m+2)(m+2)\times2$

$\rightarrow\; m=9$

- $N=7^{n+2}+7^n;\quad CD_{comp}=\underbrace{3m-19}_{8}$

$N=7^n\times(7^2+1)$

$N=\underbrace{2\times5^2\times7^n}$ (D. C.)

$CD(N)=CD_{compuestos}+CD_{primos}+1$

$2\times3\times(n+1)=\quad 8 \quad + \quad 3 \quad +1$

$\therefore\; n=1$

Clave A

PROBLEMA N.° 12

El producto de los divisores de un número es $\overline{ab}^{\overline{ba}}\times729$, en el cual $\overline{ba}$ es el menor número que posee seis divisores. Halle la cantidad de divisores del número que sean múltiplos de 63 pero no de 49.

A) 2 B) 4 C) 42
D) 54 E) 60

Resolución

Tenemos

- $\overline{ba}$ es el menor número que posee 6 divisores.

$\overline{ba}=2^2\times3^1$ (D. C.) $\rightarrow\; \overline{ba}=12$

- $PD(N)=\overline{ab}^{\overline{ba}}\times 729=21^{12}\times 729$

  $\rightarrow\ PD(N)=3^{18}\times 7^{12}$

$$N^{\left(\frac{CD(N)}{2}\right)}=[3^3\times 7^2]^6=[3^3\times 7^2]^{\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$\rightarrow\ N=3^3\times 7^2$ (D.C.)

Luego, piden la cantidad de divisores de N que sean $\overset{o}{\overline{63}}$ pero no $\overset{o}{\overline{49}}$ (sólo debe tener un factor 7).

Entonces, de N tomamos

$$\underline{3^2\times 7}\times\underbrace{[3^1]}_{(1+1)=2}$$

Por lo tanto, tiene 2 divisores que son $\overset{o}{\overline{63}}$ pero no $\overset{o}{\overline{49}}$.

Clave A

PROBLEMA N.° 13

Sea N un numeral y su descomposición canónica la siguiente:

$N=A^m\times B^n\times C^p$

Si dividimos N entre A, se eliminan 42 divisores; dividiendo N entre B, se eliminan 35, y si se divide N entre C, se eliminan 30. Halle $m+n+p$.

A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 16

Resolución

De los datos, tenemos:

cantidad de divisores

- $N=A^m\cdot B^n\cdot C^p \quad\rightarrow\quad (m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)=a$ (I)
- $\dfrac{N}{A}=A^{m-1}\cdot B^n\cdot C^p \quad\rightarrow\quad m\cdot(n+1)\cdot(p+1)=a-42$ (II)
- $\dfrac{N}{B}=A^m\cdot B^{n-1}\cdot C^p \quad\rightarrow\quad (m+1)\cdot n\cdot(p+1)=a-35$ (III)
- $\dfrac{N}{C}=A^m\cdot B^n\cdot C^{p-1} \quad\rightarrow\quad (m+1)\cdot(n+1)\cdot p=a-30$ (IV)

De

- (I) - (II): $\underbrace{(n+1)}_{6}\underbrace{(p+1)}_{7}=42$
- (I) - (III): $\underbrace{(m+1)}_{5}\underbrace{(p+1)}_{7}=35$

- I-IV: $\underbrace{(m+1)}_{5}\underbrace{(n+1)}_{6}=30$

  $m=4;\ n=5 \ \wedge \ p=6$

  $\therefore \ m+n+p=15$

Clave D

PROBLEMA N.° 14

La descomposición canónica de N es $a^x \times b \times c$, además, se sabe que la suma de sus divisores es 13 veces más que la cantidad de sus divisores. Halle la cantidad de divisores compuestos de N si se sabe que $\overline{ab}-3=4c$.

A) 12 B) 6 C) 9
D) 10 E) 8

Resolución

Tenemos que:

$N=a^x \cdot b \cdot c$ (D.C.)

Entonces a, b y c son primos absolutos.

Analizamos

- $\underbrace{\overline{ab}}_{\text{impar}}-3=\underbrace{4c}_{\text{par}}$

  $\overline{ab} \downarrow 23 \qquad c \downarrow 5$

  $\rightarrow \ N=2^x \cdot 3 \cdot 5$ (D.C.)

- $SD(N)=14 \cdot CD(N)$

  $\left(\dfrac{2^{x+1}-1}{2-1}\right) \cdot 4 \cdot 6=14(x+1) \cdot 2 \cdot 2$

  $(2^{x+1}-1) \cdot 3=7(x+1)$

  $\rightarrow \ x=2$

Luego

$N=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (D.C.)

$CD(N)=3 \cdot 2 \cdot 2=12$

Como

$CD(N)=1+CD_{(\text{primos})}+CD_{(\text{compuestos})}$

$CD(N) \downarrow 12 \qquad CD_{(\text{primos})} \downarrow 3$

$\therefore \ CD_{(\text{compuestos})}=8$

Clave E

PROBLEMA N.° 15

Si la descomposición canónica de $N=(a-8)^{\alpha} \times a \times (a-9)^{\beta}$, en la que la cantidad de divisores de N es 36 y la cantidad de divisores que son múltiplos de 2, pero no de 3, es 10, calcule en cuántos ceros termina $\left(\dfrac{N}{16}\right)!$ al expresarlo en base 6.

A) 40 B) 90 C) 96
D) 97 E) 95

Resolución

Si la descomposición canónica es

$N=\underbrace{(a-8)}_{3}{}^{\alpha} \times a \times \underbrace{(a-9)}_{2}{}^{\beta}$

números consecutivos y primos

$\rightarrow a=11$

- $CD(N)=(\alpha+1)2(\beta+1)=36$ (I)

- $CD_{\overset{\circ}{2} \wedge \neq \overset{\circ}{3}}=\beta \times 2=10$ (II)

Resolvemos (I) y (II)

$\beta=5$ y $\alpha=2$

Reemplazamos

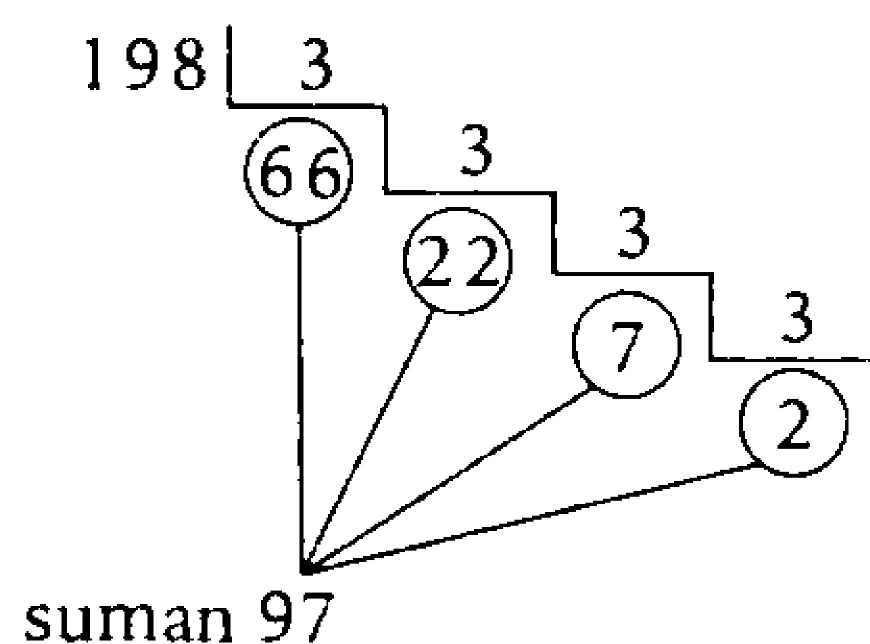
$N=3^2 \times 11 \times 2^5$

Entonces

$$\left(\frac{N}{16}\right)! = \underbrace{198!}$$

La cantidad de ceros en que termina al ser expresado en base 6=2×3 es el menor exponente de 2 y 3 en su D.C. (el menor exponente lo tiene el factor 3).

Por divisiones sucesivas entre 3, determinamos los cocientes.



suman 97

$198! = 3^{97} \times \ldots$ (D.C.)

Por lo tanto, 198! en base 6 termina en 97 ceros.

Clave D

PROBLEMA N.° 16

Calcule la suma de cifras del mayor número que en su descomposición canónica presenta tres divisores primos y cuyo exponente de su mayor divisor primo es 2. Además, se sabe que la diferencia entre la cantidad de divisores del número que son múltiplos de 20 y múltiplos de 36 es 2.

A) 12   B) 14   C) 18
D) 7   E) 9

Resolución

Del enunciado, se tiene:

$N = 2^a \times 3^b \times 5^2$ (D.C.)

- $CCD(\overset{\circ}{20})$: $2^2 \times 5\underbrace{[2^{a-2} \times 3^b \times 5]}_{(a-1)(b+1)\times 2}$

- $CD(\overset{\circ}{36})$: $2^2 \times 3^2\underbrace{[2^{a-2} \times 3^{b-2} \times 5^2]}_{(a-1)(b-1)\times 3}$

$CD(\overset{\circ}{36}) - CD(\overset{\circ}{20}) = 2$

$(a-1)(b-1)\times 3 - (a-1)(b+1)\times 2 = 2$

$(a-1)(b-5) = 2 = 1 \times 2$

$\rightarrow a=2 \wedge b=7$; para que N sea máximo.

Luego

$N = 2^2 \times 3^7 \times 5^2 = 218\,700$

Por lo tanto, la suma de cifras es 18.

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Pedro observa algo curioso al estudiar algunos números primos: que al aumentarle una unidad se convierten en una potencia perfecta de grado n, a la cual llamaremos M. Halle en cuántos ceros termina M al expresarla en base 2.

A) $7n$ B) n C) $n/2$
D) $n/4$ E) $2n$

Resolución

Sea P un número primo,

por dato:

$P+1 = K^n = M \rightarrow P = K^n - 1 \rightarrow P = K^n - 1^n$

$P = \underbrace{(K-1)}_{1}\underbrace{(K^{n-1} + K^{n-2} + \ldots + K^2 + K + 1)}_{P}$

↓ por ser número primo, los únicos divisores son 1 y P

$\rightarrow K - 1 = 1$

Luego $K = 2$

Por dato:

$$M=2^n \rightarrow M=1\underbrace{00...0}_{n\text{ ceros}}{}_{(2)}$$

Por lo tanto, termina en n ceros.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Si $N=111100...0_{(5)}$ tiene 28 divisores que son PESI con 6, halle el producto de divisores de la cantidad de cifras de N.

A) 80 B) 64 C) 49
D) 36 E) 17

Resolución

Sea $N=1111\underbrace{00...0}_{n\text{ cifras}}{}_{(5)}$

$N=1111_{(5)}\times 5^n=156\times 5^n$

$N=2^2\times 3\times 13\times 5^n$ (D.C.)

CD(PESI con 6): no consideramos al 2 ni al 3

Entonces, de N tomamos

$\underbrace{13\times 5^n}_{2(n+1)=28} \rightarrow n=13$

Luego, la cantidad de cifras de N es 17.
Por lo tanto, el producto de divisores de la cantidad de cifras de N es 17.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Sea $\overline{abcd}$ un número que posee tres factores primos, que son los menores posibles y forman una progresión aritmética. Si la suma de sus divisores no primos es 3209, calcule el número de divisores múltiplos de 5 de $\overline{bcd}$.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 15

Resolución

Tres factores primos, menores y en P.A.: 3; 5 y 7.

$\overline{abcd}=3^\alpha\times 5^\beta\times 7^\theta$ (D.C.)

$SD(\overline{abcd})=SD_{\text{no primos}}+SD_{\text{primos}}$

$$\left(\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{\beta+1}-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^{\theta+1}-1}{7-1}\right)=3209+3+5+7=3224$$

$$\underbrace{(3^{\alpha+1}-1)}_{26}\underbrace{(5^{\beta+1}-1)}_{124}\underbrace{(7^{\theta+1}-1)}_{48}=\underbrace{2\cdot 4\cdot 6}_{48}\cdot\underbrace{4\cdot 31}_{124}\cdot\underbrace{13\cdot 2}_{26}$$

Luego

$\alpha=2;\ \beta=2 \wedge \theta=1$

$\rightarrow \overline{abcd}=3^2\times 5^2\times 7^1=1575$

Los divisores $\overset{o}{5}$ de

$\overline{bcd}=575$

$\overline{bcd}=5\times\underbrace{(5\times 23)}$

$CD_{\overset{o}{5}}=\ 2\times 2=4$

Por lo tanto, tiene 4 divisores múltiplos de 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

El numeral $\overline{abbcd}$ es múltiplo de 42 y sólo tiene tres divisores primos. También es múltiplo de 4, pero no de 8; es múltiplo de 3, pero no de 9; además, su cantidad de divisores es el menor múltiplo positivo de 15. Calcule $a+b+c+d$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 15

Resolución

Sea

$$N=\overline{abbcd}=\overset{o}{42} \rightarrow N=\begin{cases}\overset{o}{2}\\ \overset{o}{3}\\ \overset{o}{7}\end{cases}$$

De ahí

$N=2^x\cdot 3^y\cdot 7^z$ (D.C.)

Además

- $N=\overset{o}{4}$ pero no de 8 $\rightarrow$ $x=2$
- $N=\overset{o}{3}$ pero no de 9 $\rightarrow$ $y=1$
- $CD(N)=\overset{o}{15}$ $\wedge$ mínimo

  $\rightarrow N=2^2\times 3^1\times 7^z$ (D.C.)

  $CD(N)=3\times 2\times(z+1)=\overset{o}{15}$

  $2(z+1)=\overset{o}{5} \rightarrow z_{mín}=4$

Luego

$N=2^2\times 3^1\times 7^4=28\,812$

$\therefore\ a+b+c+d=13$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

¿Cuántos números de tres cifras existen que terminan en cero, en exactamente ocho sistemas de numeración?

A) 6 B) 5 C) 7
D) 4 E) 9

Resolución

Si $\overline{abc}=...0_{(n)}$; por ser base $n\geq 2$
└→ 8 bases.

$\overline{abc}=\overset{o}{n}$
↓

- n es el divisor de $\overline{abc}$ $(n\geq 2)$
- El número 1 es divisor de $\overline{abc}$

  En total son $(8+1)$ divisores de $\overline{abc}$.

  $CD(\overline{abc})=8+1$

  $CD(\overline{abc}) = 9 = 3 \times 3$

  Exponentes en la D.C. } 8 ó 2 y 2

$\overline{abc}\in\{(\#primo)^8;\ (\#primo)^2\times(\#primo)^2\}$

$\overline{abc}\in\{2^8;\ (2\cdot 5)^2;\ (2\cdot 7)^2;\ (2\cdot 11)^2;\ (2\cdot 13)^2;\ (3\times 5)^2;\ (3\times 7)^2\}$

Por lo tanto, existen 7 valores para $\overline{abc}$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Si $2^{2n+3}\times 5^{3n+2}$ tiene 204 divisores cuadrados perfectos, ¿cuántos de sus divisores son cubos perfectos?

A) 85 B) 86 C) 87
D) 88 E) 89

Resolución

Se tiene

$2^{2n+3}\times 5^{3n+2}$ (D.C.)

- $CD(K^2)=204$

  $\underbrace{(2^2)^{n+1}\times(5^2)^{\frac{3}{2}n+1}}\times 2$; considerando n par

  $(n+2)\left(\frac{3}{2}n+2\right)=204$

  $(n+2)(3n+4)=3\times 2\times 2\times 2\times 17$

  $n=10$ sí cumple

- $CD(K^3)$ de $2^{23}\times 5^{32}$

$$\underbrace{(2^3)^7\times(5^3)^{10}}_{8\times 11=88}\times 2^2\times 5^2$$

Por lo tanto, tiene 88 divisores cubos perfectos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 23

Si $\overline{abcaef}=\underbrace{\overline{a9}\times f\times\overline{4a}\times\overline{m9}}_{DC}\ \wedge\ f\neq\overset{o}{5}\ \wedge\ m<5,$

calcule $a+b+c+e+f+m$

A) 23 B) 24 C) 25
D) 26 E) 27

Resolución

Si $f\neq\overset{o}{5}\ \wedge\ m<5$

$\overline{abcaef}=\overline{a9}\times f\times\overline{4a}\times\overline{m9}$ (D.C.)

De la descomposición canónica:

- $\overline{a9}$ y $\overline{4a}$ son números primos
  $\rightarrow\ a=1$ ó $a=7$
- $\overline{m9}$ es número primo
  $\rightarrow\ m=1$ ó $m=2$
- f es un número primo y es una cifra.
  $f\in\{2;3;7\}$

Si $a=1$

$\overline{1bc1ef}=19\times 41\times\overline{m9}\times f$

m: 1, ② ; f: 2, 3, ⑦

Cumple: $m=2$ $f=7$

$\overline{1bc1ef}=158137$

Con $a=7$ no hay solución

$\therefore\ a+b+c+e+f+m=26$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 24

Los divisores primos de un entero positivo N son 2 y 3; el número de divisores de su raíz cuadrada es 24, y el número de divisores de su cuadrado es 273. Calcule la cantidad de divisores propios de N.

A) 91 B) 78 C) 76
D) 85 E) 81

Resolución

Hacemos

$N=2^{2a}\times 3^{2b}$ (D.C.)

- $\sqrt{N}=2^a\times 3^b$ (D.C.)
  $CD(\sqrt{N})=(a+1)(b+1)=24$
  $(a+1)(b+1)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$ (I)
- $N^2=2^{4a}\times 3^{4b}$ (D.C.)
  $CD(N^2)=(4a+1)(4b+1)=273$
  $(4a+1)(4b+1)=3\cdot 7\cdot 13$ (II)

De (I) y (II)

$a=3\wedge b=5$

$a=5\wedge b=3$

$\rightarrow\ N=2^6\times 3^{10}$ ó $2^{10}\times 3^6$

$CD(N)=7\times 11=77$

$\therefore$ CD (propios) $=77-1=76$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Calcule el residuo de dividir E entre 137.

$$E=\overline{a(a+2)b}^{136}+\overline{a(a+2)b}^{272}+\overline{a(a+2)b}^{408}+...+\overline{a(a+2)b}^{2312}$$

Considere $\phi(b)\neq b-1$.

A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

Resolución

Del dato $\phi(b)\neq b-1$, sólo se cumple si b no es número primo.

Para aplicar el teorema de Euler, veamos si 137 y $\overline{a(a+2)b}$ son PESI (137 es número primo)

De los $\overset{\circ}{\overline{137}}$ de tres cifras: 137; 274; 411; 548; 685; 822 y 959, ninguno tiene la forma $\overline{a(a+2)b}$ (b no es primo), entonces

137 y $\overline{a(a+2)b}$ sí son PESI.

Por teorema Euler:

$$\overline{a(a+2)b}^{\phi(137)}=\overset{\circ}{\overline{137}}+1 \rightarrow \overline{a(a+2)b}^{136}=\overset{\circ}{\overline{137}}+1$$

$$(\overline{a(a+2)b}^{136})^K=\left(\overset{\circ}{\overline{137}}+1\right)^K$$

$$\rightarrow \overline{a(a+2)b}^{\overset{\circ}{\overline{136}}}=\overset{\circ}{\overline{137}}+1$$

En la suma

$$E=\underbrace{\overline{a(a+2)b}^{136}}_{\overset{\circ}{\overline{137}}+1}+\underbrace{\overline{a(a+2)b}^{272}}_{\overset{\circ}{\overline{137}}+1}+\underbrace{\overline{a(a+2)b}^{408}}_{\overset{\circ}{\overline{137}}+1}+...+\underbrace{\overline{a(a+2)b}^{\overset{136\times 17}{2312}}}_{\overset{\circ}{\overline{137}}+1}$$

17 veces

$$E=\overset{\circ}{\overline{137}}+17$$

Por lo tanto, el residuo es 17.

Clave E

PROBLEMA N.° 26

Si $N=72\times 32^m\times 27^n$ tiene 294 divisores más que el número $\overline{3x33y}$, el cual es divisible por 77 y no por 2, halle $(m+n)^2$ y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 8 B) 10
C) 12
D) 14 E) 16

Resolución

Si

$$A=\overline{3x33y}=\overset{\circ}{77} \quad \wedge \quad A\neq \overset{\circ}{2},$$

entonces y es impar.

Descomponiendo polinómicamente:

$$30\,330+1000x+y=\overset{\circ}{77}$$

$$\left(\overset{\circ}{77}-8\right)+\left(\overset{\circ}{77}-1\right)x+y=\overset{\circ}{77}$$

$$y-x=\overset{\circ}{77}+8$$

$$y-x=8$$

$\downarrow \ \downarrow$

8 0 (No cumple)
9 1 (Sí cumple)

$\rightarrow A=31339=7\times 11^2\times 37$ (D.C.)

$CD(A)=2\times 3\times 2=12$

Luego

$N=72\times 32^m\times 27^n$

$N=2^3\times 3^2\times 2^{5m}\times 3^{3n}$

$N=2^{5m+3}\times 3^{3n+2}$ (D.C.)

- $CD(N)=CD(A)+294=306$

$(5m+4)(3n+3)=306$

$(5m+4)(n+1)=102=3\times 2\times 17$

$m=6 \ \wedge \ n=2$

$\rightarrow \ (m+n)^2=64$

Por lo tanto, la suma de cifras es 10.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

El numeral $\overline{8ab}$ es múltiplo de 4. Calcule la cantidad de divisores de la suma de divisores de dicho numeral, si se sabe que este tiene 14 divisores.

A) 7 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

Resolución

Tenemos

$$\overline{8ab}=\overset{\circ}{4} \ \wedge \ CD=14=2\times 7$$

Exponentes de la D.C. : 13 ó 1 y 6

$\overline{8ab}=\bigcirc^{13}$ ó $\overline{8ab}=\bigcirc^{1}\times\bigcirc^{6}$

no existe número primo

por ser $\overset{\circ}{4}$ tiene factor 2

$\overline{8ab}=\bigcirc^{1}\times 2^6$

$\overline{8ab}=(p)^{1}\times 64$

$800\leq p\times 64<900$

$12{,}5\leq p<14{,}06$

por ser número primo: $p=13$

$\overline{8ab}=13\times 2^6=832$

Nos piden CD(SD(832))

Veamos

$$SD(832)=\left(\frac{13^2-1}{13-1}\right)\times\left(\frac{2^7-1}{2-1}\right)$$

$$=\underbrace{2\times7\times127}$$

$$CD(SD(832))=\ 2\times2\times2$$

$\therefore\ CD(SD(832))=8$

Clave B

PROBLEMA N.° 28

Si el número 741^n tiene $\overline{aba}$ divisores, calcule la suma de divisores de $\overline{(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)}$.

A) 125 B) 145 C) 195
D) 210 E) 213

Resolución

$N=741^n=3^n\times13^n\times19^n$ (D.C.)

$CD(N)=(n+1)^3=\overline{aba}=343$

$\downarrow$

6

$\rightarrow\ a=3\ \wedge\ b=4$

Luego

$\overline{(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)}=72=2^3\times3^2$ (D.C.)

$\therefore\ SD(72)=(1+2+4+8)(1+3+9)=195$

Clave C

PROBLEMA N.° 29

Si $N=\overline{a1c(c-5)1}$ tiene 24 divisores, de los cuales cuatro son simples y $5c-a=\overset{o}{7}+1$, siendo $\overline{1a}$ uno de los divisores primos de N, calcule $a+c$.

A) 6 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución

$N=\overline{a1c(c-5)1}$ $\begin{cases}CD=24\\CD_{(simples)}=4\end{cases}$

Si $\overline{1a}$ es un divisor primo entonces, $a\in\{1;3;7;9\}$

$5c=\overset{o}{7}+3a+1$; para simplificar le aumentamos $7a+14$

$\overset{o}{7}+\underbrace{3a+7a}+\underbrace{1+14}$

$5c=\overset{o}{7}+5(2a+3)$

Tabulamos los posibles casos para a: 1; 3; 7; 9

$c=\overset{o}{7}+2a+3$ $(c\geq5)$

c	a	
5	1	
2	3	No cumple
9	3	
3	7	No cumple
0	9	No cumple
7	9	

Si

$\left.\begin{matrix}a=1\\c=5\end{matrix}\right\}$ $N=11501$ $\llcorner\rightarrow$ no es $\overset{o}{11}$ No cumple

$\left.\begin{matrix}a=3\\c=9\end{matrix}\right\}$ $N=31941$

$N=3^3\times7\times13^2$

$\llcorner\rightarrow$ si es $\overset{o}{13}$ Sí cumple

$\therefore\ a+c=12$

Clave C

PROBLEMA N.° 30

Calcule el residuo de dividir $E=56!^{582}\times57!^{580}$ entre 59.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

Resolución

Si

$$E=\underbrace{56!^{582}}_{A}\times\underbrace{57!^{580}}_{B}=\overset{o}{59}+r$$

- En B, por el corolario del teorema de Wilson:

Si p es primo y $p\geq 3$, entonces $(p-3)!=\overset{o}{p}+\left(\dfrac{p-1}{2}\right)$

$$(59-2)!=57!=\overset{o}{59}+1$$

$$\rightarrow\ 57!^{580}=\overset{o}{59}+1$$

- En A, también sabemos que:

Si p es primo, entonces $(p-2)!=\overset{o}{p}+1$

$$(59-3)!=56!=\overset{o}{59}+\left(\frac{59-1}{2}\right)=\overset{o}{59}+29$$

$$\rightarrow\ (\overset{o}{59}+29)^{582}=\overset{o}{59}+29^{582}$$

Observamos que 29 y 59 son PESI, entonces, por el teorema de Euler tenemos:

$$29^{\phi(59)}=\overset{o}{59}+1$$

$$\phi(59)=58$$

$$\rightarrow\ 29^{58}=\overset{o}{59}+1$$

Luego

$$29^{582}=\underbrace{(29^{58})}_{}{}^{10}\times 29^2$$

$$(\overset{o}{59}+1)^{10}\times 841$$

$$\downarrow$$

$$(\overset{o}{59}+15)$$

$$29^{582}=\overset{o}{59}+15$$

Reemplazamos en E:

$$E=(\overset{o}{59}+15)(\overset{o}{59}+1)=\overset{o}{59}+r$$

$$E=\overset{o}{59}+15=\overset{o}{59}+r$$

Por lo tanto, el residuo es 15.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 31

Si el producto de los 18 primeros múltiplos positivos de 23 tiene n divisores, halle en función de n la cantidad de divisores del producto de los 19 primeros múltiplos positivos de 19.

A) $\dfrac{21n}{20}$ B) $\dfrac{20n}{19}$

C) $\dfrac{21n}{19}$

D) $\dfrac{19n}{20}$ E) $\dfrac{40n}{19}$

Resolución

El producto de los 18 primeros múltiplos de 23 es

$$(23\cdot\underline{1})\cdot(23\cdot\underline{2})\cdot(23\cdot\underline{3})\cdot(23\cdot\underline{4})\ldots(23\cdot\underline{18})$$

$$=23^{18}\times 18!$$

Por dato:

$$CD(\underbrace{23^{18}\cdot 18!}_{\text{PESI}})=n$$

Por ser PESI se puede separar

$$CD(23^{18})\times CD(18!)=n$$

$$19\times CD(18!)=n$$

$$CD(18!)=\frac{n}{19}$$

El producto de los 19 primeros múltiplos de 19 es

$(19\cdot\underline{1})\cdot(19\cdot\underline{2})\cdot(19\cdot\underline{3})\cdot(19\cdot\underline{4})\ldots(19\cdot\underline{19})$

$=19^{19}\times 19!$

$=19^{19}\times 19\times 18!$

$=19^{20}\times 18!$

Nos piden

$\underbrace{CD(19^{20}\times 18!)}_{\text{PESI}}$

$=CD(19^{20})\times \underbrace{CD(18!)}$

$= \quad 21 \quad \times \quad \frac{n}{19}$

$\therefore \quad =\frac{21n}{19}$

Clave C

PROBLEMA N.° 32

Halle la suma de cifras del numeral de la forma $\overline{abac(2d)}$, si se sabe que tiene 14 divisores propios y además se cumple que $2(d+a)=b+c$.

A) 28 B) 24
C) 30
D) 36 E) 32

Resolución

Si $N=\overline{abac(2d)}$,

entonces

- $CD(N)=CD\text{ (propios)}+1=15$
  $\downarrow$
  14

- $2(d+a)=b+c \leftrightarrow N=\overset{o}{11}$

  $N=\overline{a\ b\ a\ c(2d)}$
  $\quad +\ -\ +\ -\ +\ \leftarrow$

  $2(d+a)-(b+c)=0=\overset{o}{11}$

- Si $d\in Z_0^+$

  $\rightarrow N=\overset{o}{2}$

Luego

$N=\begin{cases} 2^2\times 11^4=58564 & \text{(Sí cumple)} \\ 2^4\times 11^2=1936 & \text{(No cumple)} \end{cases}$

Por lo tanto, la suma de cifras es 28.

Nota

Si $d\notin Z_0^+$, no hay solución.

Clave A

PROBLEMA N.° 33

La suma de los divisores simples de un número es 16; el número de divisores de su raíz cuadrada es 30; tiene 15 divisores que no terminan en cifra cinco y además el número no es múltiplo de 135. Calcule la suma de divisores del número que son PESI con 70.

A) 18 B) 17 C) 15
D) 13 E) 12

Resolución

- N tiene 15 divisores que no terminan en 5, entonces los otros divisores sí terminan en 5, por lo cual N es $\overset{o}{5}$.

Además

- $\underbrace{SD_{simples}}=16$

  $1+5+3+7=16$

  Los factores primos son 5; 3 y 7.

Por tener raíz cuadrada exacta, asumimos exponentes pares en su D.C.

$N=5^{2\alpha}\times 3^{2\beta}\times 7^{2\theta}$ (D.C.)

- $N\neq \overset{o}{135}(135=5\times \underline{3^3})$ como no es $\overset{o}{27}$ $\left.\right\}$ $3^{2\beta}<27 \rightarrow \beta=1$

- 15 divisores que no terminan en 5, eliminamos el factor 5.

  $\not{5}^{2\alpha}\times \underbrace{3^2\times 7^{2\theta}}$

  $CD=3\times(2\theta+1)=15 \rightarrow \theta=2$

- $\sqrt{N}=\underbrace{5^{\alpha}\times 3^1\times 7^2}$

  $CD(\sqrt{N})=(\alpha+1)(1+1)(2+1)=30$

  $\alpha=4$

El número es

$N=5^8\times 3^2\times 7^4$ (D.C.)

Por lo tanto, la suma de divisores PESI con 70 es $\frac{3^3-1}{3-1}=13$.

Clave D

PROBLEMA N.° 34

Sea $3^3\times a\times b$ la descomposición canónica de N. Si la $SID(N)$ es 8/3, halle el producto de divisores de $(a+b)^4-1$.

A) 6560^{12} B) 4095^{12} C) 4095^{18}
D) 2400^{12} E) 2400^{18}

Resolución

Si

$N=3^3\times a\times b$ (D.C.)

$SID(N)=\frac{8}{3}$

$\frac{SD(N)}{N}=\frac{8}{3}$

$3\times SD(N)=8N$

$3\times\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right)(a+1)(b+1)=8\times 3^3\times a\times b$

$$\begin{array}{cccccc} 5(a+1) & (b+1) & = & 3\times 3\times & a & \times b \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & & & 5 & 2 \\ 2 & 5 & & & 2 & 5 \end{array}$$

Luego

$A=(a+b)^4-1=2400$

$A=2^5\times 3\times 5^2$ (D.C.)

$CD(A)=6\times 2\times 3=36$

$\therefore\ PD(A)=A^{\frac{CD(A)}{2}}=2400^{18}$

Clave E

PROBLEMA N.° 35

Sea $N=p\times q\times 36^a\times 49^b$; su cantidad de divisores compuestos excede a la de los simples en 4292. Halle $a+b+p+q$ si se sabe, además, que p y q son números consecutivos y primos.

A) 28 B) 29 C) 30
D) 31 E) 32

Resolución

- Como p y q son números consecutivos y primos, entonces son el 2 y el 3; no importa el orden porque no varía N ni su suma $p+q=5$

- $N=2\times3\times36^a\times49^b$

  $N=2\times3\times2^{2a}\times3^{2a}\times7^{2b}$

  $N=\underbrace{2^{2a+1}\times3^{2a+1}\times7^{2b}}$ (D.C.)

  Se observan 4 divisores simples: 1; 2; 3 y 7

Por dato

$CD_{(compuestos)}-\underbrace{CD_{(simples)}}_{4}=4292$

$CD_{(compuestos)}=4296$

- $\underbrace{CD_{(total)}}_{(2a+2)(2a+2)(2b+1)}=\underbrace{CD_{(compuestos)}}_{4296}+\underbrace{CD_{(simples)}}_{4}$

  $4\times(a+1)2\times(2b+1)=4300$

  $(a+1)^2\times(2b+1)=5^2\times43$

  Entonces

  $a+1=5 \rightarrow a=4$

  $2b+1=43 \rightarrow b=21$

  Nos piden

  $a+b+\underbrace{p+q}$

  $=4+21+5$

  $\therefore\ a+b+p+q=30$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

Si el mayor divisor propio de N es $3^{a-1}\times17^a\times33^{a+1}\times19$ y N tiene $\overline{b(2b)0}$ divisores, halle cuántos divisores son PESI con 22 y múltiplos de 9.

A) 28 B) 30
C) 32
D) 36 E) 18

Resolución

Si el mayor divisor propio de N es

$3^{a-1}\times17^a\times33^{a+1}\times19,$

entonces N puede ser

$2\times[3^{a-1}\times17^a\times33^{a+1}\times19]$ (I)

$3\times[3^{a-1}\times17^a\times33^{a+1}\times19]$ (II)

Analizamos (I)

$N=2\times3^{2a}\times11^{a+1}\times17^a\times19$ (D.C.)

$\rightarrow\ CD(N)=2\times(2a+1)(a+2)(a+1)\times2$

Además

$CD(N)=\overline{b(2b)0}=120\times b$

$(2a+1)(a+2)(a+1)=5\times3\times2\times b$

$\hphantom{(2a+1)(a+2)(a+1)=5\times3\times2\times} 2$

$0<b<5$

$a=2\ \wedge\ b=2$

$\rightarrow\ N=2\times3^4\times11^3\times17^2\times19$ (D.C.)

Piden CD (PESI con 22 $\wedge\ \overset{\circ}{9}$)

Entonces, de N tomamos

$3^2\underbrace{[3^2\times17^2\times19]}_{3\times3\times2=18}$

Por lo tanto, son 18 divisores.

Nota

En (II) no hay solución.

Clave **E**

Pero eliminamos los divisores que son menores o iguales a 6.

$$\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6}_{6 \text{ valores}}$$

$\therefore$ (Cantidad de valores de n)$=45-6=39$

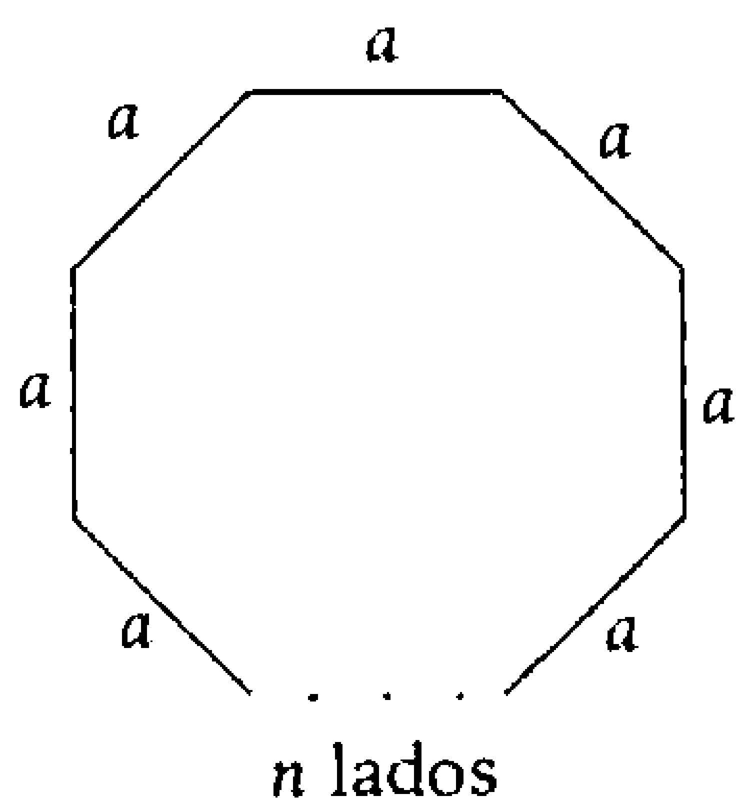
Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

¿Cuántos polígonos regulares de más de seis lados tienen como perímetro 3600 m, si dichos lados tienen una longitud entera de metros?

A) 38
B) 39
C) 40
D) 41
E) 42

Resolución



Se tiene

$a \in \mathbb{Z}^+$

$n \in \mathbb{Z}^+$

Por dato: ($n > 6$)

Perímetro

$n \times a = 3600$

$n \times a = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

↳ es un factor o divisor de 3600

$CD(3600)=5\times 3\times 3=45$

PROBLEMA N.° 38

Sea $m\times(m-5)^3\times(m-4)^2$ la descomposición canónica de N. Halle en cuántos ceros termina $N!$ al ser expresado en base 30.

A) 116
B) 120
C) 124
D) 125
E) 128

Resolución

En

$N=m\times(m-5)^3\times(m-4)^2$ (D.C.)

$(m-5)$ y $(m-4)$ son primos consecutivos, entonces

$m=7$

$N=7\times 2^3\times 3^2=504$

$504!=\overline{a...b\underbrace{000...0}_{n \text{ cifras}}}_{(30)}$; $b\neq 0$

$504!=\overline{a...b}_{(30)}\times 30^n$

Entonces, nos interesa el exponente del 30, pero $30^n=2^n\times 3^n\times 5^n$

Luego, en 504! hay menos factores 5 que factores 2 y 3, entonces el exponente de 5 determinará el exponente de 30.

$$\begin{array}{l} 504 \,\underline{|\,5} \\ \quad\ 100\,\underline{|\,5} \\ \qquad\ \ 20\,\underline{|\,5} \\ \qquad\qquad\ 4 \end{array}$$

$n=100+20+4=124$

Entonces, en 504! tendremos 30^{124}

Por lo tanto, $N!$ termina en 124 ceros.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Se cumple que $N=a^a\times b^b$ (descomposición canónica) tiene la cuarta parte de los divisores de $21N$, el cual posee 55 divisores compuestos. Determine la cantidad de divisores compuestos de N, si se sabe que es PESI con 189.

A) 15 B) 16 C) 18
D) 10 E) 12

Resolución

Si

$N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$ (D.C.)

Por dato:

$$CD(N)=\frac{1}{4}CD(21N)$$

$4\times CD(N)=CD(21\times N)$

solo se cumple si 21 y N son PESI

$4\times CD(N)=CD(21)\times CD(N)$

Como 21 y N son PESI, la descomposición canónica será

$21N=3\cdot 7\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$ (D.C.)

Sabemos

$$CD(21N)=\underbrace{CD_{compuestos}}+\underbrace{CD_{primos}}+1$$

$CD(21)\cdot CD(N)=55 \quad + \quad 4 \quad +1$

$4\times CD(N)=60$

$\rightarrow \quad CD(N)=15$

Del número $N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$

$$\underbrace{CD(N)}_{15}=\underbrace{CD_{compuestos}}_{x}+\underbrace{CD_{primos}}_{2}+1$$

$\therefore \quad x=12$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 40

Halle la suma de divisores primos de $\overline{abc}$ si desde 98 hasta $\overline{abc}$ hay 330 números que son primos relativos con 98.

A) 28 B) 29
C) 30
D) 40 E) 32

Resolución

Si $98=2\times 7^2$ (D.C.)

$\phi(98)=1\times 7^1(7-1)=42$

Además, sabemos que, entre dos múltiplos consecutivos de 98, existen 42 números PESI con 98.

Dato:

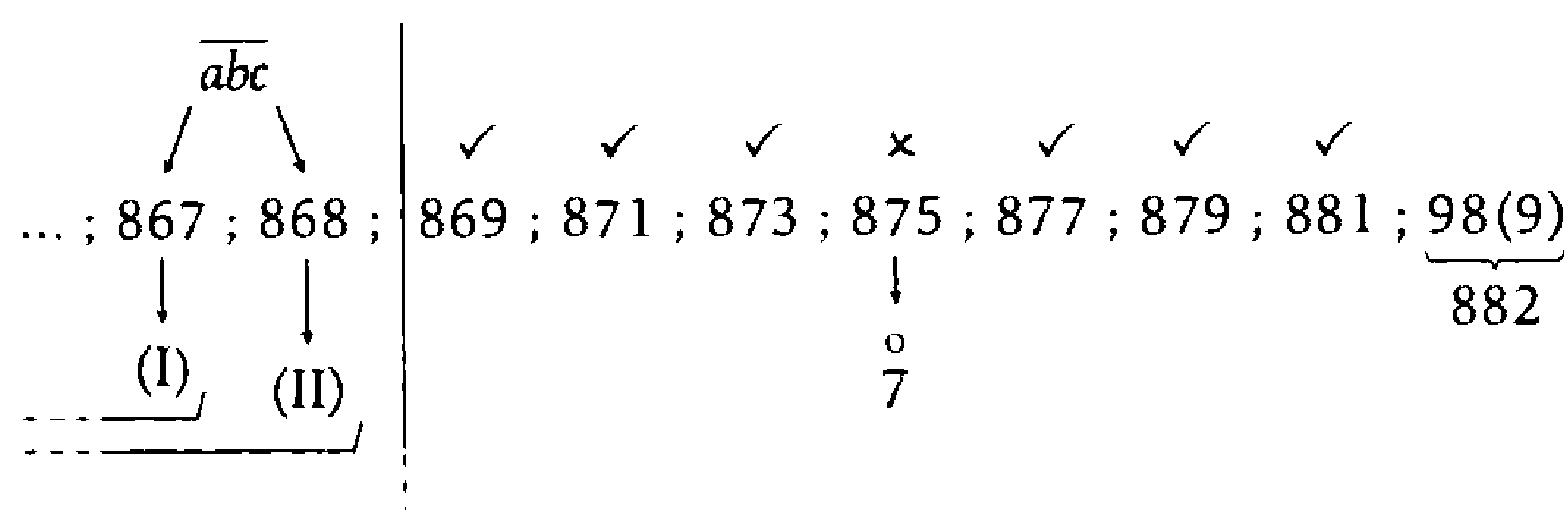
$\underbrace{98\ ;\ \dots\ ;\ \overline{abc}}$

330 números PESI con 98

$98(1);\ \underbrace{\dots}_{42}\ ;\ 98(2);\ \underbrace{\dots}_{42}\ ;\ 98(3);\ \underbrace{\dots}_{42}\ ;\ 98(4);\ \dots\ ;\ 98(8);\ \underbrace{\dots}_{42}\ ;\ 98(9)$

$(9-1)42=336$ números PESI con 98

Como solo son 330, debemos quitar 6 números:



De (I)

$\overline{abc}=867=3\times17^2$ (D.C.)

$\therefore\ 3+17=20$

De (II)

$\overline{abc}=868=2^2\times7\times31$ (D.C.)

$\therefore\ 2+7+31=40$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 41

Si la descomposición canónica de un número múltiplo de 35 es $a^{b+c}\times b^a\times(a+1)^{b+c}\times c^a$, determine la cantidad de divisores del número que sean múltiplos de 15 y primos entre sí con 14 .

A) 20 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

Resolución

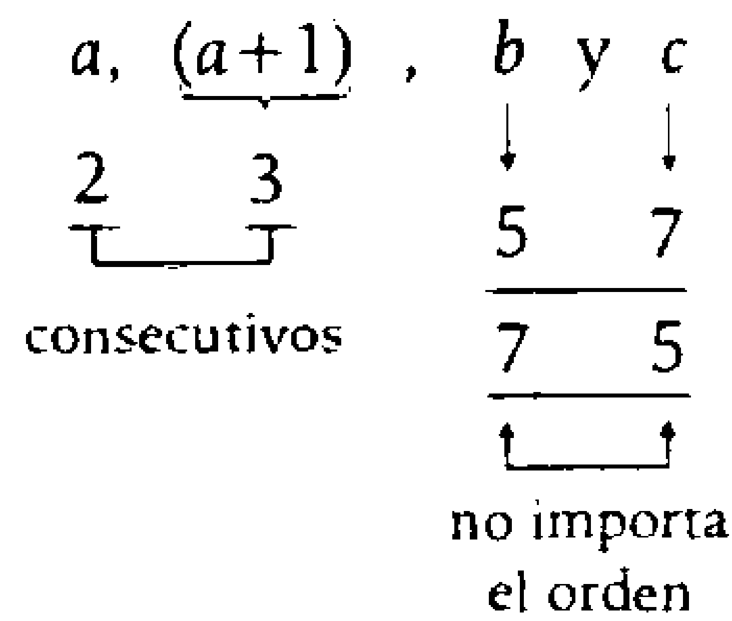
$N=a^{b+c}\times b^a\times(a+1)^{b+c}\times c^a$ (D.C.)

Por dato

$N=\overset{o}{\overline{35}} \rightarrow N=\overset{o}{5}$

$N=\overset{o}{7}$

Los divisores primos de N son



$N=2^{12}\times5^{2}\times3^{12}\times7^{2}$ (D.C.)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divisores } \overset{\circ}{\overline{15}} \text{ y} \\ \text{PESI con } 14=2\times7\end{array}\right\}\ 3\cdot5\cdot(2^{12}\cdot\underbrace{5^{1}\cdot3^{11}}\cdot7^{2})$$

Entonces

$\mathrm{CD}\ (\overset{\circ}{\overline{15}}$ y PESI con $14)=2\times12$

Por lo tanto,

$\mathrm{CD}\ (\overset{\circ}{\overline{15}}$ y PESI con $14)=24$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Calcule la suma de los divisores $\overset{\circ}{\overline{100}}$ de un número de 5 cifras con 4 divisores primos y 91 divisores compuestos, tal que si se divide entre 16; 49 y 27, deja como residuos por exceso a 8; 14 y 18, respectivamente.

A) 187 200
B) 360 000
C) 720 000
D) 540 000
E) 741 200

Resolución

Del enunciado, se tiene $N=\overline{abcde}$

$$N=\begin{cases}\overset{\circ}{\overline{16}}-8=\overset{\circ}{\overline{16}}+8 \rightarrow N=\overset{\circ}{8} \wedge N\neq\overset{\circ}{\overline{16}}\\ \overset{\circ}{\overline{49}}-14=\overset{\circ}{\overline{49}}+35 \rightarrow N=\overset{\circ}{7} \wedge N\neq\overset{\circ}{\overline{49}}\\ \overset{\circ}{\overline{27}}-18=\overset{\circ}{\overline{27}}+9 \rightarrow N=\overset{\circ}{9} \wedge N\neq\overset{\circ}{\overline{27}}\end{cases}$$

Además

$$\mathrm{CD}(N)=1+\underbrace{\mathrm{CD}_{(\text{primos})}}_{4}+\underbrace{\mathrm{CD}_{(\text{compuestos})}}_{91}=96$$

Como N tiene divisores $\overset{\circ}{\overline{100}}$, entonces en su D.C. debe estar el factor 5.

Luego

$N=2^{3}\times3^{2}\times5^{n}\times7^{1}$ (D.C.)

$\mathrm{CD}(N)=4\times3\times(n+1)\times2=96;$

$\rightarrow\ n=3$

Piden

$\mathrm{SD}(\overset{\circ}{\overline{100}})$:

$N=2^{3}\times3^{2}\times5^{3}\times7^{1}$ (D.C.)

$2^{2}\times5^{2}\times[\underbrace{2^{1}\times3^{2}\times5^{1}\times7^{1}}]$

$(1+2)(1+3+9)(1+5)(1+7)=1872$

$\mathrm{SD}(\overset{\circ}{\overline{100}})=100(1872)$

$\therefore\ \mathrm{SD}(\overset{\circ}{\overline{100}})=187\ 200$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 43

Sean a, b y N números primos diferentes, de los cuales se sabe que $a\times b+12r=N$; $N<100$. Calcule la cantidad de valores que toma N si r es entero positivo.

A) 6 B) 7
C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Por dato

- a, b y N son números primos diferentes.
- $r\in\mathbb{Z}^+ \wedge N<100$
- Como N es número primo, $(a\times b)$ y $12r$ son PESI, entonces $(a\times b)$ no tiene factor 2 ni 3.

Tabulamos

$$\underbrace{a}_{\neq\overset{\circ}{2}\wedge\neq\overset{\circ}{3}}\times \underbrace{b} + \underbrace{12r}_{\overset{\circ}{2}\wedge\overset{\circ}{3}} = \underbrace{N}_{\#\text{primo}}$$

a	b	r	N	
5	7	1	47	
		2	59	
		3	71	
		4	83	
5	11	1	67	
		2	79	
5	13	2	89	se repite
5	17	1	97	
7	11	1	89	se repite

Los valores de N

$$N\in\underbrace{\{47;59;71;83;67;79;89;97\}}_{8\text{ valores}}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

Si N posee 14 divisores y la suma de sus divisores primos es 43, calcule la cantidad de números PESI con N cuyos valores estén comprendidos entre el menor y el mayor valor de N.

A) 41^5 B) 2^5
C) 43^5-2^5
D) $40(41^5-2^5)$ E) 80^5-43^5

Resolución

Se tiene que:

$CD(N)=14 \wedge SD(\text{primos})=43$

Entonces

$$N=\begin{cases} 2^6\times 41 & \text{(D.C.)}\\ 2^1\times 41^6 & \text{(D.C.)}\end{cases}$$

Piden los números que sean PESI con N, es decir, $\neq\overset{\circ}{2}$ y $\neq\overset{\circ}{41}$

Sea

$A=2\times 41$ (D.C.)

$\phi(A)=1\times 40=40$

Luego

$$\underbrace{2^6\cdot 41}_{\text{menor }N} = 2^5\cdot\underbrace{(2\cdot 41)}_{A};\ \underbrace{\qquad\qquad}_{(41^5-2^5)\times 40\ \text{números PESI con } A}\ ;\underbrace{2^1\cdot 41^6}_{\text{mayor }N} = 41^5\cdot\underbrace{(2\cdot 41)}_{A}$$

Por lo tanto, la cantidad de números PESI con N son $40\times(41^5-2^5)$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 45

Calcule la suma de las dos últimas cifras al expresar 5^{259} en base 24.

A) 26 B) 15 C) 31
D) 27 E) 16

Resolución

Nos piden a y b

$$5^{259}=\overline{...ab}_{(24)}$$

1.° Calculamos b:

$$\underbrace{5^{259}}=\overset{o}{24}+b$$

$$(5^2)^{128}\times 5$$

$$(\overset{o}{24}+1)^{128}\times 5$$

$$\overset{o}{24}+\textcircled{5}$$

$$b=5$$

2.° Calculamos a

$$5^{259}=\overline{\underbrace{...a5}}_{(24)}$$

$$(5^2)^{128}\times 5=\overline{...a}_{(24)}\times 24+5$$

$$5\left[\frac{25^{128}-1}{24}\right]=\overline{...a}_{(24)}$$

$$\underbrace{5\left[\frac{25^{128}-1}{25-1}\right]}=\overset{o}{24}+a$$

Desarrollamos el cociente

$$5(25^{128}+25^{127}+.....+25^1+1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\overset{o}{24}+1 \quad \overset{o}{24}+1 \quad \overset{o}{24}+1 \quad 1$$

$$5\left(\overset{o}{24}+129\right)$$

Entonces

$$5\left(\overset{o}{24}+9\right)$$

$$\overset{o}{24}+45$$

$$\overset{o}{24}+\textcircled{21}$$

$$a=21$$

$\therefore\ a+b=26$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 46

Calcule el residuo al dividir $N=39!^{39!}$ entre 79.

A) 1 B) 38
C) 2
D) 78 E) 19

Resolución

Vemos que 39! y 79 son PESI, entonces por el teorema de Euler, tenemos

Si $m>1$; a y m son PESI entonces, $a^{\phi(m)}=\overset{o}{m}+1$

$$[39!]^{\phi(79)}=\overset{o}{79}+1$$

$$\phi(79)=78$$

$$\rightarrow\ 39!^{78}=\overset{o}{79}+1$$

Luego

$$39!=1\times 2\times 3...\times 39=\overset{o}{78}=78K;$$

$$K\in\mathbb{Z}^+$$

Reemplazando en N, tenemos

$$N=(39!)^{39!}=[\underbrace{(39!)^{78}}_{(\overset{o}{79}+1)}]^{K}$$

$$\rightarrow N=\overset{o}{79}+1$$

Por lo tanto, el residuo es 1.

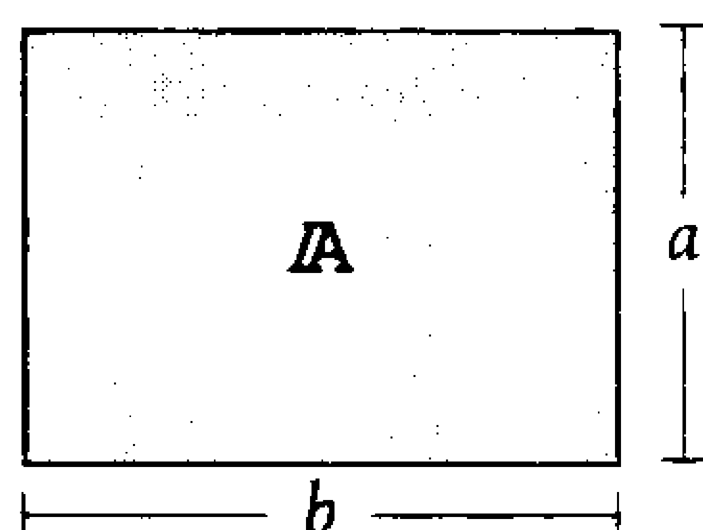
Clave **A**

PROBLEMA N.° 47

¿En cuántos rectángulos de lados enteros, en metros, se cumple que su área tenga una cantidad impar de divisores y esté comprendida entre 40 m² y 108 m²?

A) 2 B) 9
C) 5
D) 7 E) 14

Resolución



$\mathbb{A}=a\times b$

CD($\mathbb{A}$) es impar; entonces $\mathbb{A}$ es un cuadrado perfecto.

$$\rightarrow \mathbb{A}=K^2\ (K\in\mathbb{Z}^+)$$

$$40\text{ m}^2<\mathbb{A}<108\text{ m}^2$$

$7^2=49\text{ m}^2$

$8^2=64\text{ m}^2$

$9^2=81\text{ m}^2$

$10^2=100\text{ m}^2$

$\mathbb{A}$	Cantidad de rectángulos
$49=7^2$	$\dfrac{CD(49)+1}{2}=2$
$64=2^6$	$\dfrac{CD(64)+1}{2}=4$
$81=3^4$	$\dfrac{CD(81)+1}{2}=3$
$100=2^2\cdot5^2$	$\dfrac{CD(100)+1}{2}=5$
	Total=14

Clave **E**

PROBLEMA N.° 48

Determine cuántos números enteros positivos menores que 666 son tales que, si son divisibles por algún primo, no lo son por el cuadrado de este; además, la suma de sus divisores es una potencia de 2.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Del enunciado, tenemos

1; 2; 3; ... ; 666

p es primo

$$\rightarrow N=\overset{o}{p}\ \wedge\ N\neq\overset{o}{(p^2)}$$

$SD(N)=2^n;\ n\in\mathbb{Z}^+$

- Si $N=p$ (D. C.)

$SD(N)=p+1=2^n$

p	2^n
3	2^2
7	2^3
31	2^5
127	2^7

} **4 valores**

- Si $N=p\times q$ (D. C.)

$SD(N)=(p+1)(q+1)=2^n$

p	q	2^n
3	7	2^5
3	31	2^7
3	127	2^9
7	31	2^8

} **4 valores**

Si $N=p\times q\times r$ (D.C.)

$SD(N)=(p+1)(q+1)(r+1)=2^n$

3 7 31 2^{10} → **un valor**

Por lo tanto, cumplen 9 números.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 49

Si se sabe que $182^a\times 8$ es el mayor divisor propio de N y que, además, posee $\overline{b3}$ divisores, calcule cuántos divisores son $\overset{\circ}{\overline{a+b}}$.

A) 42 B) 36 C) 24
D) 20 E) 18

Resolución

Como N es par, el mayor divisor propio de N es su mitad

$$\frac{N}{2}=182^a\times 8$$

Luego de descomponer, tenemos

$$N=\underbrace{2^{a+4}\times 7^a\times 13^a}\qquad \text{(D.C.)}$$

$$CD(N)=(a+5)(a+1)(a+1)=\overline{b3}$$

$$\underbrace{2}_{7}\quad \underbrace{2}_{3}\quad \underbrace{2}_{3}\quad \underbrace{6}_{\text{impar}}$$

Solo cumple para

$a=2 \;\wedge\; b=6$

Nos piden CD que son $\overset{\circ}{\overline{a+b}}=\overset{\circ}{8}$

Entonces, extraemos de N el factor 8.

$$N=2^3\times \underbrace{(2^3\times 7^2\times 13^2)}$$

$$CD(\overset{\circ}{8})=4\times 3\times 3=36$$

Por lo tanto, 36 divisores son $\overset{\circ}{8}$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

Se sabe que

$\overline{ab}=\overset{\circ}{13} \;\wedge$

$7\times 9^{\overline{ab}}+8^{\overline{ab}}=\overset{\circ}{56}+a+b$

Calcule cuántos divisores impares son cuadrados perfectos en el numeral $(ab)^{a+b}$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

Resolución

Se tiene:

- $\underbrace{7\times 9^{\overline{ab}}}+8^{\overline{ab}}=\overset{o}{\overline{56}}+a+b$

  $\overset{o}{7}+(\overset{o}{7}+1)^{\overline{ab}}=\overset{o}{7}+a+b$

  $\rightarrow\ a+b=\overset{o}{7}+1$ (I)

- $7\times 9^{\overline{ab}}+8^{\overline{ab}}=\overset{o}{\overline{56}}+a+b$

  $7(\overset{o}{8}+1)^{\overline{ab}}+\overset{o}{8}=\overset{o}{8}+a+b$

  $a+b=\overset{o}{8}+7$ (II)

Entonces, de (I) y (II): $a+b=15$

Además

$\overline{ab}=\overset{o}{\overline{13}}\ \rightarrow\ \overline{ab}=78$

Luego, en

$(ab)^{a+b}=(7\times 8)^{15}=2^{45}\times 7^{15}$ (D.C.)

Piden CD (impares y cuadrados perfectos), entonces

$\underbrace{(7^2)^7}_{7+1=8}\times 7\times 2^{45}$

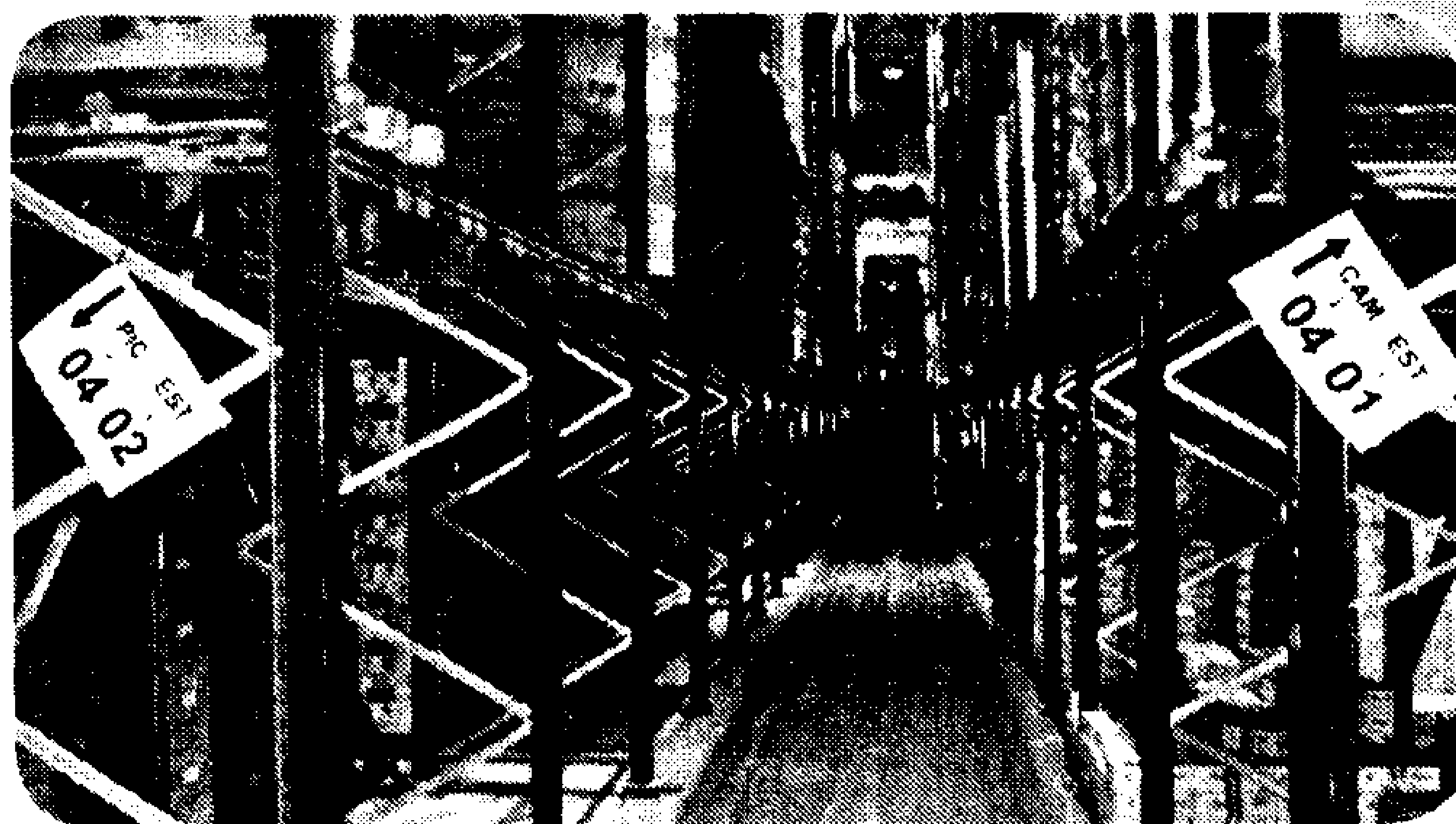
Por lo tanto, son 8 divisores impares que son cuadrados perfectos.

Clave **A**

Capítulo

9

Máximo común divisor (MCD) y Mínimo común múltiplo (MCM)



Euclides fue un matemático griego que nació en el año 365 a.n.e. en Alejandría, ciudad donde enseñó geometría además de fundar una escuela de matemática. Su obra *Elementos* es un tratado de 13 volúmenes que se ha utilizado durante 2000 años y aún hoy, ya modificado, es la base de la geometría plana. Sus libros VII; VIII y IX están dedicados a la teoría de números en un lenguaje no muy familiar, por ejemplo no menciona qué es **múltiplo de** o **factor de**, sino lo reemplaza por está medido por o **mide a**, respectivamente.

En este capítulo se relaciona a los números por medio de sus divisores o factores o números que están contenidos en ellos, notando que el mayor número que está contenido en todos es a la vez divisor común o factor común y contiene a todos los divisores comunes; también se les relaciona por medio de sus múltiplos comunes, notando que son números que los contienen a todos simultáneamente un número exacto de veces, y se hace uso de la teoría básica que planteó Euclides, aplicándola a la vida diaria.

Capítulo 9

Máximo común divisor (MCD)
Mínimo común múltiplo (MCM)

PROBLEMA N.° 1

Dé la suma de las cifras a y b, que son diferentes, si se sabe que el MCM de los números $\overline{ab}$; $\overline{bb}$ y $\overline{aa}$ es 1287.

A) 4 B) 13 C) 10
D) 12 E) 16

Resolución

De los datos:

- a y b son diferentes.
- MCM $(\overline{ab}, \overline{bb}, \overline{aa})=1287$

son divisores o factores de 1287

En la tabla de divisores de 1287, tomaremos los convenientes

$1287=3^2\times 11\times 13$ (D.C.)

3^2	➡	1	3	9
11	➡	11	(33)	(99)
13	➡	13	(39)	99
		143	429	1287

Solo puede ser $\overline{ab}=39$
$\overline{aa}=33$
$\overline{bb}=99$

$a=3 \wedge b=9$

$\therefore a+b=12$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Al calcular el MCD de los números $\overline{a2b}$ y $\overline{cd6}$ por el método del algoritmo de Euclides, se obtuvo por cocientes a 2; 3; 1 y 5.
Calcule $(a+b+c+d)$.

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

Resolución

MCD $(\overline{a2b}; \overline{cd6})=K$

	2	3	1	5
$52K$	$23K$	$6K$	$5K$	K
	$6K$	$5K$	K	0

Entonces

$\overline{a2b}=52K \wedge \overline{cd6}=23K=276$

$K=12$, $52K=\ldots 6$

$\rightarrow \overline{a2b}=624$

$a=6;\ b=4;\ c=2 \wedge d=7$

$\therefore a+b+c+d=19$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

El MCD de $3A$ y $24C$ es igual a $18N$, y el MCD de $2C$ y B es $2N$. Halle el valor de N, si el MCD de A, $4B$ y $8C$ es 210.

A) 21 B) 151 C) 501
D) 105 E) 112

Resolución

Propiedad
Si $MCD(A, B)=d_1$
$MCD(B, C)=d_2$,
entonces $MCD(A, B, C)=MCD(d_1, d_2)$

- $MCD(3A, 24C)=18N$ $\Big)\div 3$
  $MCD(A, 8C)=6N$ (I)
- $MCD(2C, B)=2N$ $\Big)\times 4$
  $MCD(8C, 4B)=8N$ (II)

De (I) y (II)

$\rightarrow MCD(A, 8C, 4B)=210$

$MCD(6N, 8N)=210$

$2N=210$

$\rightarrow N=105$

Por lo tanto, el valor de N es 105.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Dados tres números A, B y C, se sabe que $MCD(A; B)=30$ y $MCD(B; C)=198$. ¿Cuál es el MCD de A, B y C?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Se tiene

$MCD(A; B)=30 \wedge MCD(B; C)=198$

Luego

$MCD(A; B; C)=MCD(A; B; B; C)$

$\rightarrow MCD(A; B; C)=MCD[MCD(A; B); MCD(B; C)]$

$\therefore MCD(A; B; C)=MCD(30; 198)=6$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

Calcule la suma de cifras de lugar 1 y 5 del MCM de 252; 495 y 600.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Por su descomposición canónica

$MCM(252; 495; 600)=$

$=MCM(2^2\times3^2\times7;\ 3^2\times5\times11;\ 2^3\times3\times5^2)$

$MCM(252; 495; 600)=2^3\times3^2\times5^2\times7\times11$

Tenemos

$=\boxed{1}\,3\,8\,6\,\boxed{0}\,0$

Lugar 1 2 3 4 5 6

Suma de cifras: $1+0=1$

Por lo tanto, la suma de cifras es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Halle dos números enteros A y B que cumplan con las siguientes relaciones: $A^2+B^2=10\,530$ y $MCM(A; B)=297$. Calcule la suma de cifras de la suma de dichos números.

A) 29 B) 27 C) 18
D) 25 E) 9

Resolución

Sea $MCD(A; B)=d \rightarrow A=dp \wedge B=dq$ (p y q PESI)

Entonces:

- $A^2+B^2=10\,530$

  $d^2(p^2+q^2)=3^4\times2\times5\times13$ (I)

- $MCM(A; B)=297$

  $d\cdot p\cdot q=3^3\times11$ (II)

De (I) y (II)

$d=3^2; p=11 \wedge q=3$

Luego $A+B=d(p+q)=126$

Por lo tanto, la suma de cifras es 9.

Clave E

PROBLEMA N.° 7

Si $MCD(\overline{ab}!; (a+b)!)=18!$,

determine $MCM\left(\overline{(a-1)(b-1)}_a; \overline{ab}_{(b+1)}\right)$.

A) 99 B) 198 C) 1278
D) 5679 E) 7920

Resolución

Propiedad
Si $A > B$
$MCD(A!\,;B!)=B!$

Del dato:

$MCD(\overline{ab}!\,, (a+b)!)=18!$

- El menor de los 2 factoriales es 18!
- a y b son cifras.

Hay dos casos:

$\overline{ab}!=18!$ ó $(a+b)!=18!$

Cumple solo el caso

$(a+b)!=18!$

$a+b=18$

$\downarrow \quad \downarrow$

$9 \quad 9$ (única solución)

$a=9 \wedge b=9$

Nos piden

$MCM(88_{(9)}; 99_{(10)})=MCM(80; 99)$ (80 y 99 PESI)

$MCM(88_{(9)}; 99_{(10)})=80\times99=7920$

Por lo tanto, el MCM es 7920.

Clave E

PROBLEMA N.° 8

Determine el MCD de a y b, considere lo siguiente:

a: menor número con 7 divisores.

b: menor número con 12 divisores.

A) 1 B) 4 C) 8
D) 10 E) 24

Resolución

Tenemos:

- a: menor número con 7 divisores

  $\rightarrow a=2^6$ (D.C.)

- b: menor número con 12 divisores

  $\rightarrow b=2^2\times3^1\times5^1$ (D.C.)

$\therefore MCD(a; b)=2^2=4$

Clave B

PROBLEMA N.° 9

Calcule el menor valor de

$MCD(\underbrace{\overline{abcabcabc...abc}}_{90\text{ cifras}};\ \overline{(2m)(3m)m})$

A) 84 B) 156 C) 231
D) 263 E) 11

Resolución

Nos piden el menor valor del

$$MCD[(\underbrace{\overline{abcabcabc...abc}}_{90\text{ cifras}};\ \overline{(2m)(3m)m})]$$

Analizamos los factores comunes, descomponiendo en factores

- $\overline{(2m)(3m)m}=m\times 231$

  $\overline{(2m)(3m)m}=m\times 3\times 7\times 11$

  ¿cuáles de estos dividen también a $\underbrace{\overline{abc...abc}}_{90\text{ cifras}}$?

- Por los criterios del 3, 7 y 11, se verifica

$$\underbrace{\overline{abcabc...abc}}_{90\text{ cifras}} \to \overset{\circ}{3},\ \overset{\circ}{7},\ \overset{\circ}{11} \Big\}\ \overset{\circ}{\overline{MCM(3;\ 7;\ 11)}}=\overset{\circ}{231}$$

$$\underbrace{\overline{abcabc...abc}}_{90\text{ cifras}}=231\times K$$

Por lo tanto, el mínimo valor de

$$MCD(231\times K;\ 231\times m)=231\times \underbrace{MCD(K,m)}_{\text{su mínimo valor es }1}$$

$=231\times 1$

$=231$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Calcule en qué cifra termina el MCM de $4^{1311}-1$ y $4^{532}-1$.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 6 E) 9

Resolución

> **Propiedad**
> Si $A=n^a-1$
> $B=n^b-1$
>
> Se cumple:
> $MCD(A,\ B)=n^{MCD(a,\ b)}-1$

Sean

$$A=4^{1311}-1 \ \wedge\ B=4^{532}-1$$

$$\to MCD(A,\ B)=4^{MCD(1311;\ 532)}-1$$

$$MCD(A,\ B)=4^{19}-1$$

Por propiedad

$$\underbrace{MCD(A,\ B)}\times MCM(A,\ B)=A\times B$$

$$(4^{19}-1)\times MCM(A,B)=(4^{1311}-1)(4^{532}-1) \quad \text{(I)}$$

Observación

Se sabe que

$$4^n=\begin{cases} ...4\ ;\ (n\text{ es impar}) \\ ...6\ ;\ (n\text{ es par}) \end{cases}$$

Reemplazamos en (I)

$$(...3)\times \underbrace{MCM(A,B)}_{...5}=\underbrace{(...3)(...5)}_{...5}$$

Por lo tanto, el MCM$(A,\ B)$ termina en 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Si $MCD\left(\frac{5n-2}{3};\ \frac{n+5}{2}\right)=3$, calcule $a\times b\times c$ si es mínimo. Se sabe, además, que el MCD de los numerales $\overline{a(a+6)2}$ y $\overline{bc(a+5)}$ es $n+1$, siendo n el menor número entero positivo que cumple estas condiciones.

A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 24

Resolución

- Del dato:

$$MCD\left(\frac{5n-2}{3};\ \frac{n+5}{2}\right)=3 \text{ (}n\text{ es mínimo) (I)}$$

entonces

$$\frac{5n-2}{3}=3\cdot p \ \wedge\ \frac{n+5}{2}=3\cdot q \ \left(\begin{matrix}p \wedge q \text{ son}\\ \text{PESI}\end{matrix}\right)$$

Por divisibilidad

$$\frac{5n-2}{3}=\overset{\circ}{3} \qquad \wedge \qquad \frac{n+5}{2}=\overset{\circ}{3}$$

$$5n-2=\overset{\circ}{9} \qquad\qquad n+5=\overset{\circ}{6}$$

$$5n=\overset{\circ}{9}+2 \qquad\qquad n=\overset{\circ}{6}+1$$

$$n=\overset{\circ}{9}+4$$

Entonces

$$\left.\begin{matrix} n=\overset{\circ}{9}+4=\overset{\circ}{9}-5\\ n=\overset{\circ}{6}+1=\overset{\circ}{6}-5\end{matrix}\right\} \overset{\circ}{\overline{MCM(9;6)}}-5$$

$$\rightarrow\ n=\overset{\circ}{\overline{18}}-5$$

$$\rightarrow\ n=13 \text{ (mínimo)}$$

Verificando en (I) tenemos

$$MCD(21;9)=3$$

Sí cumple para $n=13$

- $MCD[\overline{a(a+6)2};\ \overline{bc(a+5)}]=14$

$$14\cdot x \qquad 14\cdot y$$

(x e y son PESI)

Los números por ser $\overset{\circ}{\overline{14}}$ son $\overset{\circ}{2} \wedge \overset{\circ}{7}$

Se observa

$(a+5)$ es cifra par $\rightarrow$ $a=1$ ó $a=3$

$$\overline{a(a+6)2}=14\cdot x$$

$a=1$:	1	7	2	No cumple
$a=3$:	3	9	$2=14\times 28$	Sí cumple

Reemplazamos

$$MCD[392;\ \overline{bc8}]=14$$

$$14\times(2^2\times 7) \qquad 14\cdot y$$

PESI

Como y es PESI con $2^2\times 7$; entonces

$$y\neq\overset{\circ}{2} \ \wedge\ y\neq\overset{\circ}{7}$$

y es impar

$$\overline{bc8}=14\cdot y$$

...2 no
...7 sí

$14\cdot y$ termina en 8, y termina en cifra 2 ó 7.

Hay varias soluciones

$\overline{bc8} = 14 \cdot y \rightarrow b \cdot c$

238	17	6
378	27	21
518	37	5
658	47	30
798	57	63
938	67	27

$a \cdot b \cdot c$ mínimo es 15.

3×5

Por lo tanto, la respuesta es 15.

Clave C

PROBLEMA N.° 12

Si $\text{MCD}(\overline{ab0ab}_{(4)}; \overline{mnmn}_{(5)}) = 13$ y

$\text{MCM}(\overline{ab0ab}_{(4)}; \overline{mnmn}_{(5)}) = 17\ 160$,

calcule $a+b+m+n$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

Tenemos los numerales

$\overline{ab0ab}_{(4)} = 65 \times \overline{ab}_{(4)}$

$\overline{mnmn}_{(5)} = 26 \times \overline{mn}_{(5)}$

Luego

- $\text{MCD}(65 \times \overline{ab}_{(4)}; 26 \times \overline{mn}_{(5)}) = 13$
  $\text{MCD}(5 \times \overline{ab}_{(4)}; 2 \times \overline{mn}_{(5)}) = 1$ $\quad \div 13$
  son PESI

$\rightarrow \quad \overline{ab}_{(4)} \neq \overset{\circ}{2} \wedge \overline{mn}_{(5)} \neq \overset{\circ}{5}$

- $\text{MCM}(65 \times \overline{ab}_{(4)}; 26 \times \overline{mn}_{(5)}) = 17\ 160$
  $\text{MCM}(5 \times \overline{ab}_{(4)}; 2 \times \overline{mn}_{(5)}) = 1320$ $\quad \div 13$

> **Propiedad**
> Si A y B son PESI, entonces
> $\text{MCM}(A, B) = A \times B$

$\rightarrow \quad 5 \times \overline{ab}_{(4)} \times 2 \times \overline{mn}_{(5)} = 1320$

$\overline{ab}_{(4)} \times \overline{mn}_{(5)} = 2 \times 2 \times 3 \times 11$

$\overline{ab}_{(4)} = 11 = 23_{(4)} \rightarrow a = 2 \wedge b = 3$

$\overline{mn}_{(5)} = 12 = 22_{(5)} \rightarrow m = 2 \wedge n = 2$

$\therefore \quad a+b+m+n = 9$

Clave B

PROBLEMA N.° 13

Dado que $\text{MCD}(A; B; C) = 6^n$, el cual tiene 8 divisores propios, además,

$A^2 = B^2 + C^2$ $(A < 200)$;

calcule MCM(7A; 12B; 12C) y dé como resultado la cantidad de sus divisores.

A) 136 B) 140 C) 144
D) 148 E) 150

Resolución

- $\text{MCD}(A, B, C) = 2^n \times 3^n$

  $\text{CD}_{\text{total}} = \text{CD}_{\text{propios}} + 1$

  $(n+1)(n+1) = 8+1$

  $n = 2$

  $\rightarrow \quad \text{MCD}(A, B, C) = 6^2$

Por propiedad:

$A=6^2\times p$

$B=6^2\times q$ $\left(\begin{matrix} p,\ q\ y\ r \\ \text{son PESI}\end{matrix}\right)$

$C=6^2\times r$

De los datos:

$A<200 \quad \wedge \quad A^2=B^2+C^2$

$6^2\cdot p<200 \qquad (6^2p)^2=(6^2q)^2+(6^2r)^2$

$p<5,\hat{5} \qquad \underbrace{p^2}=\underbrace{q^2}+\underbrace{r^2}$

$5^2 \quad 4^2 \quad 3^2$
$5^2 \quad 3^2 \quad 4^2$ > 2 casos

Entonces; como B y C están multiplicados por 12, los dos casos dan lo mismo.

$p=5; \quad q=4; \quad r=3$

$\rightarrow A=6^2\times 5$

$B=6^2\times 4$

$C=6^2\times 3$

Reemplazamos en

MCM(7A; 12B; 12C)

$=\text{MCM}(7\cdot 6^2\cdot 5;\ 12\cdot 6^2\cdot 4;\ 12\cdot 6^2\cdot 3)$

$=\underbrace{2^6\times 3^4\times 5^1\times 7}$

$\text{CD(MCM)}=7\times 5\times 2\times 2$

$\therefore\ \text{CD(MCM)}=140$

Clave B

PROBLEMA N.° 14

El producto del MCM por el MCD de $\overline{ab}$ y $\overline{abab}$ es 17 069. Halle $(a+b)$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Sean $A=\overline{ab} \ \wedge\ B=\overline{abab}=101\times\overline{ab}$

Por propiedad

$\underbrace{\text{MCD}(A,B)\times\text{MCM}(A,B)}=A\times B$

$17\,069 = \overline{ab}\times 101\times\overline{ab}$

$169 = \overline{ab}^2$

$\rightarrow \overline{ab}=13;\ a=1\ \wedge\ b=3$

$\therefore\ a+b=4$

Clave D

PROBLEMA N.° 15

Halle $(a+b+c)$, si al calcular el MCD de $\overline{a(a+4)a}$ y $\overline{(a+4)bc}$ por el algoritmo de Euclides se obtuvieron 1; 1; 1 y 3 como cocientes sucesivos.

A) 10 B) 13 C) 18
D) 12 E) 14

Resolución

Sea $\text{MCD}(\underbrace{\overline{(a+4)bc}}_{A},\ \underbrace{\overline{a(a+4)a}}_{B})=K$

Reconstruyendo el algoritmo, tenemos

	1	1	1	3
$A=11K$	$B=7K$	$4K$	$3K$	K
	$4K$	$3K$	K	0

Aplicamos criterios de divisibilidad

- $B=\overline{a\underbrace{(a+4)}a}=7K$ (2 3 1)

$\rightarrow\ 2a+3(a+4)+a=\overset{\circ}{7}$

$6a+12=\overset{\circ}{7} \ \rightarrow\ 6(a+2)=\overset{\circ}{7}$

$a+2=\overset{\circ}{7}\ \rightarrow\ a=5$

Reemplazamos

$B=595=7K \rightarrow K=85$

- $A=\overline{(a+4)bc}=11K$

$\overline{(a+4)\,bc}=11(85)$

$\overline{(a+4)bc}=935$

Entonces

$b=3 \wedge c=5$

$\therefore \; a+b+c=13$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Se tienen tres obras literarias con 660; 780 y 900 páginas, las cuales se requiere editar en fascículos, todos de igual cantidad de páginas; asimismo, el número de páginas está comprendido entre 10 y 20, estando la producción a razón de un fascículo semanal. ¿En cuántas semanas, como mínimo, se terminará de publicar las tres obras?

A) 156 B) 195 C) 132
D) 144 E) 168

Resolución

Propiedad
Los divisores comunes de un conjunto de números son todos divisores de su MCD.

Del enunciado, se tiene que la cantidad de páginas de cada fascículo es un divisor común de 660, 780 y 900, por lo tanto, es un divisor del

MCD(660; 780; 900)=60

Además

$$10<\underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{N.° de páginas de cada}\\ \text{fascículo}\end{array}\right)}_{12\text{ ó }15}<20$$

Luego, como piden la cantidad mínima de semanas, tomamos 15.

Por lo tanto, la cantidad de semanas será

$$\frac{660+780+900}{15}=156$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

¿Cuántos múltiplos comunes tienen $\overline{a(2a)}$ y $\overline{(2a)(6+2a)}$, de modo que al ser expresados en el sistema octanario, se representan como un numeral capicúa de cuatro cifras?

A) 3 B) 2 C) 1
D) 10 E) 4

Resolución

- Se observa $\begin{cases} a \neq 0 \\ 6+2a<10 \end{cases} \rightarrow \quad a<2$

único valor

$$a=1 \Rightarrow \begin{array}{l}\overline{a(2a)}=12\\ \overline{(2a)(6+2a)}=28\end{array}$$

- Los múltiplos comunes a 12 y 28 son

$\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(12;28)}}=\overset{\circ}{84}$

- Los capicúas de 4 cifras de base 8 y $\overset{\circ}{84}$

$$\rightarrow \overset{\circ}{\overline{mnnm}_{(8)}}=\overset{\circ}{84}\begin{cases}\overset{\circ}{4} & \text{(I)}\\ \overset{\circ}{3} & \text{(II)}\\ \overset{\circ}{7} & \text{(III)}\end{cases}$$

(I) $\overline{mnnm}_{(8)}=\overset{\circ}{4} \qquad (m\neq 0;\ m<8)$

$\overset{\circ}{8}+m=\overset{\circ}{4} \quad \rightarrow \quad m=\overset{\circ}{4}$

$m=4$

(II) Criterio del 3 en base 8

$$\overset{\circ}{\overline{m\,n\,n\,m}}_{(8)} = \overset{\circ}{3}$$

$$\underset{-\ +\ -\ +}{}$$

$$-m + n - n + m = \overset{\circ}{3}$$

$$0 = \overset{\circ}{3} \quad \rightarrow \quad \text{siempre es } \overset{\circ}{3}$$

(III) $\overset{\circ}{\overline{mnnm}}_{(8)} = \overset{\circ}{7}$

$$\overset{\circ}{7} + m + n + n + m = \overset{\circ}{7}$$

$$2\,(m+n) = \overset{\circ}{7}$$

$$m + n = \overset{\circ}{7}$$

$$\downarrow$$

$$4$$

Solamente cumple $n=3$, hay un solo número: $4334_{(8)}$.

Por lo tanto, la cantidad de múltiplos comunes es 1.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

Si se tiene que

$A=\overline{abcd7}_{(13)}$ y $B = \overset{\circ}{26} + 19$,

además, $\text{MCD}(A;\ B) = \overset{\circ}{13} + 4$, entonces, el MCM($A$; B) es

A) $\overset{\circ}{13} + 5$ B) $\overset{\circ}{13} + 6$

C) $\overset{\circ}{13} + 3$

D) $\overset{\circ}{13} + 4$ E) $\overset{\circ}{13} + 8$

Resolución

Tenemos

$$A = \overline{abcd7}_{(13)} = \overset{\circ}{13} + 7$$

$$B = \underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{13}}}{\overset{\circ}{26}} + \underset{\overset{\downarrow}{(\overset{\circ}{13}+6)}}{19} = \overset{\circ}{13} + 6$$

Por propiedad

$$\underbrace{MCD(A;\ B)} \times MCM(A;\ B) = A \times B$$

$$(\overset{\circ}{13} + 4) \times \text{MCM}(A;\ B) = \underbrace{(\overset{\circ}{13} + 7)(\overset{\circ}{13} + 6)}$$

$$= \overset{\circ}{13} + 42$$

$$= \overset{\circ}{13} + 3$$

$$\therefore \quad \text{MCM}(A;\ B) = \overset{\circ}{13} + 4$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

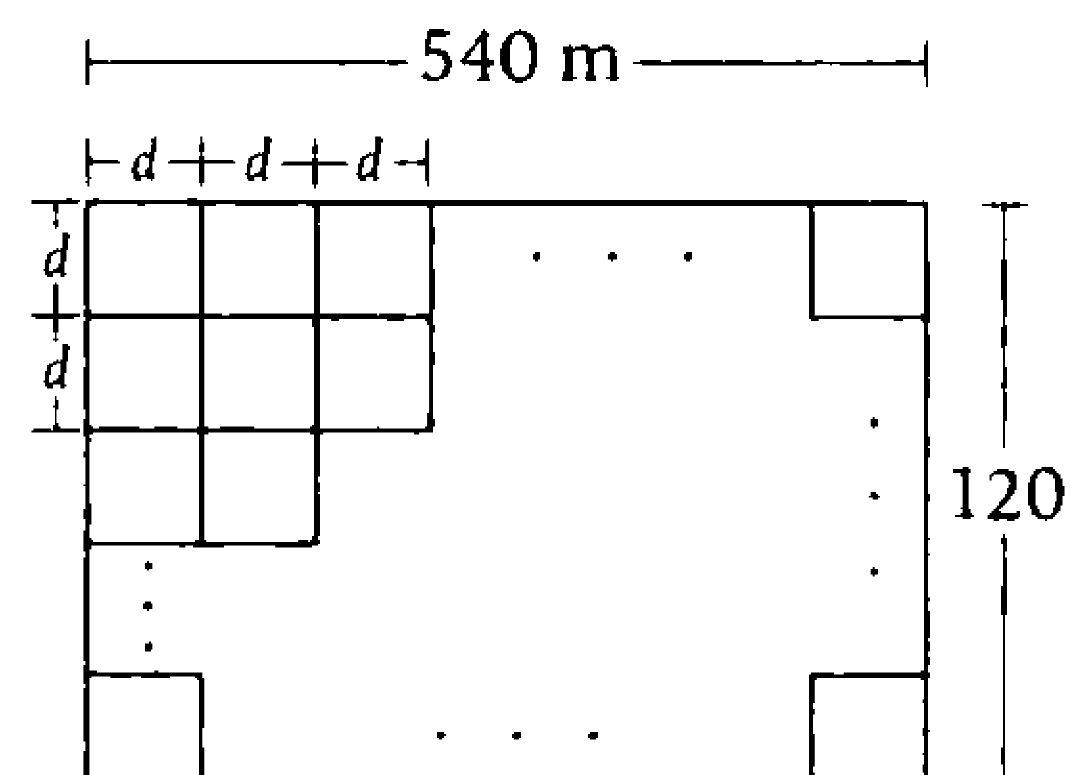
Se dispone de un terreno de forma rectangular de 540 m por 120 m, el cual se ha dividido en parcelas cuadradas, todas iguales. Halle el lado de cada parcela, si se desea obtener entre 400 y 500 parcelas.

A) 10 m B) 12 m C) 15 m

D) 18 m E) 20 m

Resolución

El terreno en parcelas cuadradas es



	Cantidad de parcelas
En el largo	$\frac{540}{d}$
En el ancho	$\frac{120}{d}$
En total	$\left(\frac{540}{d}\right)\left(\frac{120}{d}\right)$

Por dato:

$$400 < \frac{540 \times 120}{d^2} < 500$$

Resolvemos

$$11{,}35... < d < 12{,}72...$$

Por lo tanto, el único valor entero es 12.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

El MCD de dos números A y B es 72, además, A tiene 20 divisores y B tiene 18 divisores. ¿Cuál es la suma de los divisores impares de $A+B$, si A y B tienen solo dos divisores primos?

A) 19 B) 15 C) 18
D) 182 E) 16

Resolución

Del enunciado

$$\text{MCD}(A, B)=72=2^3\times 3^2 \qquad \text{(D.C.)}$$

Entonces

$$A=2^3\times 3^2\times \underline{3^2} \qquad B=2^3\times 3^2\times \underline{2^2}$$

PESI

$$A=2^3\times 3^4 \ \ \text{(D.C)} \quad \wedge \quad B=2^5\times 3^2 \ \ \text{(D.C.)}$$

$$\text{CD}(A)=4\times 5=20 \quad \wedge \quad \text{CD}(B)=6\times 3=18$$

Luego

$$A+B=2^3\times 3^2\times 13 \qquad \text{(D.C.)}$$

Piden la suma de los divisores impares

$\rightarrow$ con $3^2\times 13$

$\therefore$ Suma$=(1+3+3^2)(1+13)=182$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

Se tiene una proporción continua de constante entera, en la que el MCM de sus términos es 76. Halle la media aritmética del mayor y menor de los términos.

A) 45,5 B) 46 C) 47
D) 47,5 E) 48,5

Resolución

Sea la proporción continua

$$\frac{aK^2}{aK}=\frac{aK}{a}=K$$

Por dato:

$$\text{MCM}(\underbrace{aK^2}, aK, a)=76$$

$\downarrow$

$\overset{\circ}{aK}$

$\overset{\circ}{a}$

$$\underbrace{a}_{19}\times\underbrace{K^2}_{2^2}=76$$

$a=19 \ \wedge \ K=2$

La proporción es

$$\frac{76}{38}=\frac{38}{19}=2$$

Los mayores términos son 76 y 19.

Piden

$$\overline{MA}(76;\ 19)=\frac{76+19}{2}$$

$$\overline{MA}(76;\ 19)=47{,}5$$

Por lo tanto, la media es 47,5.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 22

Tres automóviles parten juntos del punto de partida de un circuito cerrado de 3600 m de longitud. Si las velocidades de dichos automóviles son 60; 36 y 20 m/s, respectivamente, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que vuelvan a pasar simultáneamente por el punto de partida?

A) 15 minutos
B) 24 minutos
C) 18 minutos
D) 21 minutos
E) 27 minutos

Resolución

Hallamos el tiempo que emplea cada automóvil en recorrer el circuito cerrado de 3600 m.

$$\overbrace{\frac{3600\text{ m}}{60\text{ m/s}}=60\text{ s}}^{t_1}\quad \overbrace{\frac{3600}{36}=100\text{ s}}^{t_2}\quad \overbrace{\frac{3600}{20}=180\text{ s}}^{t_3}$$

Luego, como parten juntos, el tiempo que debe transcurrir para que vuelvan a pasar simultáneamente es el menor múltiplo común positivo de t_1, t_2 y t_3.

$$\rightarrow\ t=\text{MCM}(60;\ 100;\ 180)=900\text{ s}$$

Por lo tanto, deben transcurrir 15 min.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Si $\text{MCD}(\underbrace{55...5}_{K\text{ veces}}3;\ \overline{a(a+1)(a+2)(a+3)})=27$, calcule el menor valor posible de $a+K$.

A) 6 B) 24 C) 15
D) 33 E) 42

Resolución

Tenemos

$$\text{MCD}\big[\underbrace{55...53}_{K\text{ cifras}};\ \overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}\big]=27$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$27p \qquad\qquad 27q$$

(p y q son PESI)

- $\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}=27\cdot q$

por ser $\overset{\circ}{27}=\overset{\circ}{\overline{9\times 3}}$, también es $\overset{\circ}{9}$.

$$(\text{Suma de cifras})=\overset{\circ}{9}$$

$$4a+6=\overset{\circ}{9}$$

$$4a+6+18=\overset{\circ}{9}$$

$$4(a+6)=\overset{\circ}{9}$$

$$a+6=\overset{\circ}{9}$$

$$\rightarrow\ a=3$$

Reemplazamos

$$3456=27\cdot q$$

$$\rightarrow\ q=128$$

- $\underbrace{55...53}_{K\text{ cifras}}=27\times p$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Por ser: } 5K+3=\overset{\circ}{3}\\ K=\overset{\circ}{3}\\ K=3n\end{array}\right.$

Observación

Criterio del 27: se suman los bloques de 3 cifras, iniciando por la derecha.

$\overline{abcdef}=\overset{o}{27} \leftrightarrow \overline{abc}+\overline{def}=\overset{o}{27}$

$\rightarrow \underbrace{5\,555\,555\ldots555\,553}_{K=3n \text{ cifras}}=\overset{o}{27}$

Como en total son $3n+1$ cifras

$$5+\underbrace{555+555+\ldots+555+553}_{n \text{ bloques}}=\overset{o}{27}$$

$$5+\underbrace{555+555+\ldots+553}_{n \text{ bloques}}+2-2=\overset{o}{27}$$

$$3+555\cdot n=\overset{o}{27}$$

$$15n+3=\overset{o}{27}$$

$$15n+3+27=\overset{o}{27}$$

$$15(n+2)=\overset{o}{27}$$

$$5(n+2)=\overset{o}{9} \quad \div 3$$

$$n+2=\overset{o}{9}$$

$$n\in\{7;\ 16;\ 25;\ \ldots\}$$

El menor valor es: $n=7$

$K=3\times n$

$K=3\times(7)$

$K=21$

$\therefore\ a=3,\ K=21 \Rightarrow a+K=24$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

Calcule la suma de dos números, si la suma de sus cubos es 40 824 y, además, su MCD es el menor número que tiene cuatro divisores.

A) 45 B) 54 C) 60
D) 80 E) 50

Resolución

Sean los números A y B

- MCD(A; B) es mínimo y tiene 4 divisores

  $\rightarrow$ MCD(A; B)$=2\times3$ (D.C.)

  Luego

  $A=6p \wedge B=6q$ (PESI)

- $A^3+B^3=40\,824$

  $6^3(p^3+q^3)=40\,824$

  $p^3+q^3=189$

  $\downarrow \quad \downarrow$

  $5^3 \quad 4^3$

  $4^3 \quad 5^3$

$\therefore\ A+B=d(p+q)=6\times9=54$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Lo recaudado en tres días en un cine fue S/.1248; S/.1152 y S/.1104, respectivamente. ¿Cuántas personas, como mínimo, asistieron en los tres días, si se sabe que el precio de la entrada es una cantidad entera y uno de los días asistieron 18 personas más que otro día?

A) 368 B) 412 C) 259
D) 219 E) 438

Resolución

Sea p el precio de cada entrada

	Precio	N.° entradas	Recaudación
1.er día	p	a	$p \cdot a=1248$
2.° día	p	b	$p \cdot b=1152$
3.er día	p	c	$p \cdot c=1104$

Para que sea la menor cantidad de entradas, entonces **p debe ser máximo**; y la diferencia en la cantidad de entradas en dos de estos días es 18.

p divide al MCD(1248; 1152; 1104)=48

48×26 $\quad 48\times24 \quad$ 48×23

$p\times ⓐ \quad p\times b \quad p\times ⓒ$

$\downarrow$

$c+18$

Observación

48×26 − 48×24 − 48×23

96 + 48

144

La diferencia en dos de ellos debe ser $\overset{o}{18}$, el único caso es 144.

Entonces

$p\times(c+18)=48\times26$ (I)

$p\times c=48\times23$ (II)

Dividiendo (I) entre (II)

$$\frac{c+18}{c}=\frac{26}{23} \rightarrow c=138$$

Reemplazando

$\rightarrow p=8 \wedge a=156 \wedge b=144$

$\therefore a+b+c=438$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

¿En qué cifra termina el MCD de los números $(7^{56}-1)$; $(7^{72}-1)$ y $(7^{120}-1)$?

A) 0 B) 3 C) 8
D) 2 E) 6

Resolución

Propiedad

Si: $A=n^a-1$

$B=n^b-1$

$C=n^c-1$

Se cumple:

$\text{MCD}(A, B, C)=n^{\text{MCD}(a,b,c)}-1$

Sean los números

$A=7^{56}-1$; $B=7^{72}-1 \wedge C=7^{120}-1$

Entonces

$\text{MCD}(A; B; C)=7^{\text{MCD}(56;\,72;\,120)}-1$

$\text{MCD}(A; B; C)=7^8-1$

Observe que

$7^8=(\underbrace{7^2}_{49})^4=\ldots1$

Por lo tanto, el MCD(A; B; C) termina en 0.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

Halle $a+b+c+d$, si el MCD de $\overline{a3bb}$ y $\overline{b(a+1)cd}$ es igual a 72, además, $\overline{cd}$ es mínimo.

A) 21 B) 13 C) 15
D) 14 E) 17

Resolución

Por la propiedad del MCD

$$\text{MCD}[\overline{a3bb},\ \overline{b(a+1)cd}]=72$$

$$\rightarrow\ \overline{a3bb}=\underbrace{72\times p}_{\overset{\circ}{8}\wedge\overset{\circ}{9}} \quad \text{y} \quad \overline{b(a+1)cd}=72q$$

(p y q son PESÍ)

Aplicamos los criterios de divisibilidad

- $\overline{a3bb}=\overset{\circ}{8} \rightarrow \overline{a3bb}=\underbrace{\overset{\circ}{8}}_{\overset{\circ}{4}} \rightarrow b\text{: }0;\ 4;\ 8$

  300 (no es $\overset{\circ}{8}$)

  344 (sí cumple)

  388 (no es $\overset{\circ}{8}$)

  $\rightarrow\ b=4$

- $\overline{a344}=\overset{\circ}{9} \rightarrow \underset{7}{a}+3+4+4=\overset{\circ}{9}$

  $\rightarrow\ a=7$

- $\overline{48cd}=\overset{\circ}{72}$

  por bloque

  $\underbrace{4800}+\overline{cd}=\overset{\circ}{72}$

  $\overset{\circ}{72}+48+\overline{cd}=\overset{\circ}{72}$

  $\overline{cd}=\overset{\circ}{72}-48$

  $\overline{cd}\in\{24;\ 96\}$ el mínimo es $\overline{cd}=24$

Verificamos

$$\text{MCD}(\underbrace{7344}_{72\times 102};\ \underbrace{4824}_{72\times 67})=72$$

sí son PESI

$\therefore\ a+b+c+d=17$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 28

Se sabe que a y b son PESI; encuentre $a-b$ si al calcular el MCD de $\overline{aaa}$ y $\overline{bbb}$, mediante el algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes sucesivos a 1; 2; 1 y 2. Considere que la segunda división se hizo por exceso.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Dato: a y b son PESI

Además

$\overline{aaa}=111a \wedge \overline{bbb}=111b$

$\rightarrow\ \text{MCD}(\overline{aaa};\ \overline{bbb})=111$

Empleando el algoritmo de Euclides, con la segunda división por exceso, tenemos

	1	2	1	2
777	444	333	222	111
	333	222	111	0

Luego

$\overline{aaa}=777 \rightarrow a=7$

$\overline{bbb}=444 \rightarrow b=4$

$\therefore\ a-b=3$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

Tres ciclistas parten al mismo tiempo y de un mismo punto de una pista circular. En cada vuelta tardan 1 min 12 s; 1 min 30 s y 1 min 45 s. ¿Cuántas vueltas habrán dado entre los tres cuando hayan pasado nuevamente, y a la vez, por el punto de partida?

A) 96 B) 78 C) 87
D) 60 E) 99

Resolución

Ciclista	Tiempo en dar 1 vuelta
A	1 min 12 s <> 72 s
B	1 min 30 s <> 90 s
C	1 min 45 s <> 105 s

Para todos pasa el mismo tiempo t, y sea t el tiempo para que pasen nuevamente y a la vez por el punto de partida.

Observación

Para A cada 72 s pasa por el punto de partida por eso $t=\overset{\circ}{\overline{72}}$; lo mismo para B es $t=\overset{\circ}{\overline{90}}$ y para C es $t=\overset{\circ}{\overline{105}}$.

$$t \to \left.\begin{array}{l}\overset{\circ}{\overline{72}}\\ \overset{\circ}{\overline{90}}\\ \overset{\circ}{\overline{105}}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(72;\ 90;\ 105)}}\\ t=\overset{\circ}{\overline{2520}}\end{array}$$

Luego de 2520 segundos, pasan nuevamente, por el punto de partida.

Por lo tanto, el número de vueltas en total es

$$\frac{2520}{72}+\frac{2520}{90}+\frac{2520}{105}=87$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Determine el menor numeral de tres cifras tal que él y el que resulta de invertir el orden de sus cifras tengan como MCD a 66 y que su diferencia sea $\overline{1xy}$. Calcule la suma de sus cifras.

A) 10 B) 11 C) 19
D) 8 E) 12

Resolución

Sea el menor numeral de tres cifras $\overline{abc}$, luego

- $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{1xy}$ (I)

  Por propiedad

  $x=9 \wedge 1+y=9$
  $\qquad\qquad\quad \downarrow$
  $\qquad\qquad\quad 8$

- $\text{MCD}(\overline{abc};\ \overline{cba})=66$

  $\rightarrow \overline{abc}=66\times p \wedge \overline{cba}=66\times q$ (p y q: PESI)

Reemplazamos en (I)

$66(p-q)=198$

$p-q=3;\quad \overline{abc} \wedge \overline{cba}$

p	q	$\overline{abc}$	$\overline{cba}$	
4	1	264	66	No cumple
5	2	330	132	No cumple
7	4	462	264	Sí cumple
8	5	528	330	No cumple

$\rightarrow \overline{abc}=66(7)=462$

Por lo tanto, la suma de cifras es 12.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 31

¿Cuáles son las dos últimas cifras del MCM de $A=7^{802}-1$ y $B=7^{1203}-1$? Dé como respuesta la suma de estas cifras.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 11 E) 14

Resolución

Sabemos por propiedad

Si $A=a^{\alpha}-1,$ $B=a^{\beta}-1$ entonces $\text{MCD}(A;\,B)=a^{\text{MCD}(\alpha;\,\beta)}-1$
$A\times B=\text{MCD}(A;\,B)\times\text{MCM}(A;\,B)$

Tenemos

$A=7^{802}-1$

$B=7^{1203}-1$

Entonces

$\text{MCD}(A,\,B)=7^{\text{MCD}(802;\,1203)}-1$

$\text{MCD}(A,\,B)=7^{401}-1$

Para calcular el MCM$(A,\,B)$, lo despejamos de

$A\times B=\text{MCD}(A,\,B)\times\text{MCM}(A,\,B)$

$(7^{802}-1)(7^{1203}-1)=(7^{401}-1)\times\text{MCM}(A,\,B)$

$\downarrow$

$(7^{401})^2-1^2$

$\cancel{(7^{401}-1)}\,(7^{401}+1)(7^{1203}-1)=$

$=\cancel{(7^{401}-1)}\times\text{MCM}(A;\,B)$

$(7^{401}+1)\,(7^{1203}-1)=\text{MCM}(A,\,B)\qquad\text{(I)}$

Para determinar las 2 últimas cifras de cada potencia de 7, utilizamos el teorema de Euler

$N^{\phi(p)}=\overset{o}{p}+1\,(N\text{ y }p\text{ son PESI})$

Sea

$\left.\begin{array}{l}N=7\\p\;=100\end{array}\right\}$ 7 y 100 son PESI

Reemplazamos el teorema de Euler

$7^{\phi(100)}=\overset{o}{\overline{100}}+1$

$7^{40}=\overset{o}{\overline{100}}+1$

$(7^{40})^K=(\overset{o}{\overline{100}}+1)^K$

$(7^{\overset{o}{\overline{40}}})=\overset{o}{\overline{100}}+1$

$7^{\overset{o}{\overline{40}}}=\ldots01$

Entonces

- $7^{401}=\underbrace{7^{400}}\times7^1$

  $7^{401}=(\ldots01)\times7$

  $7^{401}=\ldots07$

- $7^{1203}=\underbrace{7^{1200}}\times7^3$

  $7^{1203}=(\ldots\underline{01})\times3\underline{43}$

  $7^{1203}=\ldots43$

Reemplazamos en (I)

$\text{MCM}(A;\,B)=\underbrace{(7^{401}}_{\ldots07}+1)\underbrace{(7^{1203}}_{\ldots43}-1)$

$\text{MCM}(A;\,B)=(\ldots\underline{08})\times(\ldots\underline{42})$

$\ldots36$

Por lo tanto, la suma de cifras es: $3+6=9$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

Si MCD(A; 63)$=a+b+c$, halle el número de valores de A, dado que es menor que 211 y, además, se sabe lo siguiente:

- MCD($3\times\overline{ab}$; $7\times\overline{cc}$)=63.
- $\overline{ab}$ tiene 12 divisores.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Tenemos

- MCD($3\times\overline{ab}$; $7\times\overline{cc}$)=63

$\rightarrow \quad 3\times\overline{ab}=\overset{\circ}{63}$

$\overline{ab}=\overset{\circ}{21}$

Además CD($\overline{ab}$)=12

$\overline{ab}=3\times7\times2^2$ (D.C.)

$\overline{ab}=84$

y $7\times\overline{cc}=\overset{\circ}{63}$

$\overline{cc}=\overset{\circ}{9}$; $c=9$

Luego $a+b+c=21$

- MCD(A; 63)=21

$A=21\times p \wedge 63=21\times3$ (PESI)

$\rightarrow \quad p\neq\overset{\circ}{3}$

y $A<211$

$21p<211$

$p<10{,}04$

p: 1; 2; 4; 5; 7; 8 y 10

Por lo tanto, A toma 7 valores.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 33

Se cumple que

$A=\text{MCD}(\underbrace{47!;\ 46!;\ 45!;\ \ldots;\ \overline{2n}!}_{n!\text{ números}})$ y

$B=\text{MCM}(11!;\ 12!;\ 13!;\ \ldots;\ [(n-1)^{(n-1)}]!)$.

Calcule en cuántos ceros termina $A\times B$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

Se cumple

Si $A>B$
MCD($A!$; $B!$)=$B!$
MCM($A!$; $B!$)=$A!$

- $A=\text{MCD}(\underbrace{47!;\ 46!;\ 45!;\ \ldots;\ \overline{2n}!}_{n!\text{ números}})$

Calculamos n

$\underbrace{47;\ 46;\ 45;\ \ldots;\ (\overline{2n})}_{n!\text{ números}}$

$n!=47-(\overline{2n}-1)$

$\underbrace{\overline{2n}}_{24}+\underbrace{n!}_{4!}=48$

$\rightarrow \quad n=4$

Entonces

$A=\text{MCD}(47!;\ 46!;\ \ldots;\ 24!)$

$\rightarrow \quad A=24!$

- $B=\text{MCM}(11!;\ 12!;\ 13!;\ \ldots;\ \underbrace{[(n-1)^{(n-1)}]!}_{(3^3)!=27!})$

$\rightarrow \quad B=27!$

Observación

La cantidad de ceros en que termina, lo determina el menor exponente de 2 y 5 en la D.C. del número.

$\rightarrow A\times B=24!\times 27!$

el menor exponente lo tiene el factor primo 5

Efectuamos

$24 \,\underline{|\,5}$ → $24!=\underbrace{5^4\times\ldots}_{\text{D.C.}}$

④

$27 \,\underline{|\,5}$ → $27!=\underbrace{5^6\times\ldots}_{\text{D.C.}}$

⑤ $\underline{|\,5}$

①

suman 6

$\rightarrow 24!\times 27!=5^{(4+6)}\times\ldots$ (D.C.)

$24!\times 27!=\underbrace{5^{10}\times\ldots\ldots\ldots}$

Por lo tanto, termina en 10 ceros.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Dado que

$\text{MCD}(A;B)=d;\ \dfrac{A}{d}+\dfrac{B}{d}=7$ y $\dfrac{AB}{d}=60,$

halle el mayor valor de $A+B$.

A) 42
B) 49
C) 56
D) 63
E) 70

Resolución

Tenemos

$\text{MCD}(A, B)=d$

$\rightarrow A=dp \wedge B=dq$ (p y q PESI)

- $\dfrac{A}{d}+\dfrac{B}{d}=7 \rightarrow p+q=7$

- $\dfrac{AB}{d}=60$

$\rightarrow d\cdot p\cdot q=60=2\times 2\times 3\times 5$

d	p	q
6	2	5
5	3	4
10	1	6

Como

$A+B=d(p+q)$

Por lo tanto, $(A+B)_{\text{máximo}}=10\times 7=70$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

Sean

$A=45\times 60^n$ y $B=60\times 45^n$.

Si $\text{MCM}(A;B)=12\times\text{MCD}(A;B)$, halle n.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Por descomposición canónica

$A=45\times 60^n=2^{2n}\times 3^{n+2}\times 5^{n+1}$ (D.C.)

$B=60\times 45^n=2^2\times 3^{2n+1}\times 5^{n+1}$ (D.C.)

Por dato:

$$\underbrace{MCM(A,\ B)} = 12 \times \underbrace{MCD(A,\ B)}$$

$$2^{2n}\times 3^{2n+1}\times 5^{n+1}=2^2\times 3\times 2^2\times 3^{n+2}\times 5^{n+1}$$

$$2^{\textcircled{2n}}\times 3^{2n+1}=2^{\textcircled{4}}\times 3^{n+3}$$

$2n=4$

$\therefore\ n=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

Si $MCD(\overline{c(b+5)cc(b+5)c};\ \overline{bc0bc0})=\ldots 25$, halle el MCM de los numerales dados e indique la suma de sus cifras.

A) 33 B) 34 C) 35
D) 36 E) 37

Resolución

Del enunciado

$MCD(\overline{c(b+5)cc(b+5)c};\ \overline{bc0bc0})=\ldots 25$

Entonces

$$\overline{c(b+5)cc(b+5)c}=\overset{\circ}{25}\ \wedge\ \overline{bc0bc0}=\overset{\circ}{25}$$

0 ✗
7 5 ✓

$\rightarrow\ b=2$

Reemplazamos

$575\,575=1001\times 575=\mathbf{1001\times 25}\times 23$

$250\,250=1001\times 250=\mathbf{1001\times 25}\times 10$

$\rightarrow$ $MCM(575\,575;\ 250\,250)=\mathbf{1001\times 25}\times 10\times 23$

$MCM(575\,575;\ 250\,250)=5\,755\,750$

Por lo tanto, la suma de cifras es 34.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

Si $N=\overline{(a+2)a(a+5)}$ y, además, se cumple que $MCM(N,\ B)=MCM(N;\ 11B)$, halle el $MCM(N;\ N+59)$ e indique la suma de sus cifras.

A) 26 B) 28 C) 30
D) 32 E) 34

Resolución

Analizamos el dato:

$MCM(N,\ B)=MCM(N;\ 11B)$

Se le multiplica por 11 y el MCM no se altera

$\rightarrow$ 11 ya era un factor de N.

$$N=\overline{\underset{+}{\underbrace{(a+2)}}\ \underset{-}{\underbrace{a}}\ \underset{+}{\underbrace{(a+5)}}}=\overset{\circ}{11}$$

Criterio del 11

$$a+2-a+a+5=\overset{\circ}{11}$$

$$a+7=\overset{\circ}{11}$$

$a=4$

Reemplazamos

$N=649=11\times 59$

Piden

$MCM(\ N\ ;\ N+59)$

$=MCM(11\times 59;\ 12\times 59)$

$=11\times 12\times 59$

$=\underbrace{7788}$

Por lo tanto, la suma de cifras es 30.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

Halle el mayor de dos números A y B, si al determinar su MCD por el algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes sucesivos a 1; 2; 1; 1; 4 y 2.

Considere $MCM(A; B)=213[MCD(A; B)]^2$.

A) 867
B) 692
C) 985
D) 1152
E) 1207

Resolución

Del dato: $MCD(A, B)=d$

	1	2	1	1	4	2
$71d$	$51d$	$20d$	$11d$	$9d$	$2d$	d
	$20d$	$11d$	$9d$	$2d$	d	0

Sea $A=71d \wedge B=51d$

Además: $MCM(A, B)=213[MCD(A, B)]^2$

$$d\times71\times51=213\times d^2 \rightarrow d=17$$

Piden el mayor número

$\therefore\ A=71d=71(17)=1207$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 39

Se desea construir un aviso luminoso de la forma y dimensiones que se muestran. Determine el menor número de focos a utilizarse, si se sabe que deben ser equidistantes y que debe haber focos en los lugares indicados.

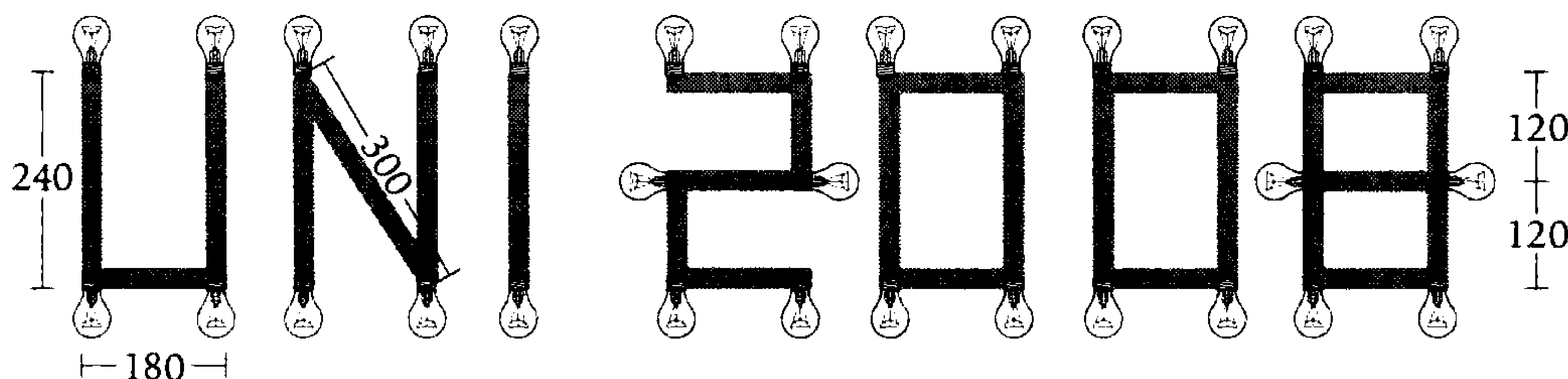
A) 88
B) 95
C) 91
D) 89
E) 92

Resolución

Sea d la distancia entre dos focos consecutivos.

De los datos, se deduce:

- Utiliza menor número de focos, entonces, d es máximo.
- Debe haber focos en los vértices y extremos, entonces, d divide a cada segmento.



Entonces

$d = \text{MCD}(240; 180; 300; 120)$

$d = 60$

Cantidad de focos

- En figura abierta:

$$\frac{\text{Perímetro}}{d} + 1$$

- En figura cerrada:

$$\frac{\text{Perímetro}}{d}$$

Cantidad total de focos

$$\underbrace{\frac{660}{60}+1}_{U} + \underbrace{\frac{780}{60}+1}_{N} + \underbrace{\frac{240}{60}+1}_{1} + \underbrace{\frac{780}{60}+1}_{2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{840}{60}}_{0} + \underbrace{\frac{840}{60}}_{0} + \underbrace{\frac{840}{60} + \frac{180}{60} - 1}_{8} = 89$$

Por lo tanto, la respuesta es 89 focos.

Clave D

PROBLEMA N.° 40

Tres niños compiten en una pista circular: el primero demora 8 minutos en dar una vuelta a la pista, el segundo 12 minutos y el tercero 15 minutos. ¿Al cabo de qué tiempo pasarán por tercera vez juntos por la línea de partida y cuál es la suma del número de vueltas de cada uno en ese momento?

A) 6 h y 88
B) 6 h y 77
C) 8 h y 120
D) 6 h y 99
E) 8 h y 110

Resolución

Del enunciado:

- Para que pasen por primera vez juntos

  $t = \text{MCM}(8; 12; 15) = 120$ min. <> 2 h

  Entonces, por tercera vez, el tiempo será 6 h.

- Número de vueltas que da cada niño en 360 minutos:

1.^{er}	2.^{o}	3.^{er}
↓	↓	↓
$\frac{360}{8} = 45$	$\frac{360}{12} = 30$	$\frac{360}{15} = 24$

$\rightarrow 45 + 30 + 24 = 99$

$\therefore$ 6 h y 99

Clave D

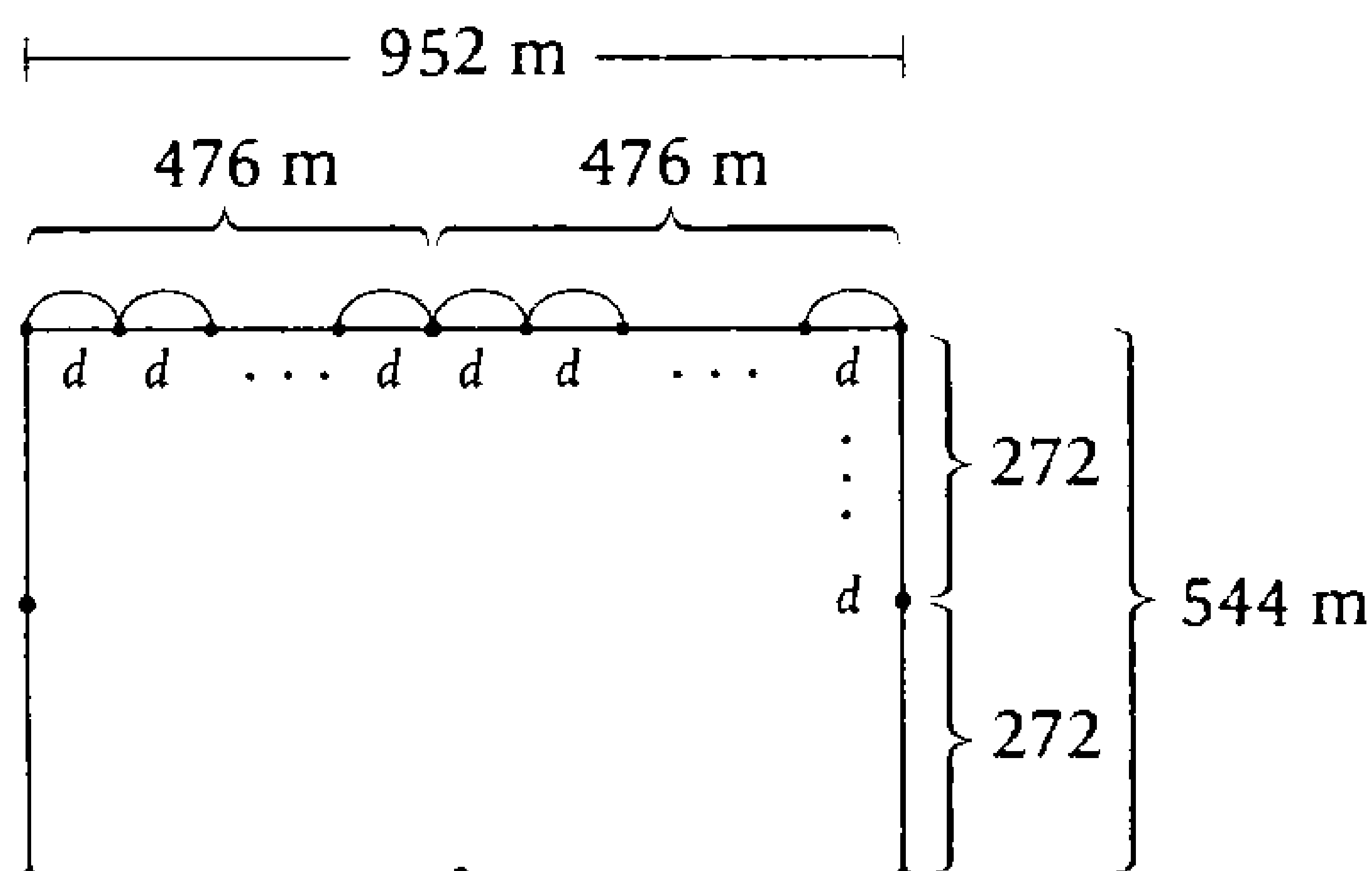
PROBLEMA N.° 41

A un terreno de forma rectangular de 952 m de largo y 544 m de ancho se le quiere cercar con alambre sujeto a postes equidistantes, de manera que disten entre 30 m y 40 m, además que corresponda un poste a cada vértice y otro en cada uno de los puntos medios de los lados del rectángulo. ¿Cuántos postes se necesitan?

A) 90 B) 88 C) 76
D) 85 E) 98

Resolución

Del gráfico



Se deduce que

- d es divisor del

$$\text{MCD}(476; 272)=2^2\times 17$$

- Por dato:

$30 < (d) < 40$

↓

2×17

Como $d=34$

Cantidad total de postes: $\dfrac{\text{Perímetro}}{d}$

$$\frac{2(952+544)}{34}=88$$

Por lo tanto, la respuesta es 88.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 42

Tres obreros tienen que colocar losetas en un área de 107 m^2. Y, por metro cuadrado, el primero emplea 30 minutos, el segundo 36 minutos y el tercero 42 minutos. ¿Cuántas horas tardarán en culminar dicha labor, si se desea que cada uno de los tres obreros empleen un mínimo tiempo y cubran cada uno un número exacto de metros cuadrados al mismo tiempo?

A) 21 horas
B) 18 horas
C) 26 horas
D) 24 horas
E) 16 horas

Resolución

Del enunciado, tenemos:

- Para que cada uno cubra un número exacto de m^2, los tiempos serán $\overset{o}{\overline{30}}$; $\overset{o}{\overline{36}}$ y $\overset{o}{\overline{42}}$, respectivamente.

- Para que los tres empleen el mismo tiempo y este sea mínimo, entonces

$$t=\text{MCM}(30; 36; 42)=1260 \text{ min} <> 21 \text{ h}$$

Clave **A**

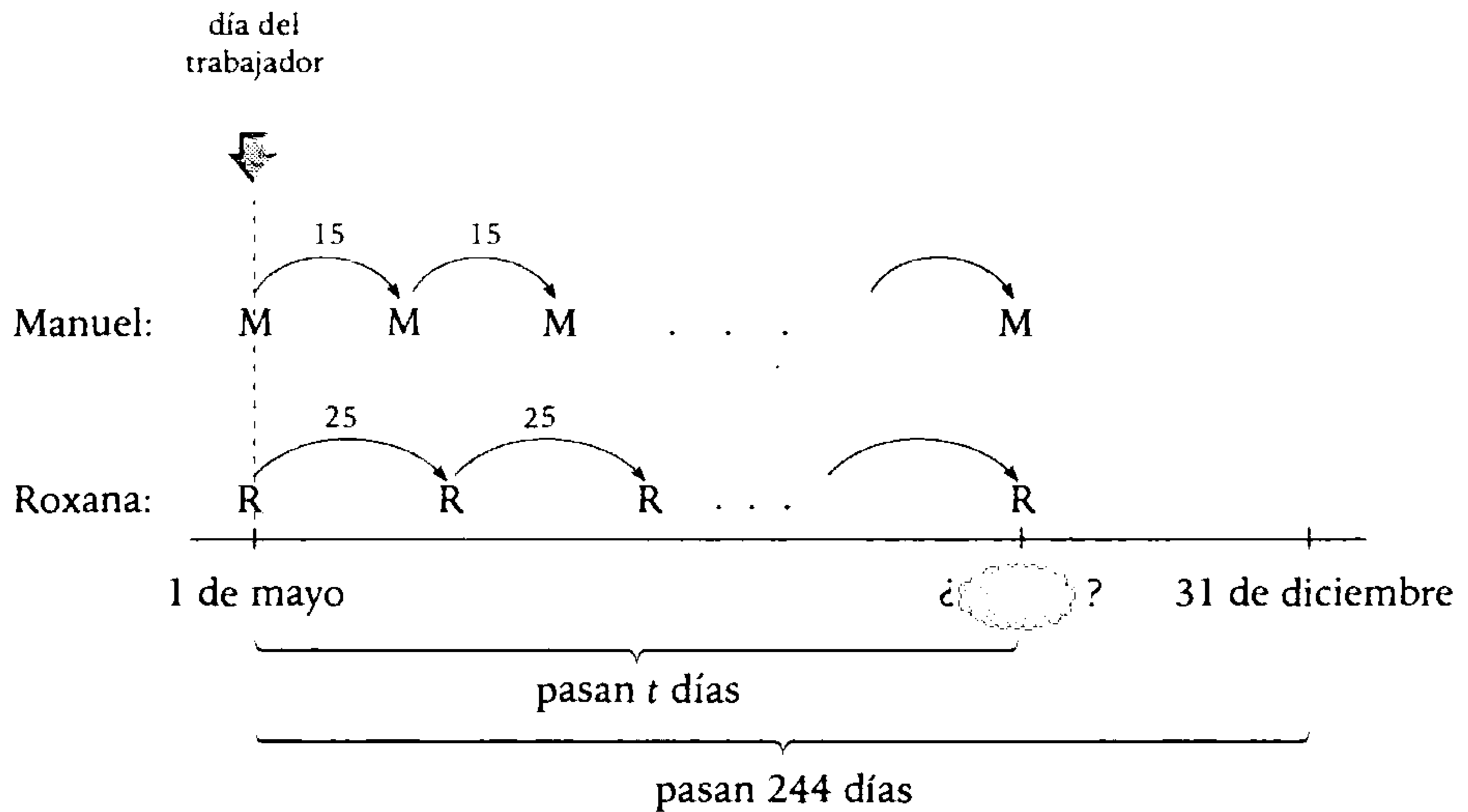
PROBLEMA N.° 43

Manuel y Roxana visitan cada 15 y 25 días a Claudia. Si la última vez que se encontraron los tres juntos fue el "Día del trabajador", ¿cuál fue la última vez de ese año en que se encontraron?

A) 2 diciembre
B) 20 diciembre
C) 5 diciembre
D) 19 diciembre
E) 12 diciembre

Resolución

Del gráfico



$$\left.\begin{array}{l} t=\overset{\circ}{15} \\ t=\overset{\circ}{25} \end{array}\right\rangle \quad t=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(15;\ 25)}}$$

$$t=\overset{\circ}{75}$$

$$t=75K \qquad (t<244)$$

$$t_{\text{máximo}}=75\times 3$$

$$=225 \text{ días}$$

Por lo tanto, la última vez en el año fue 1 de mayo+255 días=12 de diciembre.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 44

El producto y el cociente del MCM y el MCD de dos números de dos cifras son, respectivamente, 1620 y 45. Halle la suma de dichos números.

A) 82 B) 84 C) 86 D) 88 E) 90

Resolución

Sean los números A y B, de dos cifras

$\text{MCD}(A; B)=d$

$\rightarrow A=d\cdot p \wedge B=d\cdot q$ (p y q: PESI)

Por propiedad

$\text{MCM}(A; B)=d\cdot p\cdot q$

Luego

- $\text{MCM}(A; B)\times\text{MCD}(A; B)=1620$

  $d^2\cdot p\cdot q=1620$ (I)

- $\dfrac{\text{MCM}(A; B)}{\text{MCD}(A; B)}=45$

  $p\cdot q=45=3^2\times 5$

p	q
3^2	5
5	3^2

En (I)

$\rightarrow d=6$

$\therefore A+B=d(p+q)=6(14)=84$

Clave B

Resolución

Por propiedad

$\text{MCD}(A, B)=d \rightarrow \text{MCD}(AK, BK)=d\times K$

Nos piden

$\text{MCD}(A, B)=?$

Por el dato:

$\rightarrow \text{MCD}(AK, BK)=M_1$

$K\cdot\text{MCD}(A, B)=M_1$ (I)

$\rightarrow \text{MCD}\left(\dfrac{A}{K}, \dfrac{B}{K}\right)=M_2$

$\dfrac{1}{K}\times\text{MCD}(A, B)=M_2$ (II)

De (I)×(II) tenemos

$[\text{MCD}(A, B)]^2=M_1\times M_2$

$\text{MCD}(A, B)=\sqrt{M_1\times M_2}$

Por lo tanto, el MCD de A y B es $\sqrt{M_1\times M_2}$.

Clave D

PROBLEMA N.° 45

Al multiplicarse dos números por un tercero, se obtiene que su MCD es M_1, y cuando se dividen por dicho tercer número, el MCD es M_2. Calcule el máximo común divisor de dichos números.

A) M_1+M_2 B) M_1M_2 C) M_1-M_2

D) $\sqrt{M_1M_2}$ E) $(M_1M_2)^2$

PROBLEMA N.° 46

Calcule el menor número que es MCM de 21 enteros positivos distintos.

A) 340
B) 428
C) 60
D) 480
E) 576

Resolución

Para que cumpla la condición del problema, tomaremos el menor número que posee 21 divisores enteros positivos.

$\rightarrow$ CD(N)=21; $N=2^6\times 3^2$ (D.C.)

Por lo tanto,

MCM(21 divisores de N)=N=576

Clave **E**

PROBLEMA N.° 47

Al calcular el MCD de los numerales $\overline{c(b-1)(b-3)}$ y $\overline{ab(b-1)(a-4)}$, por el método del algoritmo de Euclides, se obtuvieron los cocientes 8; 3 y 4.
Calcule $a\times b\times c$.

A) 50 B) 30 C) 60
D) 45 E) 48

Resolución

Sea

$$\text{MCD}\left[\underbrace{\overline{ab(b-1)(a-4)}}_{A};\ \underbrace{\overline{c(b-1)(b-3)}}_{B}\right]=K$$

Por el algoritmo de Euclides tenemos

	8	3	4	
$A=108K$	$B=13K$	$4K$	K	← MCD
	$4K$	K	0	

$a\geq 4$ y es par: 8; 6 y 4

$$\overline{ab(b-1)\underbrace{(a-4)}_{\text{Par}}}=\underbrace{108K}_{4\times 27}\begin{cases}\rightarrow \overset{\circ}{4}\\ \rightarrow \overset{\circ}{9}\end{cases}$$

Criterio del 9

$$2a+2b-5=\overset{\circ}{9}$$

$$2(a+b)=\overset{\circ}{9}-4$$

$$a+b=\left(\overset{\circ}{9}-2\right):7 \text{ ó } 16$$

	a	b
(I)	8	9
(II)	6	1
(III)	4	3

Criterio del 4

$$\overline{\underbrace{(b-1)}\underbrace{(a-4)}}=\overset{\circ}{4}$$

De (I)	8	4	(Sí cumple)
De (II)	0	2	(No cumple)
De (III)	2	0	(Sí cumple)

De (I)

$a=8;\ b=9$

$$A=8984=\underbrace{108K}_{\overset{\circ}{27}}$$

8984 no es $\overset{\circ}{27}$

De (III)

$a=4;\ b=3$

$A=4320=108K$

$K=40$

Reemplazamos en B

$B=\overline{c(b-1)(b-3)}=13K$, con $K\to 40$

$\overline{c(b-1)(b-3)}=520$

$c=5$

$\therefore\ a\cdot b\cdot c=4\times 3\times 5=60$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 48

Sean A, B, C, D, E y F números enteros positivos, además:

$MCD(A; C; F)=15\times80^{n+3}$,

$MCD(B; D; E)=480\times(3600)^{n-3}$

Se sabe también que A, B, C, D, E y F, tienen 19 divisores comunes que son PESI con 6. Calcule cuántos de sus divisores comunes son PESI con 15, si $n>9 \wedge n\in\mathbb{Z}^+$.

A) 50 B) 54 C) 45
D) 52 E) 27

Resolución

Tenemos:

$$MCD(A; C; F)=15\times80^{n+3}$$
$$=2^{4n+12}\times3\times5^{n+4} \quad \text{(D.C.)}$$

$$MCD(B; D; E)=480\times(3600)^{n-3}$$
$$=2^{4n-7}\times3^{2n-5}\times5^{2n-5} \quad \text{(D.C.)}$$

> **Propiedad**
> Los divisores comunes de varios números, son todos divisores de su MCD.

$MCD(A; B; C; D; E; F)$

$=MCD[MCD(A; C; F); MCD(B; D; E)]$

$=2^{4n-7}\times3\times5^{n+4}$ (D.C.)

Luego, sabemos que la cantidad de divisores comunes y PESI con 6 son 19.

$6=2\times3$ (D.C.)

→ No consideramos los factores 2 ni 3

$\underbrace{5^{n+4}}$

$n+5=19;\ n=14$

Finalmente, calculamos la cantidad de divisores comunes y PESI con 15

$15=3\times5$ (D.C.)

→ No consideramos los factores 3 ni 5

$\underbrace{2^{4n-7}}$

$(4n-7)+1=4n-6$

Por lo tanto, hay 50 divisores comunes y PESI con 15.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 49

Si

$MCM(63A; 9B)=12\,096$ y

$MCD(91A; 13B)=104$,

calcule el menor valor posible de $(A+B)$.

A) 76 B) 80 C) 79
D) 82 E) 88

Resolución

De los datos, deducimos:

- $MCD(91A; 13B)=104$

  $MCD(\cancel{13}\times7A;\ \cancel{13}\times B)=\cancel{13}\times8$

  $MCD(7A; B)=8$

  $7A$ y B son $\overset{\circ}{8}$.

  $7A=8\times7p \ \rightarrow\ A=8p$

  $B=8\times q$

  ($7p$ y q son PESI)

- $\text{MCM}(\underbrace{63A}_{9\times 7A};\ 9B)=\underbrace{12096}_{9\times 1344}$

Simplificando

$\underbrace{\text{MCM}(7A;\ B)}=1344$

$8\times 7p\times q=1344$

$p\times q=2^3\times 3$

p	q	
3	2^3	mínima suma de $p+q$
2^3	3	
24	1	
1	24	

$(A+B)_{\text{mínimo}}=8p+8q$

$=8\times(p+q)=88$

$p\to 3$, $q\to 2^3$ (mínima suma)

Por lo tanto, el menor valor posible es 88.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 50

Dos números A y B tienen seis divisores cada uno, y su MCD y MCM tienen los mismos factores primos. Si A se triplica y B se quintuplica, el MCM no se altera.

Calcule la suma de

A; B; $\text{MCD}(A;\ B)$ y $\text{MCM}(A;\ B)$.

A) 360
B) 326
C) 348
D) 372
E) 754

Resolución

Observación

Si al triplicar A y quintuplicar B su MCM no se altera, entonces los factores primos que poseen A y B son 3 y 5, necesariamente.

Además

$\text{CD}(A)=\text{CD}(B)=6$

$A=3\times 5^2$ (D.C.)

$B=3^2\times 5$ (D.C.)

$\text{MCD}(A;\ B)=3\times 5$

$\text{MCM}(A;\ B)=3^2\times 5^2$

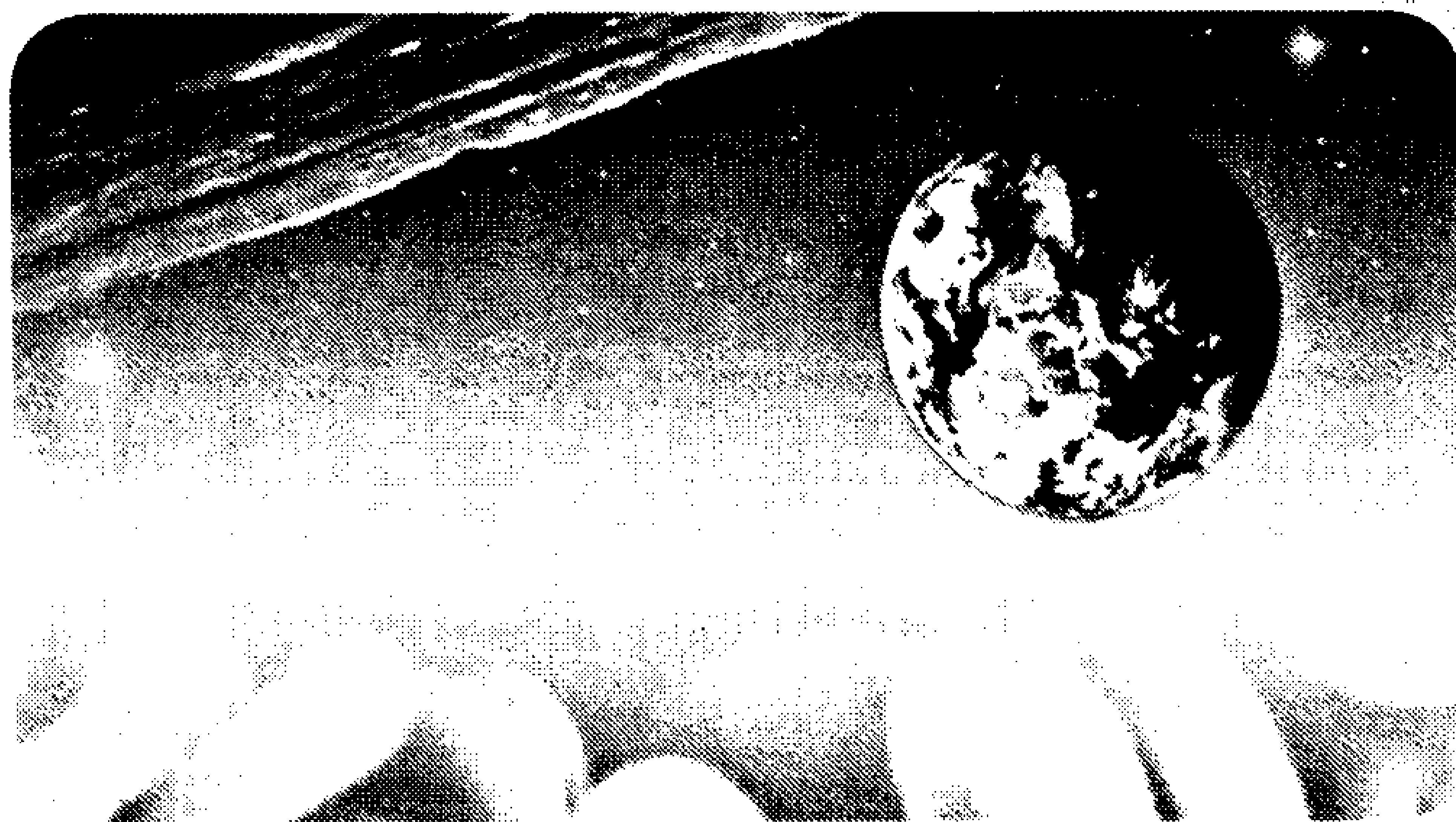
$\therefore\ A+B+\text{MCD}(A;\ B)+\text{MCM}(A;\ B)=360$

Clave **A**

Capítulo

10

Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}^+$



La potenciación es una multiplicación de varios factores iguales; así como la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales, (la potenciación se considera una multiplicación abreviada).

La radicación de enteros positivos es la operación inversa de la potenciación.

Los babilonios utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación, y los griegos sentían especial predilección por los cuadrados y los cubos. Diofanto (s. III d.n.e.) ideó la yuxtaposición adhesiva para la notación de las potencias. Así *x*, *xx*, *xxx*, para expresar la primera, segunda, tercera potencia de x. René Descartes (1596-1650) introdujo la notación x, x^2, x^3, x^4, etcétera.

Aunque la palabra raíz proviene del latín radix, la radicación fue conocida por los hindúes y por los árabes mucho antes que por los romanos. Las reglas para extraer raíces cuadradas y cúbicas aparecieron por primera vez en textos hindúes.

Capítulo 10

Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}^+$

PROBLEMA N.° 1

Si $\overline{ab\left(\frac{a}{2}\right)c0a}=\overline{de(a-2)}^2$, calcule el residuo que se obtiene al extraer la raíz cúbica de $\overline{dbe}$.

A) 59 B) 60
C) 61
D) 62 E) 63

Resolución

Analizamos:

- a es par y $\neq 0$
- Por su última cifra del cuadrado perfecto solo puede ser

  $a \in \{0; 1; \underline{4}; 5; \underline{6}; 9\}$

  Por lo anterior, solo puede ser 4 ó 6.

Si $a=4$; ver la observación.

$$\overline{4b2c04} = \overline{de2}^2$$

×	362404	=	602^2
✓	492804		702^2
×	425104		652^2
×	565504		752^2

$b=9$, $c=8$, $d=7$ y $e=0$

Observación

- $\sqrt{\overline{4b2c04}}=\overline{de2}$

solo en el primer bloque se cumple:

$\sqrt{\overline{4b}}=d,...$

6
7

d solo puede ser 6 ó 7.

- $\overline{4a2c04}=\overline{de2}^2$

$...04=\overline{e2}^2$

$$\begin{array}{r} \overline{e2}\times \\ \overline{e2} \\ \hline ...(2e)4 \\ ...(2e) \\ \hline ...\ 0\ 4 \end{array}$$

en las decenas $2e+2e=...0$

$4e=...0 \rightarrow e=0$ ó 5

Nos piden el residuo de

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{790} & 9 \\ 729 & \\ \hline r=61 & \end{array}$$

Por lo tanto, el residuo es 61.

Clave C

PROBLEMA N.° 2

Si la cantidad de divisores del numeral $\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)}$ es impar y el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de $\overline{(a+1)a(a-1)}$ es $\overline{bc}$, calcule $\overline{ab}^2+\overline{cb}^3$.

A) 16 800 B) 16 420 C) 13 256
D) 16 320 E) 16 155

Resolución

> **Propiedad**
> Un número será cuadrado perfecto si y solo si tiene una cantidad impar de divisores.

$\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)}=K^2$; $(3a) < 10$

- Según su última cifra, a: 1; 2 ó 3
- $K^2=\overset{o}{4}$ ó $K^2=\overset{o}{4}+1$
  $\rightarrow$ a: 2 ó 3
- Por terminación en 5, a no puede ser 2
  $\rightarrow$ $a=3$

Luego

$\overline{(a+1)a(a-1)}=n^2+\overline{bc}$

$432=20^2+32 \rightarrow \overline{bc}=32;\ b=3 \wedge c=2$

Piden

$\overline{ab}^2+\overline{cb}^3=33^2+23^3$

$\therefore\ \overline{ab}^2+\overline{cb}^3=13\ 256$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

Si $N=\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}$ posee una cantidad impar de divisores, indique cuántos divisores cuadrados perfectos posee N.

A) 9 B) 12 C) 15
D) 24 E) 8

Resolución

Por dato: CD(N) es impar $\rightarrow$ $N=K^2$

> **Propiedad**
> - Todo cuadrado perfecto es $\overset{o}{4}$ ó $\overset{o}{4}+1$
> - Todo cuadrado perfecto puede terminar en: 0; 1; 4; 5; 6; 9.
> - $(...5)^2=...25$

entonces

$K^2 \in \{\overset{o}{4};\ \overset{o}{4}+1\}$

$K^2=\overline{....x}$ → 0; 1; 4; 5; 6; 9

$N=\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}$

2	1	3	4	$=\overset{o}{4}+2$	(no)
3	2	4	5		(no)
4	3	5	6	$=66^2$	
7	6	8	9		(no)

Único cuadrado perfecto 66^2

$66^2=(2^2)^1\times(3^2)^1\times(11^2)^1$

$=4\times9\times121$

$\therefore\ CD_{\text{cuadrados}}=2\times2\times2=8$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 4

Si $N=\overline{mn5p(m-4)0}$ es un cuadrado perfecto, calcule el menor número que se debe agregar a $\overline{mnp}$ para que sea un número cubo perfecto impar.

A) 76 B) 123 C) 140
D) 263 E) 293

Resolución

Del dato:

$N=\overline{mn5p(m-4)0}=K^2$

$(m-4) = 0 \rightarrow m=4$

y $\overline{4n5p}=\overline{ab}^2=\begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{4}+1\end{cases}$, $p \rightarrow 6$

$\rightarrow \overline{4n56}=\begin{cases}\overline{a4}^2=64^2=4096 & \text{No cumple}\\ \overline{a6}^2=66^2=4356 & \text{Sí cumple}\end{cases}$

Luego

$\overline{mnp}=436$

$7^3 < 436 < 8^3 \rightarrow 436+293=9^3$ (293: mín)

Por lo tanto, el menor número que se debe agregar es 293.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

La suma de divisores múltiplos de 25 del numeral $\overline{ababab}$ es $\overline{mn(m+1)(3n)cc}$. Además, al extraer la raíz cuadrada de $\overline{abab}$ se obtiene una raíz que es el doble del residuo, siendo este último igual a $\overline{ab}$. Calcule el residuo al extraer la raíz cuadrada de $\overline{mn(c+1)}$.

A) 10 B) 20 C) 25
D) 35 E) 21

Resolución

Del dato:

$\sqrt{\overline{abab}}$ | $2\times\overline{ab}$

$r=\overline{ab}$

Efectuamos

$\overline{abab}=(2\times\overline{ab})^2+\overline{ab}$

$\overline{ab}\times 101=4\times\overline{ab}^2+\overline{ab}$

$\overline{ab}=25$

$\rightarrow a=2 \wedge b=5$

$\overline{ababab}=252525$

$\overline{ababab}=\underbrace{25\times 3\times 7\times 13\times 37}$

$SD_{(\overset{\circ}{25})}=25\times(3+1)(7+1)(13+1)(37+1)$

$\overline{mn(m+1)(3n)cc}=25\times 4\times 8\times 14\times 38$

$\overline{mn(m+1)(3n)cc}=425\,600$

$\rightarrow m=4 \wedge n=2;\ c=0$

Nos piden

$\sqrt{421}$ | 20
400
21

Por lo tanto, el residuo es igual a 21.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 6

Si $\overline{9abc5}$ es un cuadrado perfecto de cifras diferentes, calcule la suma de cifras del menor número por el cual se debe multiplicar al numeral $\overline{abcbb}$ para que sea un cubo perfecto.

A) 10 B) 11
C) 12
D) 13 E) 14

Resolución

Tenemos

$\overline{9abc5}=K^2$; cifras diferentes

$\overline{9a}$ ↓ 30; c ↓ 2

$30\times 31=930$ Sí cumple

$31\times 32=992$ No cumple

$a=3;\ b=0\ \wedge\ c=2$

$\rightarrow\ \overline{abcbb}=30200=2^3\times 5^2\times 151$ (DC)

Piden $A_{mín}$, para que $30\ 200\times A_{mín}$ sea un cubo perfecto.

$\rightarrow\ A_{mín}=5\times 151^2$

$A_{mín}=114\ 005$

Por lo tanto, la suma de cifras es 11.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

Si $\overline{ab}^2=\overline{(a-2)(b-2)a1}$, calcule $a\times b$.

A) 54
B) 63
C) 72
D) 40
E) 42

Resolución

Tenemos: b^2 termina en 1

$(\overline{ab})^2=\overline{(a-2)(b-2)a1}$ $(b\geq 2)$

↓

1×
9

$b=9$

Multiplicamos

$$\begin{array}{r} \overline{a9}\ \times \\ \overline{a9} \\ \hline \square 1 \\ \square\ \\ \hline \overline{(a-2)\,7\,a\,1} \end{array}$$

$(9a+8)+9a=\ldots a$

$17a=\ldots 2$

↓

6

$a=6$

Reemplazamos

$69^2=4761$ Sí cumple

$\therefore\ a\times b=54$

Clave **A**

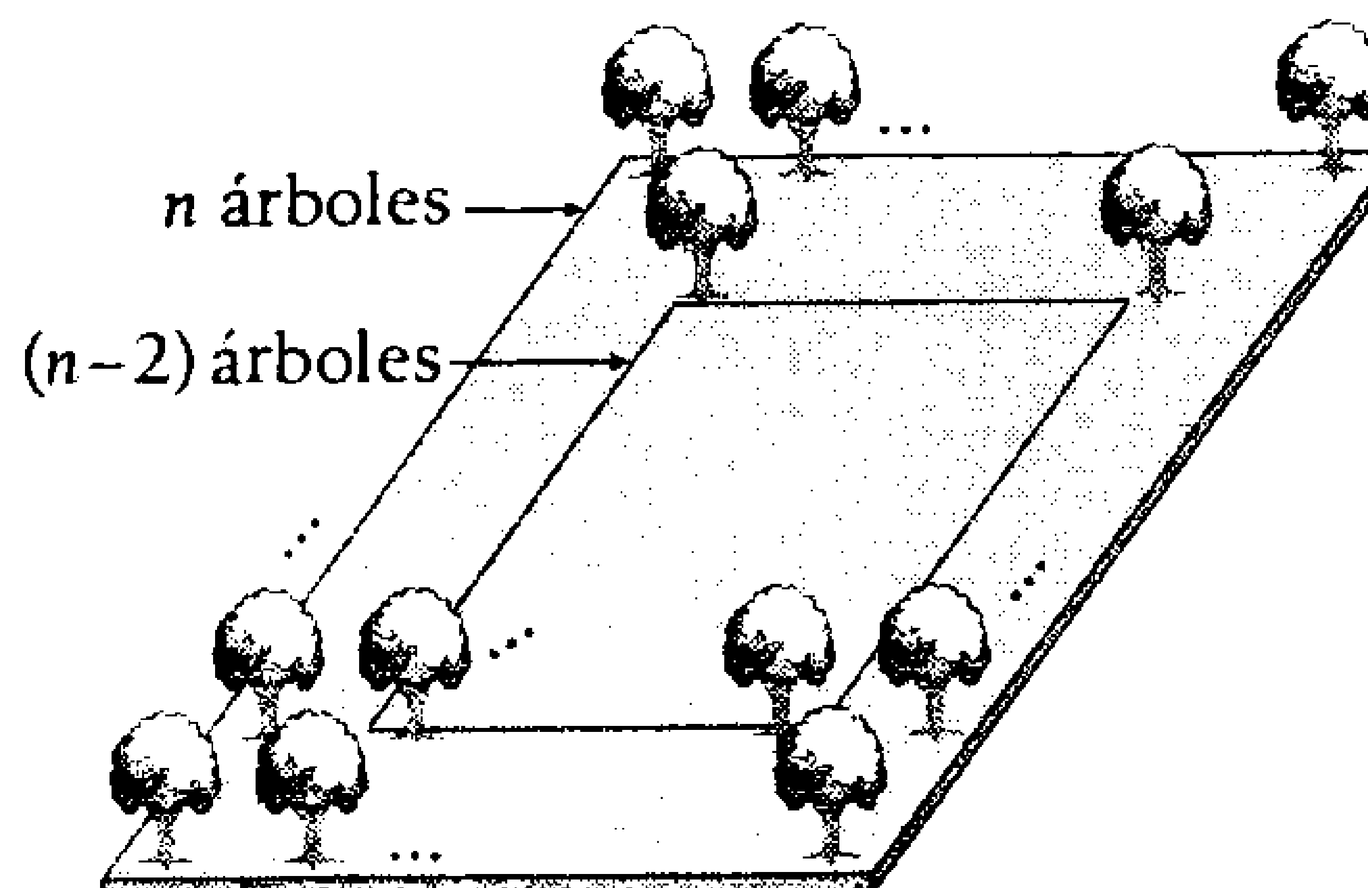
PROBLEMA N.° 8

Un terreno cuadrado está sembrado con árboles equidistantes entre sí. Se sabe que en el interior hay 476 árboles más que en el perímetro. ¿Cuántos árboles hay en total?

A) 625 B) 676 C) 576
D) 729 E) 616

Resolución

Como es un cuadrado, en cada lado hay la misma cantidad de árboles.



Entonces

- En el interior: $(n-2)^2$ árboles
- En el perímetro: $(4n-4)$ árboles

Se tiene

$(n-2)^2-(4n-4)=476$

$n(n-8)=486=2\times3\times3\times2\times13$

$n=26$

Por lo tanto, el total de árboles es

$26^2=676$

Clave B

PROBLEMA N.° 9

Si cada cifra es representada por un asterisco, calcule la suma de cifras del radicando.

```
 √1*****  |***
  **      |
  ***     |
  1**     |
   ****   |
   5**9   |
     12   |
```

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

Resolución

- $\sqrt{1\square}=a,\ldots$ ↓ 4, 3

para $a=4$

-
```
       √1_ _ _ _ _  | 4 b c
  a² = 16           | 8b × b
       _ _ _        | 84c × c
       1 6 4        |
       _ _ _ _      |
       5 _ _ 9      |
           1 2      |
```

- $\overline{8b}\times b=1__ \rightarrow b=2$
- $\overline{84c}=5__9 \rightarrow c=7$

El radicando es 427^2+12

$=182341$

$\therefore$ Suma de cifras $=19$

Clave E

PROBLEMA N.° 10

¿Cuántos números de cinco cifras que terminan en 5 generan residuo máximo al extraerle su raíz cuadrada?

A) 22 B) 44 C) 42
D) 64 E) 68

Resolución

Se tiene

$\overline{abcd5}=P^2+r_{\text{máx}}$

$\rightarrow \overline{abcd6}=K^2$

De donde $K=\begin{cases}\ldots4\\ \ldots6\end{cases}$

Luego

$10\,006\leq K^2\leq 99\,996$

$100{,}02\leq K\leq 316{,}22$

- $K = ...4$

  $\rightarrow K: \underbrace{104; 114; 124; ... ; 314}_{22 \text{ valores}}$

- $K = ...6$

  $\rightarrow K: \underbrace{106; 116; 126; ... ; 316}_{22 \text{ valores}}$

Por lo tanto, son 44 números.

Clave B

PROBLEMA N.° 11

Al extraer la raíz cuadrada del numeral $\overline{2abb4}$, se obtiene un residuo máximo y la raíz cuadrada es $\overline{cd4}$. Halle el residuo al extraer la raíz cúbica de $\overline{abc}$.

A) 209 B) 207 C) 219
D) 213 E) 215

Resolución

$\sqrt{\overline{2abb4}}\ \lfloor \overline{cd4}$

$r_{\text{máx}} = 2 \times \overline{cd4}$

$\overline{2abb4} = \overline{cd4}^2 + 2 \times \overline{cd4}$

$\overline{2abb4} + 1 = \overline{cd4}^2 + 2 \times \overline{cd4} + 1$

$\overline{2abb5} = (\overline{cd4} + 1)^2$

$\overline{2abb5} = \overline{cd5}^2$

$\downarrow \quad 25$

$\overline{cd} \times (\overline{cd} + 1)$

$b = 2 \quad \wedge \quad \underbrace{\overline{cd}}_{16} \times \underbrace{(\overline{cd} + 1)}_{17} = \overline{2a2}$ ($a \to 7$)

$\underbrace{a = 7, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 6}_{\overline{abc} = 721}$

La raíz cúbica de 721

$\rightarrow \sqrt[3]{721}\ \lfloor 8$

$\quad 512$

$\quad 209$

Por lo tanto, el residuo es 209.

Clave A

PROBLEMA N.° 12

El número $\overline{39xy4}$ es un cuadrado perfecto, mientras que el número $\overline{39zy4}$ es un cubo perfecto. Halle $x + y + z$.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 9

Resolución

Analizamos convenientemente:

- $\overline{39zy4} = \overline{a4}^3 = 34^3 = 39\ 304$

  $\rightarrow z = 3; \quad y = 0$

- $\overline{39xy4} = \overline{39x04} = K^2$

  $\rightarrow K = ...2$ ó $K = ...8$

  $100 \times \overline{39\underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{x}} = K^2 - 4 = (K-2)(K+2)$

  $100 \times 2 \times 196 = (K-2)(K+2)$

  $K = 198$

$\therefore \ x + y + z = 5$

Clave C

PROBLEMA N.° 13

Si $\overline{1bcde}=\overline{de}^3$ y $\overline{bde}=\overset{o}{36}$, halle el residuo al extraer la raíz cuadrada a $\overline{cde}$.

A) 22 B) 30 C) 32
D) 40 E) 44

Resolución

$\overline{bde}=\overset{o}{36} \rightarrow \overline{de}=\overset{o}{4}$

$\overline{1bcde}=\overline{de}^3$

$\overline{1bc00}+\overline{de}=\overline{de}^3$

→ por terminar en 00 <> $\overset{o}{25} \wedge \overset{o}{4}$

$\overline{1bc00}=\underbrace{(\overline{de}-1)}\underbrace{\overline{de}}\underbrace{(\overline{de}+1)}=\overset{o}{25}$

$13800=$ 23 24 $\underbrace{25}$ Sí cumple

$438900=$ $\underbrace{75}$ 76 77 No cumple

$b=3;\ c=8;\ d=2;\ e=4$

entonces

$\overline{cde}=824$

$\sqrt{824}$ | 28
784
$r=40$

Por lo tanto, el residuo es 40.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

Si $\overline{abc}^2=\overline{(c-2)cc(c-1)c}$,

halle $\sqrt[c]{\overline{(c-2)cc(c-1)c}}$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Tenemos

$\overline{abc}^2=\overline{(c-2)cc\underbrace{(c-1)c}}$; $(c-2)>0 \rightarrow c>2$

5	→	45	No cumple
6	→	$56=\overset{o}{4}$	Sí cumple

$\overline{ab6}^2=46\,656=216^2$

Piden

$\sqrt[c]{\overline{(c-2)cc(c-1)c}}$

$\therefore\ \sqrt[6]{216^2}=\sqrt[6]{6^6}=6$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

Si $\overline{aaabc}$ es un número impar cuadrado perfecto tal que a; b y c son cifras diferentes; además, $a+b+c<6$, encuentre la suma de cifras de la raíz cuadrada de $\overline{aaabc}$.

A) 15 B) 13 C) 14
D) 16 E) 18

Resolución

$K^2=\overline{aaabc}$ es impar
↓ (c)
1, 5, 9

a, b y c son diferentes y suman menos de 6, sus únicos valores son: 0; 1; 2 y 3.

$a+b+c<6$; necesariamente $c=1$
↓ (c)
1

$a+b<5$ $(a\neq 0)$
↓ ↓

a	b	
2	0	(I)
3	0	(II)

En (I): Si $\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=0 \\ c=1 \end{matrix}\right\}$ $K^2=22\,201$, $K^2=149^2$ (sí cumple)

En (II): Si $\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=0 \\ c=1 \end{matrix}\right\}$ $K^2=33\,301$, $K \notin \mathbb{Z}^+$

Por lo tanto, la suma de cifras es $1+4+9=14$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

¿Cuántos números de seis cifras que terminan en 6 son múltiplos de 42 y cuadrados perfectos?

A) 6 B) 5 C) 9
D) 7 E) 8

Resolución

Se tiene que:

$$\overline{abcde6}=K^2=\overset{o}{42}=\begin{cases}\overset{o}{2}\\ \overset{o}{3}\\ \overset{o}{7}\end{cases} \rightarrow K=\begin{cases}\overset{o}{2}\\ \overset{o}{3}\\ \overset{o}{7}\end{cases}$$

Por su última cifra: $K=\begin{cases}...4\\ ...6\end{cases}$

Pero, $K=\overset{o}{42}=42n$

$$\rightarrow n=\begin{cases}...2\\ ...7\end{cases} K=...4 \qquad \begin{cases}...3\\ ...8\end{cases} K=...6$$

Luego

$100\,006 \leq (42n)^2 \leq 999\,996$

$7{,}5 \leq n \leq 23{,}8$

De lo anterior

n: 8; 12; 13; 17; 18; 22; 23

Por lo tanto, son 7 números.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

Halle la suma de cifras del menor número de cinco cifras, si se sabe que es igual a 28 veces el cubo de la suma de sus cifras.

A) 8 B) 17 C) 9
D) 6 E) 10

Resolución

Es el menor número

$$\overline{abcde}=28(\underbrace{a+b+c+d+e}_{K})^3 \qquad \text{(I)}$$

Por el criterio del 9

$$\overset{o}{9}+\underbrace{a+b+c+d+e}_{K}=(\overset{o}{9}+1)(\underbrace{a+b+c+d+e}_{K})^3$$

$$\overset{o}{9}=K^3-K$$

$$\overset{o}{9}=\underbrace{(K-1)K(K+1)}_{\text{solo uno de los factores es } \overset{o}{9}}$$

$$\underbrace{K-1=\overset{o}{9} \vee K=\overset{o}{9} \vee K+1=\overset{o}{9}}$$

$$K \in \{\overset{o}{9}-1;\ \overset{o}{9};\ \overset{o}{9}+1\}$$

$$K \in \{8; 9; 10; 17; 18; ...\}$$
× ✓

El mínimo que cumple es

$K=9 \quad \overline{abcde}=28\times 9^3$

$\overline{abcde}=\underbrace{20412}$

Por lo tanto, la suma de cifras es 9.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

Dada la sucesión
$54\times 72;\ 54\times 96;\ 54\times 120;\ldots;\ 54\times 82\,944;$
¿cuántos términos cuadrados perfectos existen que no sean cubos perfectos?

A) 58 B) 55 C) 56
D) 53 E) 52

Resolución

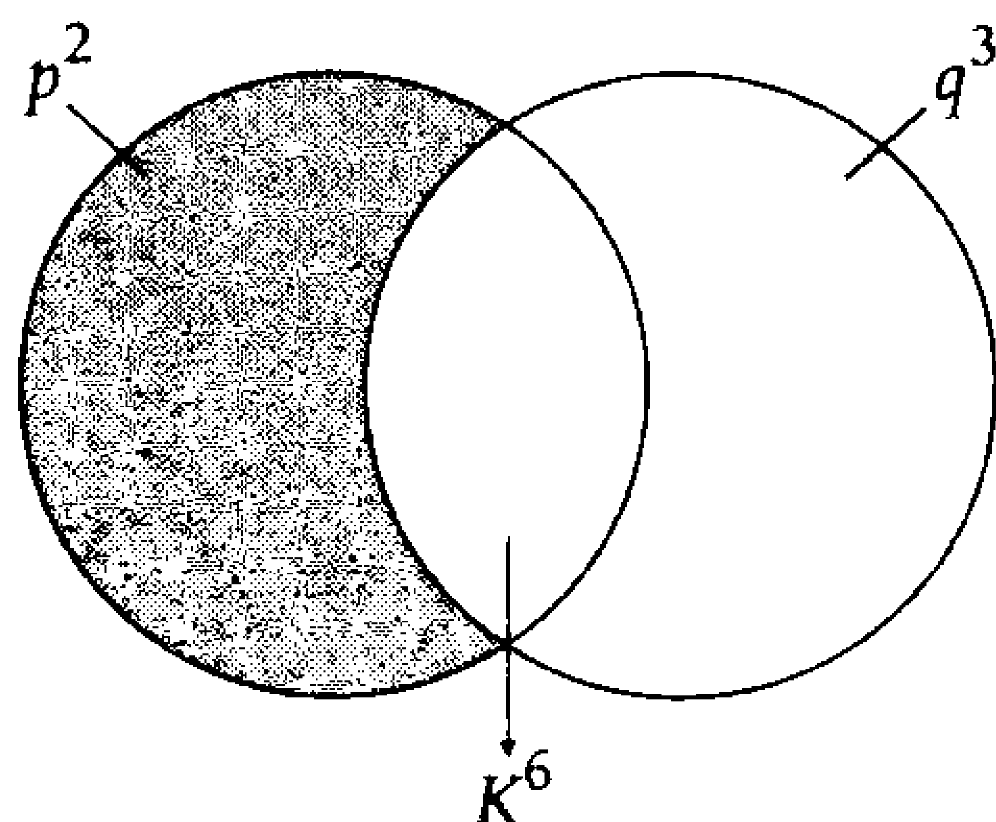
En la sucesión:

$$54\times 72;\ 54\times 96;\ 54\times 120;\ldots;\ 54\times 82\,944$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$24(3) \quad 24(4) \quad 24(5) \quad 24(3456)$$

$\rightarrow \ t_n=54\times 24\times n;\ n\in\mathbb{Z} \ \wedge \ 3\leq n\leq 3456$

$t_n=2^4\times 3^4\times n \qquad \text{(I)}$

- Piden que los términos sean cuadrados perfectos, pero no cubos perfectos, entonces:



De (I)

- Para que t_n sea cuadrado perfecto, n también debe serlo.

  $3\leq n\leq 3456$

  $n:\ \underbrace{2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \ldots;58^2}_{57\text{ valores}}$

- No cumplen los

  $n=2^2\times 3^2\times r^6;\quad r:\ 1 \text{ ó } 2$

  ya que t_n sería de la forma K^6.

Por lo tanto, hay 55 términos que son cuadrados perfectos, pero no cubos perfectos.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

¿Cuántos números existen que tienen como raíz cuadrada a 14 y por raíz cúbica a 6?

A) 11 B) 8 C) 9
D) 12 E) 10

Resolución

Por dato:

- $\sqrt{N}=14,\ldots$

  $14\leq\sqrt{N}<15$

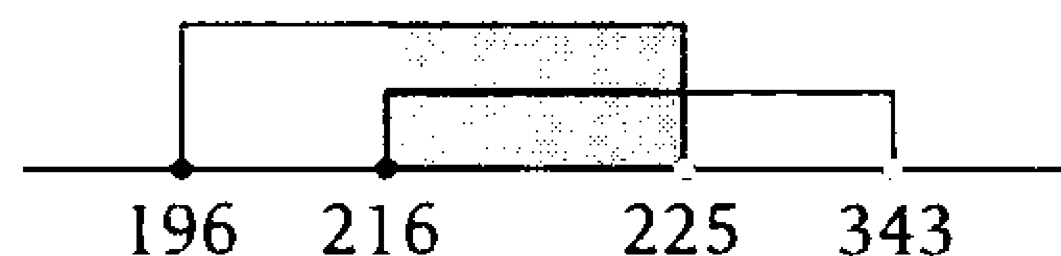
  $196\leq N<225 \qquad \text{(I)}$

- $\sqrt[3]{N}=6,\ldots$

  $6\leq\sqrt[3]{N}<7$

  $216\leq N<343 \qquad \text{(II)}$

De (I) y (II)



$N \in \underbrace{\{216; 217; .. ;224\}}_{\text{9 números}}$

Clave C

PROBLEMA N.° 20

Calcule el producto de las cuatro cifras de un número, que tiene raíz cuadrada exacta, si la suma de dichas cifras es 31.

A) 3627
B) 3524
C) 3674
D) 3768
E) 3456

Resolución

Del enunciado

$N=\overline{abcd}=\overline{mn}^2$

Donde

$a+b+c+d=31=\overset{\circ}{9}+4$

Analizamos:

- $N=\overset{\circ}{9}+4 \rightarrow \overline{mn}=\begin{cases}\overset{\circ}{9}+2\\ \overset{\circ}{9}+7\end{cases}$
- $a_{\text{mín}}=4$, porque $(b+c+d)_{\text{máx}}=27$
- $d_{\text{mín}}=4$, porque$(a+b+c)_{\text{máx}}=27$

  $\rightarrow n \neq 0;\ 1\ \text{y}\ 9$
- $n=5 \rightarrow \overline{cd}=25$

  No cumple porque $(a+b)_{\text{máx}}=18$

Luego

$4000 < \overline{mn}^2 < 10\,000$

$63{,}2 < \overline{mn} < 100$

- $\overline{mn}=\overset{\circ}{9}+2 \rightarrow \overline{mn}$: 74; 83 ó 92
- $\overline{mn}=\overset{\circ}{9}+7 \rightarrow \overline{mn}$: 88 ó 97

Veamos

	Suma de cifras	
$74^2=5476$	22	No cumple
$83^2=6889$	31	Sí cumple
$92^2=8464$	22	No cumple
$88^2=7744$	22	No cumple
$97^2=9404$	17	No cumple

$\rightarrow N=\overline{abcd}=6889$

Por lo tanto, el producto de las cifras es

$6\times8\times8\times9=3456$

Clave E

PROBLEMA N.° 21

¿Cuántos cuadrados perfectos de tres cifras existen en la base 11, que al expresarlos en el sistema quinario terminan en la cifra 4?

A) 8
B) 14
C) 15
D) 12
E) 10

Resolución

Tenemos

$K^2=\overline{abc}_{(11)}=...4_{(5)}$

$K^2=\overset{\circ}{5}+4 \rightarrow K=\overset{\circ}{5}\pm2$

$K\in\{\overset{\circ}{5}+2;\ \overset{\circ}{5}-2\}$

Luego

$$11^2 \leq \underbrace{\overline{abc}_{(11)}} < 11^3$$

$$11^2 \leq K^2 < 11^3$$

$$11 \leq K < 36{,}4...$$

$$K \in \begin{Bmatrix} 13; 18; 23; 28; 33 \\ 12; 17; 22; 27; 32 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, hay 10 valores.

Clave E

PROBLEMA N.° 22

Se tiene un número de cuatro cifras consecutivas crecientes. Si se permutan las dos primeras cifras, el número resultante es un cuadrado perfecto. ¿Cuánto hay que agregarle al número inicial, como mínimo, para que sea un cuadrado perfecto?

A) 32 B) 12
C) 20
D) 25 E) 18

Resolución

Del enunciado:

$$N=\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}$$

Luego

$$\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}=K^2$$

- Por terminación: $a \in \{1; 2; 3; 6\}$
- $a=1 \rightarrow K^2= ...34 = \overset{\circ}{4}+2$ No cumple
- $a=2 \rightarrow K^2= ...45$ No cumple
- $a=3 \rightarrow K^2= ...56 = \overset{\circ}{4}$ Sí cumple
- $a=6 \rightarrow K^2= ...89 = \overset{\circ}{4}+1$ Sí cumple

Además, la suma de cifras de K^2 es $(4a+6)$.

Observación

Un cuadrado perfecto es

$\overset{\circ}{9}$; $\overset{\circ}{9}+1$; $\overset{\circ}{9}+4$ ó $\overset{\circ}{9}+7$

$a=3 \rightarrow$ suma de cifras$=18=\overset{\circ}{9}$ Sí cumple

$a=6 \rightarrow$ suma de cifras$=30=\overset{\circ}{9}+3$ No cumple

$\therefore\ a=3$

Luego

$$N=3456;\quad 58^2 < 3456 < 59^2$$

$$\rightarrow\ 3456+\underset{\downarrow \atop 25}{A_{\text{mín}}}=59^2=3481$$

Por lo tanto, hay que sumarle 25 como mínimo.

Clave D

PROBLEMA N.° 23

Halle el menor número múltiplo de 11 tal que, al extraerle su raíz cuadrada, se obtiene 51 de residuo. Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 10 C) 6
D) 4 E) 12

Resolución

Tenemos

$$N=\overset{o}{11} \rightarrow N=11K$$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{11K} & a \\ \hline r=51 & \end{array}$$

Observación

$r_{max}=2a$

$r \leq r_{máx}$

$51 \leq 2a$

$25{,}5 \leq a$

$$N=11K=a^2+51$$

$$N=\underbrace{11K}_{\overset{o}{11}}=a^2+\underbrace{51}_{\overset{o}{11}+7}$$

$$a^2=\overset{o}{11}+4 \rightarrow a^2=\overset{o}{11}+2^2$$

$$a=\overset{o}{11}\pm 2$$

$$a\in\left\{\overset{o}{11}+2;\ \overset{o}{11}-2\right\}\ (a\geq 25{,}5)$$

$$a_{mín}=31$$

$$\rightarrow N=31^2+51$$

$$N=1012$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 4.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 24

Halle $a+b+c+d$,
si $\overline{ab1cd}=K^3$ y $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

A) 22 B) 25 C) 19
D) 16 E) 24

Resolución

Se tiene

$$\overline{ab1cd}=K^3 \wedge \overline{ab}-\overline{cd}=1$$

$$\overline{ab}\times 10^3+100+\underset{(\overline{ab}-1)}{\overline{cd}}=K^3$$

$$\underset{\overset{o}{11}}{1001\times\overline{ab}}+99=K^3=\overset{o}{11} \rightarrow K=\overset{o}{11}$$

Entonces

$$\overline{ab1cd}=\begin{cases} 22^3=10\ 648 & \text{No cumple} \\ 33^3=35\ 937 & \text{No cumple} \\ 44^3=85\ 184 & \text{Sí cumple} \end{cases}$$

$\therefore\ a+b+c+d=25$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Sea $A=\{x^2/x\in\mathbb{N} \wedge 5800<x^2<62\ 001\}$, ¿cuántos elementos de A terminan en 4 y son múltiplos de 6?

A) 11 B) 6 C) 8
D) 10 E) 9

Resolución

Si $A=\{x^2/x\in\mathbb{N} \wedge 5800<x^2<62\ 001\}$

$$76{,}1...<x<249$$

$$x\in\{77;\ 78;\ 79;\ ...;\ 248\}$$

Por extensión tenemos

$$A=\{77^2;\ 78^2;\ 79^2;\ 80^2;\ ...\ ;\ 248^2\}$$

Nos piden los elementos que terminan en 4 y son $\overset{\circ}{6}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } n^2=...4 & \rightarrow & n=...2 \\ & & n=...8 \\ \text{Si } n^2=\overset{\circ}{6} & \rightarrow & n=\overset{\circ}{3} \end{array}\right\} 77 \leq n \leq 248$$

Los valores de n son

n → 102, 132, 162, 192, 222
n → 78, 108, 138, 168, 198, 228

Por lo tanto, hay 11 valores.

Clave A

PROBLEMA N.° 26

Determine un número de seis cifras cuadrado perfecto de la forma $\overline{abcdef}$, y tal que $\overline{cd}=2\overline{ab}$ y $\overline{ef}=3\overline{cd}$. Indique la suma de cifras.

A) 26 B) 27 C) 23
D) 28 E) 30

Resolución

Tenemos que

$$\overline{cd}=2\times\overline{ab} \quad \wedge \quad \overline{ef}=3\times\overline{cd}=6\times\overline{ab}$$

$$\rightarrow \quad 6\times\overline{ab} < 100$$

$$\overline{ab} < 16{,}6$$

Además

$$\overline{abcdef}=K^2$$

$$\overline{ab}\times 10^4+\overline{cd}\times 10^2+\overline{ef}=K^2$$

$$10\,206\times\overline{ab}=K^2$$

$$2\times 3^6\times 7\times\overline{ab}=K^2$$

$$\rightarrow \quad \overline{ab}=2\times 7=14$$

Luego

$$\overline{cd}=28 \quad \wedge \quad \overline{ef}=84$$

$$\therefore \quad a+b+c+d+e+f=27$$

Clave B

PROBLEMA N.° 27

Halle $a-b$, si $\overline{aabb}$ es un cuadrado perfecto.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 0

Resolución

Como

$$K^2 \in \left\{\overset{\circ}{4};\ \overset{\circ}{4}+1\right\}$$

y por la última cifra de un K^2

$$K^2=\overline{a\,a\,b\,b}$$

$00 \wedge \overline{aa}=n^2$; (no existe)

$11=\overset{\circ}{4}+3$; (no)

44

$55=\overset{\circ}{4}+3$; (no)

$66=\overset{\circ}{4}+2$; (no)

$99=\overset{\circ}{4}+3$; (no)

Única posibilidad

$$\rightarrow \quad b=4$$

Tenemos

$$K^2=\overline{aa44}$$

$$K^2=11\times\overline{a04}$$

Por ser cuadrado perfecto y $\overset{o}{11}$, debe haber dos factores 11.

$$K^2 = \underbrace{11}_{\overset{o}{11}} \times \underbrace{\overline{a04}}_{\overset{o}{11}}$$

$$\overline{a04} = \overset{o}{11}$$

Por el criterio del 11

$a+4=\overset{o}{11}$

$a=7$

$\therefore\ a-b=3$

Clave B

PROBLEMA N.° 28

Calcule la suma de valores de las cifras a y b del número $\overline{9ab4}$, para que este sea un cuadrado perfecto.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Se tiene

$\overline{9ab4}=K^2$

$\rightarrow\ K=...2$ ó $K=...8$

Luego

$$\overline{9ab4}=K^2=\begin{cases} 92^2=8464 & \text{No cumple} \\ 98^2=9604 & \text{Sí cumple} \end{cases}$$

$\rightarrow\ a=6\ \wedge\ b=0$

$\therefore\ a+b=6$

Clave D

PROBLEMA N.° 29

¿Cuántos números cuadrados perfectos de la forma $\overline{abc}$ existen, tales que a, b y c son cifras diferentes y consecutivas sin importar el orden?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Si $K^2=\overline{a\,b\,c}$

cifras consecutivas, no necesariamente en orden.

- Sean las cifras $\underbrace{n,\ n+1\ \text{ y }\ n+2}$

  suma de cifras: $3n+3=\overset{o}{3}$

  Si $K^2=\overset{o}{3}$ entonces $K^2=\overset{o}{9}$

  Por criterio del 9:

  $3n+3=\overset{o}{9}$

  $n+1=\overset{o}{3}$

  $n\in\{2;\ 5;\ \underset{\times}{8}\}$

- Si $n=2$, las cifras son 2, 3 y 4.
  K^2 solo puede terminar en 4.

  casos: $\underbrace{234}_{\text{no es cuadrado}}$ ó $\underbrace{324}_{18^2}$

- Si $n=5$, las cifras son 5; 6 y 7.
  K^2 solo puede terminar en 5 ó 6, pero si termina en 5 a su lado está la cifra 2 y no puede ser, entonces solo termina en 6.

  Casos: $\underbrace{576}_{24^2}$ ó $\underbrace{676}_{\text{no es cuadrado}}$

Por lo tanto, solo cumple 18^2 y 24^2.

Clave B

PROBLEMA N.° 30

¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre 3200 y 8600?

A) 24 B) 18 C) 54
D) 36 E) 81

Resolución

Entonces

$3200 < K^2 < 8600$

$56{,}5 < K < 92{,}7$

$K \in \{57; 58; 59; \ldots ; 92\}$

Por lo tanto, hay 36 cuadrados perfectos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

¿Cuál es el número que sumado con su cuadrado da como resultado 2970? Indique la diferencia de las cifras de orden 1 y 2.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

Resolución

Por dato:

$n+n^2=2970$

$\underset{54}{n}\times\underbrace{(n+1)}_{55}=\underbrace{2\times3^3}\times\underbrace{11\times5}$

$n=54$

Nos piden

$5-4=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

Halle el número $\overline{a9b9}$, cuadrado perfecto, tal que $a+b=7$. Indique la suma de las cifras extremas.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

Resolución

Tenemos que:

$\overline{a9b9}=K^2 \wedge a+b=7$

Observación

- Un cuadrado perfecto es $\overset{o}{4}$ ó $\overset{o}{4}+1$
- Un cuadrado perfecto impar es $\overset{o}{8}+1$

Entonces

$\overline{b9}=\overset{o}{4}+1 \wedge \overline{9b9}=\overset{o}{8}+1$

b	b	
0	0	No cumple
2	2	Sí cumple $\rightarrow a=5$
4	4	No cumple
6	6	Sí cumple $\rightarrow a=1$

Luego

$5929=77^2$ Sí cumple

$1969=44^2+33$ No cumple

$\rightarrow a=5$

Por lo tanto, la suma de las cifras extremas es 14.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Al cuadrado de un número entero se le suma su cubo y se obtiene 16 250. Halle la suma de cifras del número.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 12

Resolución

Sea el número K

Por dato:

$$K^2+K^3=16\,250$$

$$\underset{5^2}{K}\times\underset{5^2}{K}\times\underbrace{(K+1)}_{26}=5^4\times2\times13$$

$$K=25$$

$\therefore\ 2+5=7$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

Si $A+\frac{A}{15}=K^2$; $A\in\mathbb{N}$ y A es número par de cuatro cifras, ¿cuántos números cumplen con dicha condición?

A) 5 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

A es un entero positivo par, tal que:

$$A+\frac{A}{15}=K^2 \quad\rightarrow\quad \frac{16A}{15}=K^2$$

$2^4\left(\frac{A}{15}\right)=K^2$, de donde

$A=\overset{\circ}{15}\wedge\left(\frac{A}{15}\right)$ es cuadrado perfecto.

$\rightarrow\ A=15n^2$; n es par.

Como A tiene cuatro cifras:

$$1000\leq15n^2<10\,000$$

$$8{,}1\leq n<25{,}8$$

$$\rightarrow\ n\in\{10; 12; 14; \ldots ;24\}$$

Por lo tanto, cumplen 8 números.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 35

Un número N no tiene posibilidad de ser cuadrado perfecto cuando su división entre 7 deja residuo ...

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Analizamos los cuadrados perfectos respecto al módulo 7.

K	K^2
$\overset{\circ}{7}$	$\overset{\circ}{7}$
$\overset{\circ}{7}+1$	$\overset{\circ}{7}+1$
$\overset{\circ}{7}+2$	$\overset{\circ}{7}+4$
$\overset{\circ}{7}+3$	$\overset{\circ}{7}+2$
$\overset{\circ}{7}+4$	$\overset{\circ}{7}+2$
$\overset{\circ}{7}+5$	$\overset{\circ}{7}+4$
$\overset{\circ}{7}+6$	$\overset{\circ}{7}+1$

K^2 puede ser

$$K^2\in\left\{\overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{7}+1; \overset{\circ}{7}+2; \overset{\circ}{7}+4\right\}$$

El residuo solo puede ser: 0; 1; 2; 4, y el residuo no puede ser 3; 5 ó 6. En las claves solo aparece 3.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Entre dos cuadrados perfectos consecutivos hay 42 números enteros. Determine el mayor de los números que se encuentran entre dichos cuadrados perfectos.

A) 421 B) 432 C) 521
D) 483 E) 485

Resolución

Del enunciado, tenemos que:

$$K^2;\underbrace{\quad\ldots\quad}_{42\text{ números}};(K+1)^2$$

Entonces

$$[(K+1)^2-K^2]-1=42$$

$$2K+1=43$$

$$K=21$$

Piden el mayor de dichos 42 números:

$\therefore\ (K+1)^2-1=22^2-1=483$

Clave D

PROBLEMA N.° 37

Entre los cuadrados de un número de dos cifras y de su CA (que es menor que el número) hay 199 números enteros. Señale la suma de las cifras de dicho número.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Resolución

Por dato:

$$\underset{[CA(\overline{ab})]^2}{n};\ \underbrace{n+1;\ n+2;\ n+3;\ \ldots;\ n+199}_{199\text{ números}};\ \underset{\overline{ab}^2}{n+200}$$

Entonces

$$\overline{ab}^2=n+200 \qquad \text{(I)}$$

$$(100-\overline{ab})^2=n \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$100\times(2\times\overline{ab}-100)=200$$

$$\overline{ab}=51$$

$$a=5\ \wedge\ b=1$$

$\therefore\ a+b=6$

Clave C

PROBLEMA N.° 38

Si $35_{(x)}=\sqrt{\overline{aa41}_{(x)}}$, entonces, $a+x$ es

A) 15 B) 12 C) 9
D) 6 E) 8

Resolución

$$35_{(x)}=\sqrt{\overline{aa41}_{(x)}}$$

$$[35_{(x)}]^2=\overline{aa41}_{(x)};\quad x>5$$

$$(\overset{\circ}{x}+5)^2=\overset{\circ}{x}+1$$

$$\overset{\circ}{x}+25=\overset{\circ}{x}+1$$

$$24=\overset{\circ}{x}$$

$\rightarrow$ x es divisor de 24

$x\in\{6;\ 8;\ 12;\ 24\}$

- Si $x=6$

  $[35_{(6)}]^2=529=2241_{(6)}=\overline{aa41}_{(6)}$

  $\rightarrow\ a=2$

Análogamente se procede para x: 8; 12 y 24; en los tres casos, no cumple.

$\therefore\ a+x=8$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 39

Si $\overline{aecb}=\overline{cd}^2 \wedge \overline{cb}=(c+3)^2$,
además, $\overline{mnpq}=\overline{ac}^2+\overline{eb}^2$,
calcule $m+n+p+q$.

A) 13 B) 14
C) 16
D) 17 E) 18

Resolución

Analizando tenemos:

- $\overline{cb}=(c+3)^2$

16	1
25	2
36	3
49	4

- $\overline{aecb}=\overline{cd}^2$

Observación

$\overline{cd}^2 \geq 1000$

$\overline{cd} \geq 31...$

$c \geq 3$

Solo puede ser: $c=3$ ó $c=4$

Si $c=3$

entonces

$b=6 \wedge \overline{ae36}=\overline{3d}^2$

1156	4	No cumple
1296	6	No cumple

No hay solución.

Si $c=4$

entonces

$b=9 \wedge \overline{ae49}=\overline{4d}^2$

1849	3	Sí cumple
2401	9	No cumple

$a=1,\ e=8\ \text{y}\ d=3$

Como

$\overline{mnpq}=\underbrace{\overline{ac}^2}_{14^2}+\underbrace{\overline{eb}^2}_{89^2}$

$\overline{mnpq}=8117$

$\therefore\ 8+1+1+7=17$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Al calcular la raíz cuadrada de

$\overline{m(m+1)\left(\frac{m}{4}\right)np3}$

se obtuvo residuo máximo. Calcule $m\times n\times p$, si la raíz cuadrada por defecto que se obtiene es un número cuya cifra central es igual a la suma de sus cifras equidistantes.

A) 160 B) 120 C) 140
D) 158 E) 132

Resolución

Si $\overline{m(m+1)\left(\frac{m}{4}\right)np3} = K^2 + r_{\text{máx}}$, entonces:

$\overline{m(m+1)\left(\frac{m}{4}\right)np4} = (K+1)^2$

$\rightarrow$ m: 4 u 8 $\wedge$ $(K+1) = \ldots 2$ ó $\ldots 8$

- Con $m=4$

$\sqrt{\overline{45\,1n\,p4}}$	$672 = K+1$
36	$2(6)=12$
$91n$	$12\boxed{7}\times 7 = 889$
889	$2(67)=134$
$\square\square p4$	$134\boxed{2}\times 2 = 2684$
2684	
0	

$\rightarrow$ $p=8$ $\wedge$ $n=5$

$K=671$

Verifica que

$7=6+1$

$\therefore$ $m\times n\times p=160$

Nota

Para m=8, no cumple.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 41

Encuentre un número de 3 cifras consecutivas crecientes, tal que cuando se permutan sus 2 cifras de menor orden se obtiene un cuadrado perfecto. Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 21 C) 15
D) 12 E) 18

Resolución

Sea el número

$\overline{n(n+1)(n+2)}$, además, $n+2 < 10$
cifras de menor orden $n < 8$

Por dato, luego de permutarlas, tenemos:

$K^2 = \overline{n(n+2)(n+1)}$

Como la suma de cifras es $3(n+1)=\overset{\circ}{3}$

Si $K^2=\overset{\circ}{3}$, entonces $K^2=\overset{\circ}{9}$

Por el criterio del 9:

$3n+3=\overset{\circ}{9}$

$n+1=\overset{\circ}{3}$

$n \in \{2; 5; \underset{\times}{8}\}$

Si $n=2$:

$K^2=243$ (no es cuadrado)

Si $n=5$:

$K^2=576=24^2$

$\therefore$ $5+7+6=18$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 42

Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{abab0}$, se obtuvo un residuo máximo. Calcule $a+b$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Si $\overline{abab0}=n^2+r_{máx}$,

entonces

$\overline{abab1}=K^2$

$\overline{ab}\times 10^3+\overline{ab}\times 10+1=K^2$

$1010\times\overline{ab}=K^2-1$

$\underbrace{101}\times \underbrace{2\times 5\times \overline{ab}}_{40} = (K-1)(K+1)$

$\rightarrow\ K=201;\ a=4\ \wedge\ b=0$

$\therefore\ a+b=4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 43

Si $\overline{6abcd3}=N^3$, calcule $a+b+c+d+N$.

A) 101 B) 107 C) 104
D) 112 E) 105

Resolución

Del dato:

$\overline{6abcd3}=N^3$

$\underbrace{\overline{6abcd3}}_{\text{dos bloques de 3 cifras}} = (\underbrace{\overline{m\,n}}_{\text{dos cifras}})^3$

- Por la última cifra: $\overline{\ldots 3}=(\overline{\ldots n})^3$
  n^3 termina en la cifra 3, solo puede ser $7^3=343$; entonces, $n=7$.
- El primer bloque es $\sqrt[3]{\overline{6ab}} = m,\ldots$
  $m \rightarrow 8$

Tenemos

$m=8 \qquad \overline{6abcd3}=87^3\ \wedge\ N=87$

$n=7 \qquad abcd \rightarrow 658503$

$\therefore\ 5+8+5+0+87=105$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 44

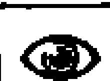
¿Cuántos numerales de tres cifras existen tal que, cuando se le resta la suma de sus cifras, nos da un cubo perfecto?

A) 24 B) 18 C) 20
D) 32 E) 28

Resolución

Del enunciado:

$\overline{abc}-(a+b+c)=K^3$

 **Observación**

Como c se cancela, entonces
$c\in\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 9\}$

Luego

$9(\underbrace{11\times a+b}_{99\text{ como mínimo}})=K^3=\overset{o}{9}$ (I)

($a\rightarrow 1$, $b\rightarrow 0$)

$K^3=\overset{o}{9}\ \rightarrow\ K=\overset{o}{3};\ \ K:\ 6\ \text{ó}\ 9$

En (I)

$K=6 \qquad 11a+b=24$

($a\rightarrow 2$, $b\rightarrow 2$)

$\rightarrow\ \overline{abc}\in\{220;\ 221;\ 222;\ \ldots\ ;\ 229\}$

$K=9 \qquad \underset{7\ \ 4}{11a+b=81}$

$\rightarrow\ \overline{abc} \in \{740; 741; 742; ... ; 749\}$

Por lo tanto, existen 20 numerales.

Clave C

PROBLEMA N.° 45

Halle el menor numeral $\overset{o}{11}$, tal que al extraerle su raíz cuadrada, queda 41 de residuo.

A) 759 B) 638 C) 770
D) 781 E) 946

Resolución

Por dato: $11K$ es mínimo

$\sqrt{11K}\ \underline{|\ a}$
$r=41$

Observación

$r \leq r_{\text{máximo}} \qquad 41 \leq 2a \rightarrow 20{,}5 \leq a$

$\underbrace{11K}_{\overset{o}{11}}=a^2+\underbrace{41}_{\overset{o}{11}+8}$

$a^2=\overset{o}{11}+3$

$a^2=\overset{o}{11}+\underbrace{3+22}$

$a^2=\overset{o}{11}+5^2$

$a=\overset{o}{11}\pm 5 \ \wedge\ a \geq 20{,}5$

El mínimo es $a=27$

$11K=27^2+41$

$\therefore\ 11K=770$

Clave C

PROBLEMA N.° 46

Halle el valor de a, si $\overline{(a-1)(a+1)(a+1)a(a+1)}$ es cuadrado y cubo perfecto a la vez.

A) 5 B) 4 C) 8
D) 6 E) 3

Resolución

Se tiene que

$\overline{(a-1)(a+1)(a+1)a(a+1)} = \begin{cases} K^2 \\ n^3 \end{cases}$

Observamos que:

$(a-1) > 0 \rightarrow a > 1$

$(a+1) < 10 \rightarrow a < 9$

$a \in \{2; 3; 4; ... ; 8\}$

Por la última cifra de un cuadrado perfecto, los posibles valores de a son:

$\overline{(a-1)(a+1)(a+1)a(a+1)}=K^2$

(última cifra $a+1$) $\downarrow$ 3, 4, 5, 8

Analizamos cada caso:

$a=3 \rightarrow K^2=...34=\overset{o}{4}+2$ No cumple

$a=4 \rightarrow K^2=...45$ No cumple

$a=5 \rightarrow K^2=...56=\overset{o}{4}$ Sí cumple

$a=8 \rightarrow K^2=...989=\overset{o}{8}+5$ No cumple

$\therefore\ a=5$

Nota

El número verifica ser también cubo perfecto.

Clave A

PROBLEMA N.° 47

Si $\overline{aba}^2=\overline{acdca}$ y $\overline{bad}=K^3$,
calcule $a+b+c+d$..

A) 16 B) 14 C) 15
D) 12 E) 13

Resolución

Por ser cuadrado perfecto, puede terminar en $a\in\{1; 4; 5; 6; 9\}$.

Por dato:

$\overline{bad}=K^3$

125	5^3	$a=2$	$\rightarrow$ No		
216	6^3	$a=1$	$b=2$	$d=6$	(I)
343	7^3	$a=4$	$b=3$	$d=3$	(II)
512	8^3	$a=1$	$b=5$	$d=2$	(III)
729	9^3	$a=2$	$\rightarrow$ No		

Reemplazando en la expresión

$\overline{aba}^2=\overline{acdca}$

De (I)	121^2	14641	(sí)
De (II)	434^2	188356	(no)
De (III)	151^2	22801	(no)

$\therefore\ 1+2+4+6=13$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 48

Si $\overline{aa}^2=\overline{bbcc}$, calcule $a+b+c$.

A) 17 B) 18 C) 16
D) 19 E) 15

Resolución

Del dato:

$\overline{bbcc}=\overline{aa}^2$

Analizamos el cuadrado perfecto, según su última cifra:

$c=0 \rightarrow \overline{bb}$ debe ser K^2 No cumple

$c=1 \rightarrow \overline{aa}^2=\overset{\circ}{4}+3$ No cumple

$c=4 \rightarrow \overline{aa}^2=\overset{\circ}{4}$ Sí cumple

$c=5 \rightarrow \overline{aa}^2=...55$ No cumple

$c=6 \rightarrow \overline{aa}^2=\overset{\circ}{4}+2$ No cumple

$c=9 \rightarrow \overline{aa}^2=\overset{\circ}{4}+3$ No cumple

$\rightarrow c=4$

Luego

$\overline{bb44}=\overline{aa}^2=$ 22^2 No cumple; 88^2 Sí cumple

$\overline{bb44}=7744$

$\rightarrow a=8 \wedge b=7$

$\therefore\ a+b+c=19$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 49

Halle el número $\overline{abcd}$, si se sabe que al extraer su raíz cúbica, se obtuvo $\overline{ad}$ de raíz y 190 de residuo, y que todas las cifras son diferentes de cero. Indique la segunda cifra.

A) 1 B) 5 C) 2
D) 3 E) 0

Resolución

Por dato:

a, b, c y d son diferentes de cero.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{\overline{abcd}} & \overline{ad} \\ r=190 & \end{array}$$

$$\overline{abcd}=\overline{ad}^2+190$$

Observación

$\sqrt[3]{a}=a,...\ \rightarrow\ a=1$
$\downarrow$
1

Reemplazamos $a=1$

$$\underbrace{\overline{1bcd}}_{...d}=\underbrace{\overline{1d}}_{...d}{}^3+\underbrace{190}_{...0} \qquad \text{(I)}$$

$$\overline{1d}^3<2000$$

$$\overline{1d}<12,...$$

$$\rightarrow\ \overline{1d}=11$$

Reemplazando en (I)

$$\overline{1bcd}=11^3+190$$

$$\overline{1bcd}=1521$$

$$b=5;\ \ c=2\ \text{ y }\ d=1$$

Por lo tanto, la segunda cifra es 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

Al extraer la raíz cúbica de $\overline{abc}$, se obtienen K de raíz y 37 de residuo. Al extraer la raíz cúbica de $\overline{cba}$, se obtienen $(K+1)$ de raíz y 45 de residuo. Halle $a+b+c$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

Del enunciado:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{abc}=K^3+37\\ \overline{cba}=(K+1)^3+45\end{array}\right\}(-)$$

$$99(c-a)=3K^2+3K+9$$

$$\rightarrow\ 3K(K+1)=\overset{o}{99}+90$$

$$K(K+1)=\overset{o}{33}+30$$

Observación

$(K+1)<10\ \rightarrow\ K<9$

$$K(K+1)=30$$

$$\rightarrow\ K=5$$

Reemplazamos

$$\overline{abc}=5^3+37=162$$

$$\overline{cba}=6^3+45=261$$

$$\rightarrow\ a=1;\ b=6\ \wedge\ c=2$$

$$\therefore\ a+b+c=9$$

Clave **C**

Capítulo

11

Números racionales Q

Con el manejo de los conjuntos numéricos y las operaciones entre números observamos que la aparición de cada conjunto numérico es un proceso para poder definir bien cada operación matemática (ley de clausura o cerradura). Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales la operación de adición cumple con la ley de clausura, porque la suma de dos números naturales siempre es un número natural; pero para la sustracción, este conjunto no es suficiente porque podría salir negativo, entonces se amplía el conjunto de los naturales al conjunto de los números enteros. Al efectuar la adición, sustracción y multiplicación de dos números enteros siempre obtenemos otro número entero, pero al dividir no siempre es entero; entonces, ¿qué número es? Para definir la división de números enteros creamos el conjunto de los números racionales, como una ampliación del conjunto de los números enteros.

Los números racionales son los que se obtienen de dividir a dos números enteros a y b (b diferente de 0); asimismo, existen números que no cumplen esta característica, por ejemplo el lado y la diagonal de un cuadrado; a estos números los llamamos irracionales, y están contenidos en los números reales.

Capítulo 11

Números racionales (Q)

PROBLEMA N.° 1

Halle la última cifra del desarrollo decimal de

$$f=\frac{4000\times 2^{19}}{5^{313}\times 32}.$$

A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

Resolución

Simplificando, nos queda

$$f=\frac{2^{19}}{5^{310}}=0,\underbrace{\overline{.....x}}_{310\,\text{cifras}}$$

En su fracción generatriz, tenemos:

$$\frac{2^{19}}{5^{310}}=\frac{\overline{.....x}}{10^{310}};\ 10^{310}=2^{310}\times 5^{310}$$

Simplificando y analizando la última cifra

$$2^{329}=\overline{...x}$$

utilizamos $2^4=16$, porque toda potencia de 16 termina en cifra 6; al dividir 329 entre 4, tenemos $329=4\times 82+1$

$$\underbrace{\underbrace{(2^4)}_{16}{}^{82}}_{..6}\times\underbrace{2}_{\times 2}=\overline{...x}\ \downarrow\ 2$$

$x=2$

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Si $A=[a;\bar{b}]$ y $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$, halle A^4. Considere además que $a<b$.

A) 2 B) 4
C) 16
D) 9 E) 25

Resolución

Se tiene que $a<b$, y

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2},$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}\rightarrow a=1\ \wedge\ b=2$$

Además

$$A=[a;\bar{b}]=[1;\bar{2}]$$

> **Teorema**
> Si $p\in\mathbb{Z}^+$, entonces $\sqrt{p^2+1}=[p;(\overline{2p})]$

Si $p=1$,

entonces, $A=\sqrt{2}$

$\therefore\ A^4=(\sqrt{2})^4=4$

Clave B

PROBLEMA N.° 3

María Alejandra tiene M soles, pero jugando ajedrez pierde los 3/10 de lo que no pierde. Luego juega ludo y recupera 3/17 de lo que le quedaba, con lo que se percata de que si ganara S/.63 más, habría recuperado todo lo perdido. Halle M.

A) S/.663 B) S/.660
C) S/.442
D) S/.440 E) S/.450

Resolución

En el primer juego

$$\text{Pierde}=\frac{3}{10}\ (\text{No pierde})$$

$$\frac{\text{Pierde}}{\text{No pierde}}=\frac{3}{10}$$

Por cada 3 soles que pierde, le quedan 10 soles, es decir, no pierde como 10 soles, entonces, al iniciar tenía 3+10=13 soles.

Entonces pierde los $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$ de lo que tenía

Del dato, tenemos:

$$M\times\underbrace{\left(1-\frac{3}{13}\right)}_{\substack{\text{perdió}\\ 3/13}}\underbrace{\left(1+\frac{3}{17}\right)}_{\substack{\text{de lo que}\\ \text{queda, recupera}\\ \text{sus } 3/17}}+63=M$$

$$M\times\frac{10}{13}\times\frac{20}{17}+63=M \rightarrow M=663$$

Por lo tanto, el valor de M es 663.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

El número racional $\frac{b^2}{\overline{ab}}$, cuyos términos son PESI y su diferencia es 4, genera la fracción continua $[0; m, (2m), p]$. Calcule la cifra de orden −16 que genera la fracción a/b en base 5.

A) 2 B) 4 C) 0
D) 1 E) 3

Resolución

Si

$$\frac{b^2}{\overline{ab}}=[0; m, (2m), p] \rightarrow b^2<\overline{ab}$$

Además

$$\overline{ab}-b^2=4 \ \wedge \ b^2 \text{ y } \overline{ab} \text{ son PESI}$$

$$\underbrace{10\underset{1}{a}-4}_{\dots 6}=\underset{3}{b}(b-1)$$

$$\rightarrow b^2=9 \ \wedge \ \overline{ab}=13$$

Nos piden expresar $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$ en base 5

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{8}{8}=\frac{8}{24}=\frac{13_{(5)}}{44_{(5)}}=0,\widehat{13}_{(5)}$$

Entonces:

orden →	−1	−2	−3	−4	
$\frac{1}{3}$ = 0,	1	3	1	3	...(5)

Se observa que la cifra que corresponde a un orden par negativo es 3.

Por lo tanto, la cifra de orden (−16) es 3.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de la clase de equivalencia [3/8] no es parte de una recta.

II. La representación de un número irracional mediante fracciones continuas simples posee finitos términos.

III. Si $\sqrt{\overline{ab}}=[6;\overline{1,12}]$, entonces, $a+b=12$.

A) FFF B) FFV C) VVV
D) FVF E) FVV

Resolución

I. **Falsa**
La gráfica de $\left[\frac{3}{8}\right]$ se obtiene de los pares ordenados.

$$\left[\frac{3}{8}\right]=\{...;(-3;-8);(3;8);(6;16);(9;24);...\}$$

Todos los pares ordenados son parte de una recta.

II. **Falsa**
Toda fracción continua simple infinita se obtiene de un número irracional.

III. **Verdadera**

$$\sqrt{\overline{ab}}=[6;\overline{1,12}]$$

Por propiedad

$$\underbrace{\sqrt{K^2-1}}_{7^2-1}=[\underbrace{K-1}_{6};\overline{1,\underbrace{2(K-1)}_{12}}]$$

$\overline{ab}=48$

$\therefore\ a+b=12$

Por lo tanto, sus valores de verdad son FFV.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Si

$$\frac{101}{15\,873}=0,\widehat{...abcd}$$

además, $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{bd}}=[e,f,g,h]$

halle $e+f+g+h$.

A) 20 B) 24
C) 25
D) 27 E) 36

Resolución

$$\frac{101}{15\,873}=0,\widehat{...abcd}=\frac{\overline{...abcd}}{9...9999}$$

$15\,873$ es irreductible

$$\underbrace{101(9...9999)}_{...9899}=15873\cdot(\overline{...abcd})$$

$$\begin{array}{r} \overline{...a\ b\ c\ d}\ \times \\ 1\,5\,8\,7\,3 \\ \hline ...9\,0\,8\,9 \\ ...5\,4\,1 \\ ...0\,4 \\ ...5 \\ \hline ...9\,8\,9\,9 \end{array}$$

Entonces

$3d=...9;\quad d=3$

$3c=...8;\quad c=6$

$3b+1=...0;\quad b=3$

$3a+1=...9;\quad a=6$

Luego, $\overline{abc}=636\ \wedge\ \overline{bd}=33$

Representamos $\frac{636}{33}$ como F.C.S.

	19	3	1	2
636	33	9	6	3
	9	6	3	0

$$\frac{636}{33}=[19;3;1;2]=[e,f,g,h]$$

$\therefore\ e+f+g+h=25$

Clave **C**

Como $m+n=11\ \rightarrow\ m=1$
$n=10$

Se consideraron los 10 primeros números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

La suma de cifras del último primo es
$2+9=11$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Al sumar las inversas de los n primeros números primos, se encuentra un número decimal que posee m cifras no periódicas. Si $m+n=11$, calcule la suma de cifras del último número primo considerado.

A) 11 B) 9 C) 8
D) 12 E) 16

Resolución

Por dato

- Se consideran los n primeros números primos

$$\underbrace{2;\ 3;\ 5;...}_{n\text{ números primos}}$$

- Se suman las inversas de estos números primos

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...}_{n\text{ números}}=0,\underbrace{\overline{\quad\quad}}_{\substack{m\\\text{cifras}}}\overset{\frown}{\quad\quad}$$

$$\frac{K}{2^1\times3\times5^1...}=0,\underbrace{\overline{\quad\quad}}_{\substack{m\\\text{cifras}}}\overset{\frown}{\quad\quad}$$

Con 2 y 5 solo genera 1 cifra no periódica.
$\rightarrow\ m=1$

PROBLEMA N.° 8

Calcule la suma de cifras de orden −1; −3; −5; al expresar $\frac{a-3}{2a-5}$ como número decimal. Se sabe que

$$\frac{a-2}{a+1}=\frac{3}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\frac{2}{a^4}+...$$

A) 15 B) 20 C) 18
D) 14 E) 19

Resolución

Del dato:

$$\frac{a-2}{a+1}=\frac{3}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\frac{2}{a^4}+...$$

$$\frac{a-2}{a+1}=0,\widehat{32}_{(a)}$$

$$\frac{a-2}{a+1}=\frac{32_{(a)}}{a^2-1}=\frac{3a+2}{(a-1)(a+1)}$$

$$(a-1)(a-2)=3a+2\ \rightarrow\ a=6$$

Luego

$$\frac{a-3}{2a-5}=\frac{3}{7}\times\frac{3^3\times11\times13\times37}{3^3\times11\times13\times37}=\frac{428\,571}{999\,999}$$

Entonces

$$\frac{a-3}{2a-5}=0,\overset{\frown}{428571}$$

orden: −1 −3 −5

$\therefore\ 4+8+7=19$

Clave **E**

Simplificando

$$f=\frac{2^3}{7^{11}\times\ldots}\ \Big\}\ \text{Tendrá 11 cifras no periódicas en base 7.}$$

Por lo tanto, origina 11 cifras no periódicas en base 7.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

Determine la cantidad de cifras en la parte no periódica del heptaval mixto que origina la fracción $f=\frac{56}{84!-81!}$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 13

Resolución

La cantidad de cifras no periódicas en base 7, es el exponente de 7 en la D.C. del denominador de la fracción irreductible.

$$f=\frac{56}{84!-81!}\ \rightarrow\ f=\frac{7\times2^3}{81!\ \underbrace{(84\times83\times82-1)}_{\neq\overset{o}{7}}}$$

Por divisiones sucesivas determinamos el exponente de 7 en la D.C. de 81!

$$\begin{array}{l} 81\ \underline{|\ 7} \\ \quad (11)\ \underline{|\ 7} \\ \qquad\quad (1) \end{array}$$

$\alpha=11+1$

$\alpha=12\ \rightarrow\ 81!=7^{12}\times\ldots$ D.C.

Tenemos

$$f=\frac{7\times2^3}{7^{12}\times\ldots}\ \text{c}$$

PROBLEMA N.° 10

Halle la última cifra del periodo de un decimal que es generado por

$$f=\frac{\overline{ab7}^{39}}{\overline{ba3}^{75}}$$

Se sabe que es propia e irreductible.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

Resolución

Según el dato:

$$f=\frac{\overline{ab7}^{39}}{\overline{ba3}^{75}}=0,\overset{\frown}{n\ldots x}=\frac{\overline{n\ldots x}}{9\ldots9}$$

$$\overline{ab7}^{39}\times(9\ldots9)=\overline{ba3}^{75}\times\overline{n\ldots x}\qquad\text{(I)}$$

Analizamos los restos potenciales para:

- $\overline{ab7}^{39}=\overset{o}{10}+7^{39}$

$$\left.\begin{array}{l} 7^0=\overset{o}{10}+1 \\ 7^1=\overset{o}{10}+7 \\ 7^2=\overset{o}{10}+9 \\ 7^3=\overset{o}{10}+3 \end{array}\right\}\ \text{gaussiano}=4 \quad \rightarrow\ 39=\overset{o}{4}+3$$

$7^4=\overset{o}{10}+1$

$\vdots$

$$\therefore\ \overline{ab7}^{39}=\overset{o}{10}+3=\ldots3$$

- $\overline{ba3}^{75}=\overset{o}{10}+3^{75}$

$$\left.\begin{aligned} 3^0 &= \overset{o}{10}+1\\ 3^1 &= \overset{o}{10}+3\\ 3^2 &= \overset{o}{10}+9\\ 3^3 &= \overset{o}{10}+7 \end{aligned}\right\} \text{gaussiano}=4 \quad \rightarrow \quad 75=\overset{o}{4}+3$$

$$3^4 = \overset{o}{10}+1$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ \overline{ba3}^{75}=\overset{o}{10}+7=...7$$

Reemplazamos en (I)

$$\underbrace{(...3)(9...9)}_{...7}=(...7)\times\overline{n...\underset{\downarrow}{x}}$$
$$x = 1$$

Por lo tanto, la última cifra del periodo es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 11

Si $0,\widehat{n}_{(4)}+0,0\widehat{n}_{(7)}=\dfrac{17}{\overline{1(2n)}}$,

halle la parte entera del desarrollo de

$$E=n^2+\frac{17^2}{\overline{1(2n)}}.$$

A) 26 B) 21
C) 23
D) 27 E) 28

Resolución

Del dato

$$0,\widehat{n}_{(4)}+0,0\widehat{n}_{(7)}=\frac{17}{\overline{1(2n)}}$$

Expresamos su fracción generatriz

$$\frac{n}{3_{(4)}}+\frac{n}{66_{(7)}}=\frac{17}{\overline{1(2n)}}$$

$$\frac{17\times n}{48}=\frac{17}{\overline{1(2n)}}$$

$$\underset{\downarrow}{n}\times\underbrace{\overline{1(2n)}}=48$$
$$3 \quad 16$$

$$n=3$$

Reemplazamos en E

$$E=3^2+\frac{17^2}{16}$$

$$E=\underbrace{\underline{27};0625}$$

Por lo tanto, la parte entera es 27.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

Un contratista realiza una obra con 1/19 de rebaja en el presupuesto, y para el pago de planilla de los obreros destina 7/11 de lo que él ha de cobrar, además, paga con los 2/37 de lo que le quedaba un seguro de vida. ¿De cuánto era el presupuesto inicial, si después de realizar todos sus gastos le quedan S/.2520?

A) S/.3377
B) S/.7373
C) S/.7733
D) S/.7337
E) S/.7007

Resolución

Sea P el presupuesto inicial; planteamos con lo que le queda al final:

$$\frac{35}{37}\times\frac{4}{11}\times\frac{18}{19}\times P=2520$$

$\frac{4}{11}\times\frac{18}{19}$: Después de la rebaja <> a lo que cobra

$\frac{35}{37}$: Después de pagar la planilla

$\therefore\;\; P=S/.7733$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

Se deja derretir tres pedazos de hielo, tales que el volumen del segundo es los 4/11 del volumen del primero y 6/13 del tercero. Si se sabe que la diferencia entre los volúmenes del primero y tercero de los trozos es 231 cm^3, y que el agua se dilata 1/10 de su volumen al pasar del estado líquido al estado sólido, ¿cuántos centímetros cúbicos de agua se obtienen en esta operación?

A) 1200 cm^3 B) 1120 cm^3
C) 2343 cm^3
D) 1000 cm^3 E) 2130 cm^3

Resolución

De los datos tenemos:

$$V_2=\frac{4}{11}V_1=\frac{6}{13}V_3$$

$$\frac{V_2}{12}=\frac{4V_1}{11\times12}=\frac{6V_3}{13\times12}$$

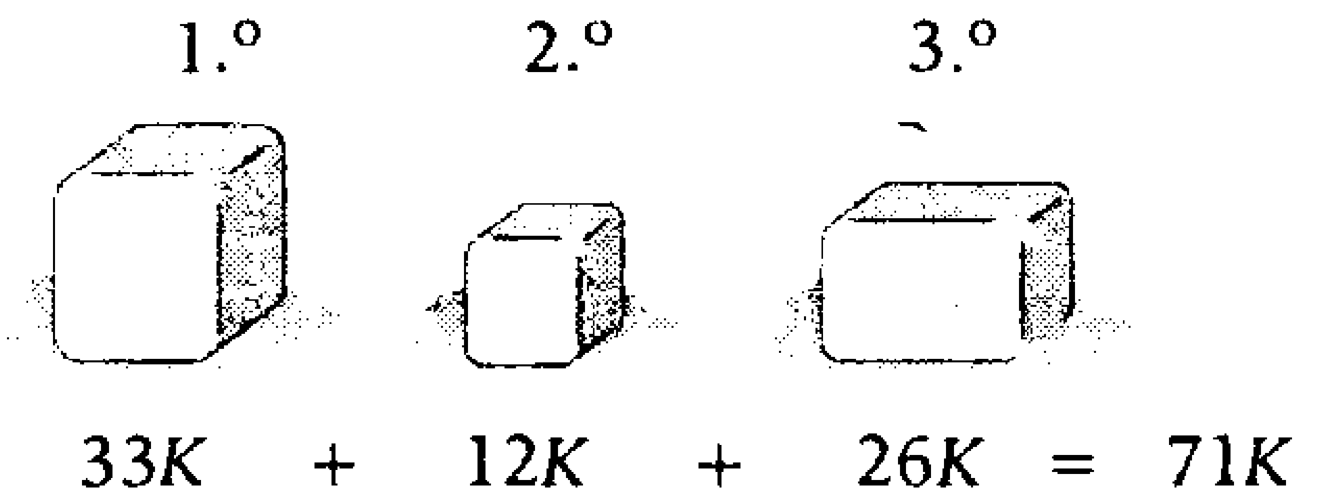
$$\frac{V_2}{12}=\frac{V_1}{33}=\frac{V_3}{26}=K$$

Entonces

$V_2=12K$

$V_1=33K$

$V_3=26K$



$33K + 12K + 26K = 71K$

Por dato

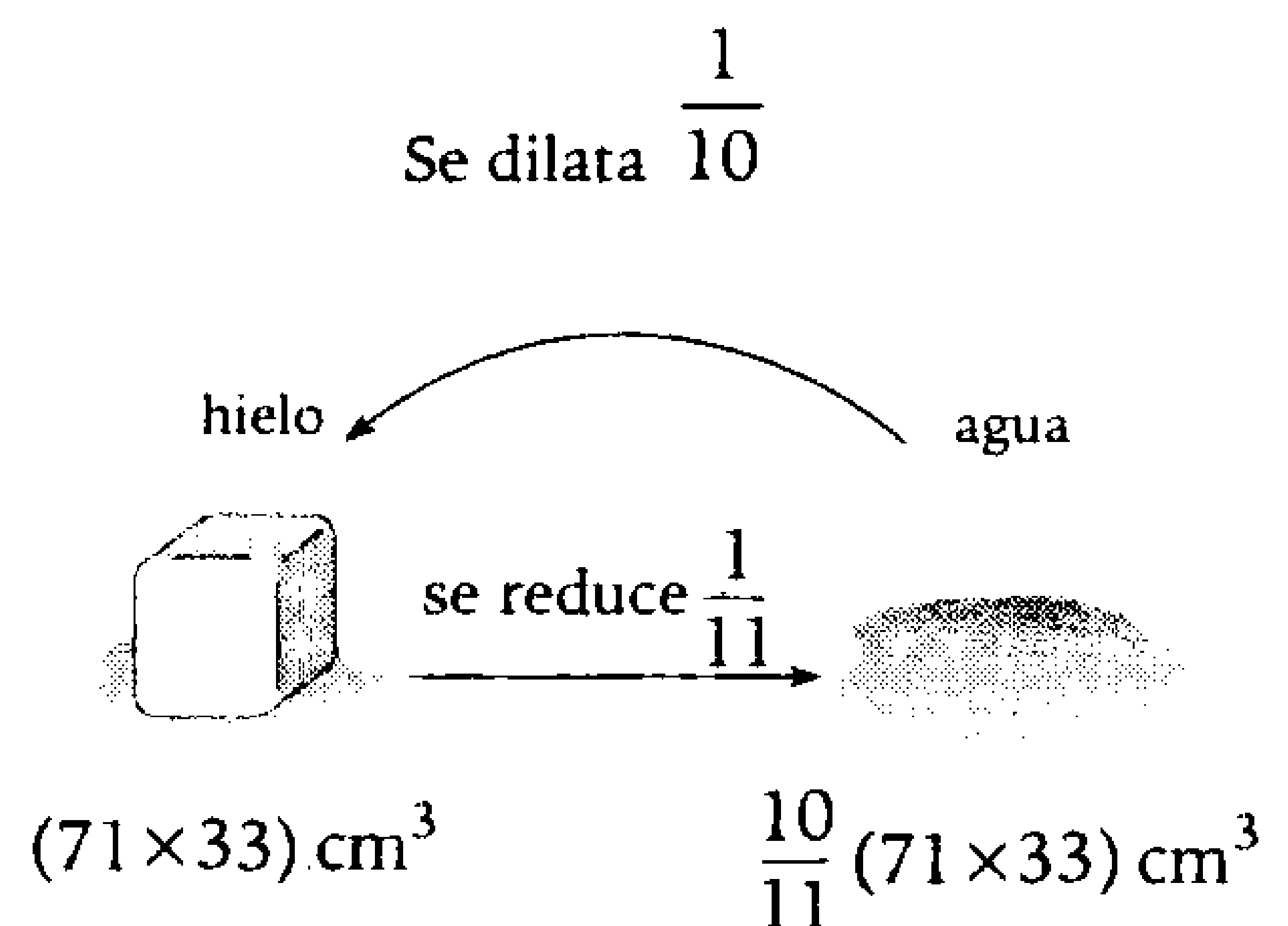
$33K-26K=231\text{ cm}^3$

$K=33\text{ cm}^3$

En total tiene $(71\times33)\text{m}^3$

Observación

- De agua a hielo, el volumen se dilata (aumenta) en 1/10; si el agua tiene un volumen 10 entonces aumenta en 1, el volumen de hielo será 11.
- De hielo a agua, el volumen se comprime en 1/11; el agua será los 10/11 del volumen de hielo.



Por lo tanto, se obtienen 2130 cm^3 de agua.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 14

Al dividir una herencia en dos partes, resulta que la diferencia entre los 4/5 de los 3/8 de la cantidad mayor menos los 5/12 de los 4/7 de la cantidad menor es igual a 1/3 de la cantidad menor. Si la herencia total es S/.30 500, ¿cuál es la diferencia de las partes?

A) S/.19 500 B) S/.9500
C) S/.9580
D) S/.9150 E) S/.7200

Resolución

Del enunciado

Herencia=S/.30 500=$a+b$; $a>b$

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}\times a-\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}\times b=\frac{1}{3}\times b$$

Entonces

$$\left.\frac{a}{b}=\frac{40}{21}\right\}\begin{array}{l}a=40K\\ b=21K\end{array}$$

$a+b$=S/.30 500

$61K$=S/.30 500

K=S/.500

$\therefore$ $a-b=19K$=S/.9500

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

Se cumple que $\frac{a}{b}=0,\widehat{bcdefa}$.

Calcule $25M\times\frac{1}{29}N$, si se sabe que

$$M=a+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}} \quad \text{y} \quad N=b+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}$$

A) $\frac{25}{149}$ B) $\frac{149}{25}$ C) $\frac{149}{29}$

D) $\frac{635}{17}$ E) $\frac{17}{149}$

Resolución

Si $\frac{a}{b}=0,\widehat{bcdefa}$

Se observa que b es una cifra de la parte periódica y también es el denominador ($b<10$), su fracción generatriz será

$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{bcdefa}}{\underbrace{3^3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}_{999\,999}}$$

b es un factor de 999 999

$b\in\{\underset{\text{no}}{3};\ \underset{\text{sí}}{7}\}$ $\rightarrow$ $b=7$ si genera 6 cifras periódicas

Reemplazando nos queda

$$a\cdot3^3\cdot11\cdot13\cdot37=\overline{7cdefa}$$

$$a\times142857=\overline{7\,c\,d\,e\,f\,a}$$

$a \downarrow 5$ $\qquad$ $\downarrow$ 714285

Se tiene: $a=5$, $c=1$, $d=4$, $e=2$, $f=8$

Reemplazamos en M y N

- $M=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}$ y
- $N=7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}$

$M=\frac{29}{5}$ $\qquad$ $N=\frac{127}{17}$

Nos piden

$$25\times M\times\frac{1}{29}\times N=25\times\left(\frac{29}{5}\right)\times\frac{1}{29}\left(\frac{127}{17}\right)$$

$$25\times M\times\frac{1}{29}\times N=\frac{635}{17}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

Si $\frac{31}{29}=m,\widehat{ab...xy}$,

halle $a+b+x+y+m$.

A) 13　　B) 14　　C) 15
D) 16　　E) 17

Resolución

Del dato:

$$\frac{31}{29}=m,\widehat{ab...xy}$$

$$\begin{array}{l|l} 31 & \underline{29} \\ 2\times 10 & 1{,}06... \\ 20\times 10 & \\ 26 & \\ \vdots & \end{array}$$

Entonces

$m=1,\ a=0\ \wedge\ b=6$

Luego

$$\frac{31}{29}=1,\widehat{06...xy},\ \text{restando 1}$$

$$\frac{2}{29}=0,\widehat{06...xy}=\frac{\overline{6...xy}}{99...99}$$

$$\underbrace{2(99...99)}_{...98}=29\times\overline{6...xy}$$

$$\begin{array}{r} \overline{6...xy}\ \times \\ 29 \\ \hline ...58 \\ ...4 \\ \hline ...98 \end{array}$$

Tenemos:

$9y=...8\ \rightarrow\ y=2$

$9x+1=...5\ \rightarrow\ x=6$

$\therefore\ a+b+x+y+m=15$

Clave **C**

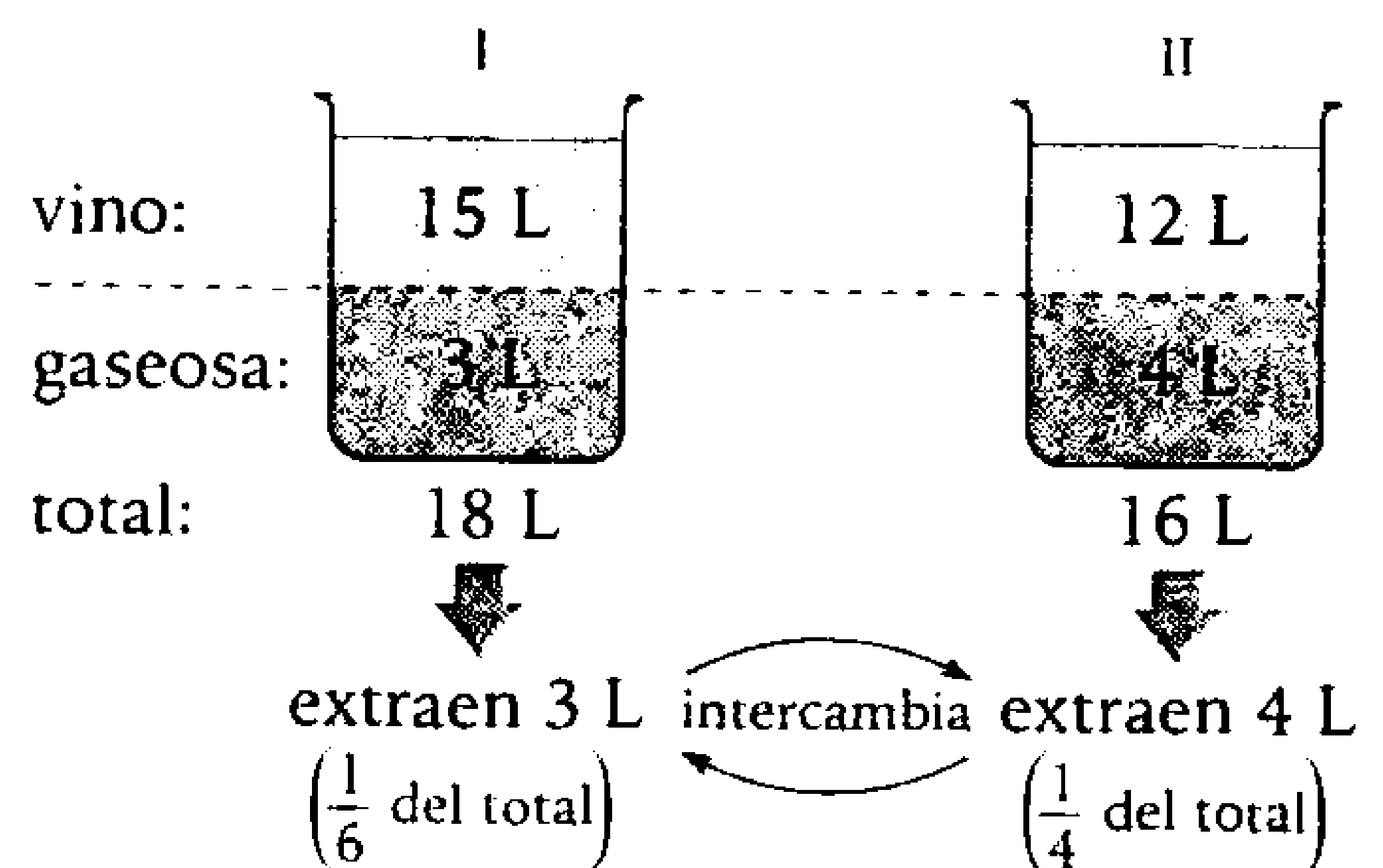
PROBLEMA N.° 17

En un recipiente se tienen 15 litros de vino y 3 litros de gaseosa, mientras que en otro hay 12 litros de vino y 4 de gaseosa. Si se extraen simultáneamente 3 litros del primero y 4 litros del segundo, intercambiándose luego de ello, ¿cuánto de vino se tendrá en el primer recipiente?

A) 43/3 L　　B) 31/2 L
C) 37/3 L
D) 27/2 L　　E) 41/3 L

Resolución

Se tiene



En (I) el volumen de vino que tendrá es

$$15\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+12\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{31}{2}\ \text{L}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Determine la suma de valores de $\frac{a}{\overline{bd}}$, si se cumple que $\frac{\overline{bdd}}{\overline{abdd}}=\frac{1}{\overline{mn}}$.

Considere que $\sqrt{15}=[3;\overline{m,n}]$

A) 2/3
B) 3/20
C) 9/20
D) 3/2
E) 20/9

Resolución

Si

$\sqrt{15}=[3;\overline{m,n}]$;

$15=4^2-1$

Teorema
Si $p\in\mathbb{Z}^+$, entonces, $\sqrt{p^2-1}=[(p-1);\overline{1,2(p-1)}]$

$\sqrt{15}=[3;\overline{1,6}]$ $\rightarrow$ $m=1$ $\wedge$ $n=6$

Además

$$\frac{\overline{bdd}}{\overline{abdd}}=\frac{1}{\overline{mn}}=\frac{1}{16}$$

$16\times\overline{bdd}=a\times10^3+\overline{bdd}$

$3\times\overline{bdd}=200\times a$

$\overline{bdd}$	a
200	3
400	6
600	9

Piden la suma de valores de $\frac{a}{\overline{bd}}$

$$\therefore\ \frac{3}{20}+\frac{6}{40}+\frac{9}{60}=\frac{9}{20}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 19

Sean $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ primos absolutos, además, $\overline{bc}-\overline{ab}=34$. Si $\frac{\overline{ab}}{\overline{mbc}}=0,\widehat{de(3m)fg}$, calcule $a+b+c+d+e+f+g+m$.

A) 20
B) 21
C) 22
D) 24
E) 25

Resolución

Como $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ son números primos impares, entonces b y c son impares. ($b\neq5$)

$$\begin{array}{r} \overline{bc}\ - \\ \overline{ab} \\ \hline 34 \end{array}$$

Al restar, se presentan dos casos:

- Si se resta sin prestar

  $c-b=4$ $\wedge$ $b-a=3$
  ↓ ↓ ↓ ↓
  9 5 5 2 → No cumple

- Si se resta prestando

  $10+c-b=4$ $\wedge$ $b-1-a=3$
  $b-c=6$ $\quad$ $b-a=4$
  ↓ ↓ ↓ ↓
  7 1 7 3 → Sí cumple
  9 3 9 5 → No cumple

Los valores que cumplen son

$a=3;\ b=7;\ c=1$

Reemplazamos

$$\frac{37}{\overline{\overline{m71}}} = 0,\widehat{de(3m)fg}$$

$$\frac{37}{\overline{\overline{m71}}} = \frac{\overline{de(3m)fg}}{\boxed{99999}}$$

$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$

Como $\overline{m71} = 271$

Entonces, $13653 = \overline{de(3m)fg}$

$m=2,\ d=1,\ e=3,\ f=5,\ g=3$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f+g+m=25$

Clave E

PROBLEMA N.° 20

Si $0,272727... = \frac{\overline{mn}}{\overline{pqr}}$ y a representa el número de valores que toma el numeral $\overline{mn}$, calcule el exceso de los 3/4 de los 5/8 de a sobre los 5/6 de los 3/8 de $(a-4)$.

A) 3 B) 4
C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Sea

$$\frac{\overline{mn}}{\overline{pqr}} = 0,272\,727... = 0,\widehat{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$\rightarrow\ \overline{mn} = 3K\ \wedge\ \overline{pqr} = 11K$

$K \in \underbrace{\{10;\ 11;\ 12;\ ...\ ;\ 33\}}_{\text{24 valores}}$

Entonces

$a=24$

Piden

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times a - \frac{5}{6} \times \frac{3}{8} \times (a-4) = 5$$

Por lo tanto, el exceso es 5.

Clave C

PROBLEMA N.° 21

De un tonel lleno de vino se extraen 2/5 de lo que no se extrae y se llena de agua. Si esta operación se repite tres veces, ¿qué fracción del volumen de agua es el volumen de vino al final?

A) $\frac{170}{218}$ B) $\frac{31}{41}$

C) $\frac{43}{31}$

D) $\frac{125}{218}$ E) $\frac{173}{281}$

Resolución

Analizamos la primera extracción

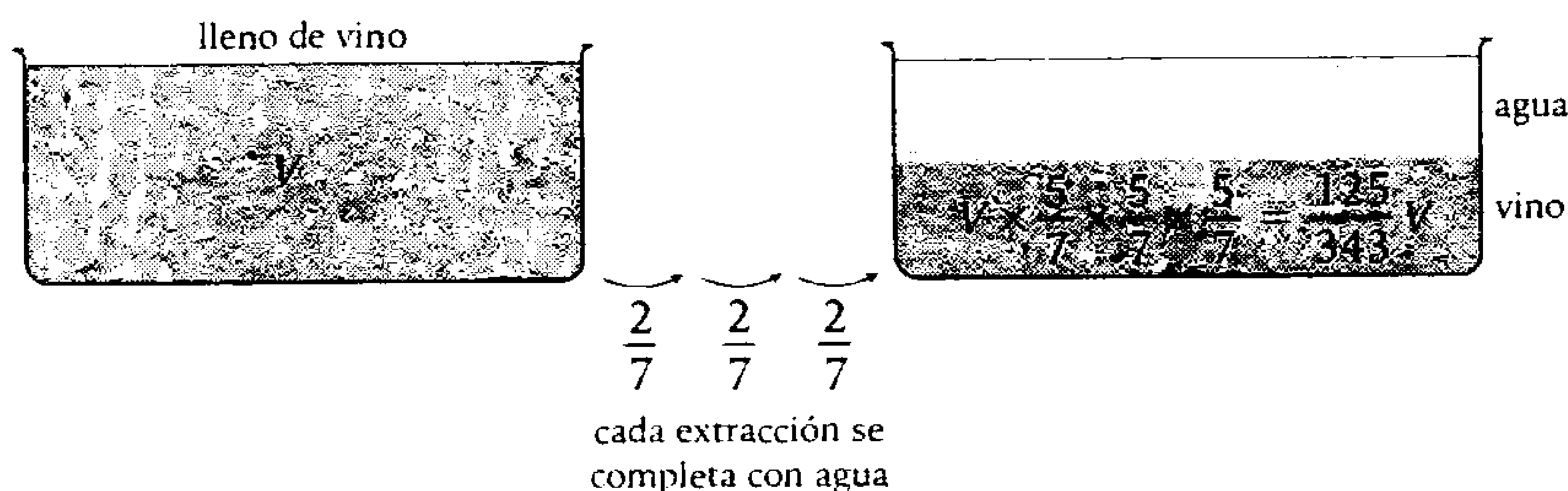
$$(\text{Extrae}) = \frac{2}{5}\ (\text{no se extrae})$$

$$\frac{\text{extrae}}{\text{no se extrae}} = \frac{2}{5}$$

por cada 2 que se extraen son 5 que no se extraen, entonces el total era como 7.

Entonces, extrae $\frac{2}{7}$ del total.

En cada extracción queda $\frac{5}{7}$ del total.



Queda de vino: $\frac{125}{343}V$

Piden la relación entre volumen de vino y agua al final $\dfrac{\frac{125}{343}V}{\frac{218}{343}V}=\frac{125}{218}$

Total de agua al final es $V-\frac{125V}{343}=\frac{218V}{343}$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 22

Se tienen tres planchas de fierro de superficies en m²: $\frac{1334}{560}$; $\frac{874}{280}$ y $\frac{1173}{90}$. Si se desea dividir estas planchas en piezas rectangulares, todas de igual área, cuyo ancho sea $\frac{92}{210}$ m, calcule el total de piezas obtenidas, si esta cantidad tiene que ser la menor posible y no debe sobrar material.

A) 581
B) 723
C) 677
D) 621
E) 743

Resolución

Sea

$$\text{N.° piezas rectangulares}=\frac{\textbf{área de la plancha}}{\text{área de la pieza}}$$

Sea L m, el largo de cada pieza rectangular, tenemos el número de piezas rectangulares que se obtiene de cada plancha:

1.ª ↓ 2.ª ↓ 3.ª ↓

$$a=\frac{\frac{1334}{560}}{\left(\frac{92}{210}\times L\right)};\ b=\frac{\frac{874}{280}}{\left(\frac{92}{210}\times L\right)};\ c=\frac{\frac{1173}{90}}{\left(\frac{92}{210}\times L\right)}$$

$$a=\frac{\left(\frac{87}{16}\right)}{L};\qquad b=\frac{\left(\frac{57}{8}\right)}{L};\qquad c=\frac{\left(\frac{119}{4}\right)}{L}$$

Se observa que L debe ser un divisor común de $\frac{87}{16}; \frac{57}{8}; \frac{119}{4}$; y como el total de piezas es lo menor posible, entonces L debe ser máxima.

Propiedad
Sean las fracciones irreductibles
$\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, se cumple

$$\text{MCD}\left[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}\right] = \frac{\text{MCD}\ (a; c; e)}{\text{MCM}\ (b; d; f)}$$

Luego

$$L = \text{MCD}\left[\frac{87}{16}; \frac{57}{8}; \frac{119}{4}\right]$$

$$\rightarrow \quad L = \frac{\text{MCD}(87; 57; 119)}{\text{MCM}(16; 8; 4)} = \frac{1}{16}$$

Reemplazando tenemos: $a=87$; $b=114$ $\wedge$ $c=476$

Por lo tanto, el total de piezas es 677.

Clave **C**

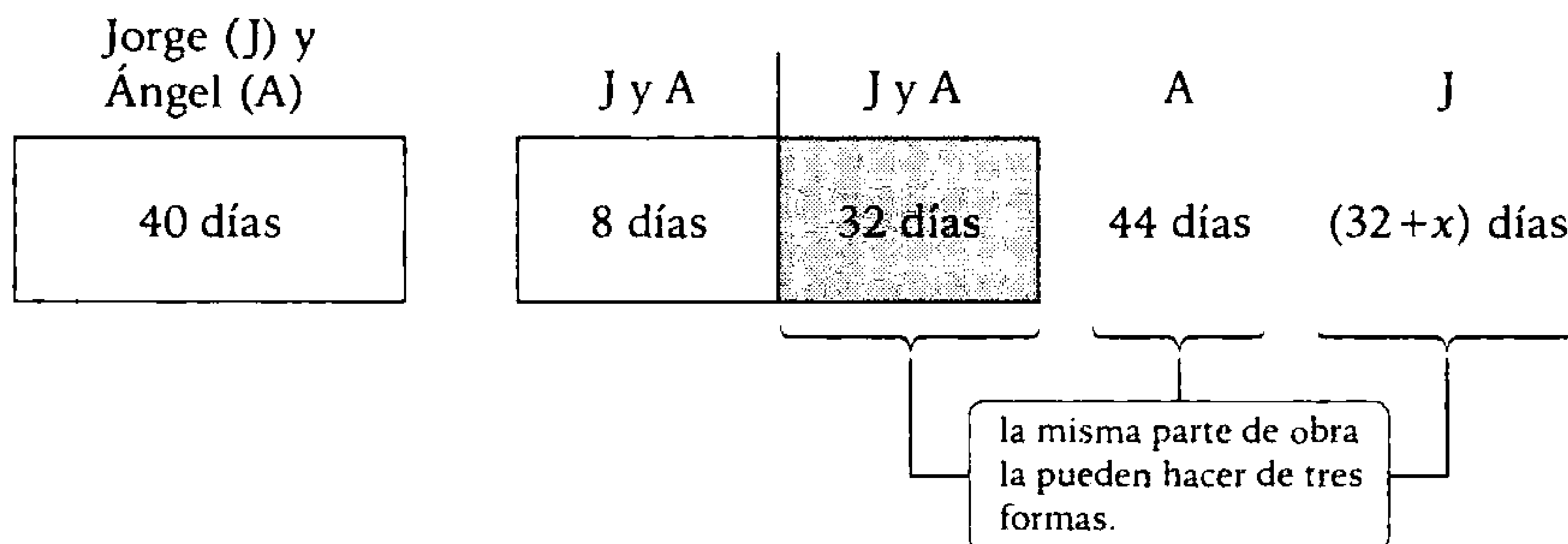
PROBLEMA N.° 23

Jorge y Ángel pueden realizar una obra en 40 días. Al empezar el noveno día de trabajo se retira Jorge y continúa Ángel, así la obra se termina en 12 días más de lo establecido inicialmente. Si en lugar de Ángel hubiera sido Jorge, ¿cuántos días más de lo inicial habría empleado?

A) $76,\widehat{2}$ B) $83,\widehat{2}$ C) 90 D) $72,\widehat{6}$ E) $85,\widehat{3}$

Resolución

Tenemos



Fracción de obra que se hace por día es

J y A hacen $\frac{1}{32}$ de obra por día; A hace $\frac{1}{44}$ de obra por día; J hace $\frac{1}{32+x}$ de obra por día. Entonces, lo que hacen Jorge y Ángel es la suma de lo que hace cada uno.

Entonces

$$\underbrace{\frac{1}{32}}_{\text{J y A}}=\underbrace{\frac{1}{44}}_{\text{A}}+\underbrace{\frac{1}{32+x}}_{\text{J}}$$

Resolvemos $x=85,\widehat{3}$

Clave E

PROBLEMA N.° 24

Si

$$\frac{a}{11}+\frac{b}{9}=0,\widehat{(a+1)(a+b)}\text{, halle } a-b.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

$$\frac{a}{11}+\frac{b}{9}=0,\widehat{(a+1)(a+b)}$$

$$\frac{9a+11b}{11\times 9}=\frac{\overline{(a+1)(a+b)}}{99}$$

$$10b=2a+10$$

$$\underbrace{2}_{...0}\quad \underbrace{5}_{...0}$$

$\therefore\ a-b=3$

Clave C

PROBLEMA N.° 25

¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 168 existen, tales que la suma de sus términos nos dé un $\overset{\circ}{11}$?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

Resolución

$$f=\frac{N}{168}=\frac{N}{2^3\times 3\times 7}$$

Por ser fracción propia: $N<168$

Por ser irreductible N es PESI con 2; 3 y 7.

Por dato:

$$N+168=\overset{\circ}{11}$$

$$N=\overset{\circ}{11}-3$$

$$N=11K-3 \qquad (N<168)$$

$$11K-3<168 \rightarrow K<15{,}5$$

Además K es par $\wedge$ $K\neq\overset{\circ}{3}$ $\wedge$ $K\neq\overset{\circ}{7}$

Solo cumple: $K\in\underbrace{\{2;\,4;\,8;\,10\}}_{\text{4 valores de }K}$

Para todos los valores de K, el valor de N es PESI con 168.
Por lo tanto, hay 4 fracciones f.

Clave B

PROBLEMA N.° 26

Indique verdadero o falso.

I. Todo racional posee representante canónico.
II. Si n es un número irracional, entonces, $\sqrt[3]{n^2}$ es también un irracional.
III. Si el radio de un círculo es irracional, su área es irracional.

A) VVV B) VFF C) VFV
D) VVF E) FFF

Resolución

Analizamos cada proposición:

I. **Verdadera**
Para todo $[(a;b)]$ su representante canónico será $(x;y)$, tal que x e y son PESI, donde $y\in\mathbb{Z}^+$

II. **Falsa**

Contrajemplo

Si $n=\sqrt{125}\in Q'$

$\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{125}^2}=5\in Q$

III. **Falsa**

Contraejemplo

$A_{\text{círculo}}=\pi\times r^2$

Si $r=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}},\in Q',$

$\rightarrow A_{\text{círculo}}=\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2=1\in Q$

Por lo tanto, la respuesta es VFF.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Si $-\sqrt{a}=\left[-b;(b+1),\overline{1,b}\right]$

además, $0,\widehat{0(2b)c}_{(7)}=\dfrac{\overline{b(c+8)}}{\overline{(b+1)(2b)b}}$

calcule $a+b$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Expresando su fracción generatriz

$$0,\widehat{0(2b)c}_{(7)}=\frac{\overline{b(c+8)}}{\overline{(b+1)(2b)b}}$$

$$\frac{\overline{(2b)c}_{(7)}}{\boxed{666_{(7)}}} \qquad \frac{\overline{b(c+8)}}{\overline{(b+1)(2b)b}}$$

$666_{(7)} \rightarrow 342$; $(b+1)\rightarrow 3$, $(2b)\rightarrow 4$, $b\rightarrow 2$

se nota que los denominadores deben ser iguales a 342.

$b=2$

Como

$-\sqrt{a}=\left[-b,(b+1),\overline{1,b}\right]$

$-\sqrt{a}=[-2;\ 3;\ 1;2]$

$$-\sqrt{a}=-2+\cfrac{1}{3+\boxed{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}} \quad \text{(I)}$$

(el recuadro $\rightarrow n$)

Observación

$n=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+n}} \rightarrow$ resolvemos $n=\sqrt{3}-1$

En (I)

$$-\sqrt{a}=-2+\frac{1}{3+\sqrt{3}-1}$$

resolvemos $\sqrt{a}=\sqrt{3}$

$a=3$

$\therefore\ a+b=5$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Si $0,\widehat{a0(a+2)}_{(5)}=\dfrac{\overline{a(b+1)}}{\overline{ba}},$

además, $\dfrac{\overline{(a+7)(a+7)}}{\overline{(a+b)0(a+b)}}=0,\overline{m...n}\widehat{x...y},$

calcule $m+n+x+y$.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

Resolución

$a>0;\ (a+2)<5 \ \wedge \ (a+7)<10$

Vemos que a es 1 ó 2, en:

$$0,\widehat{a0(a+2)}_{(5)}=\frac{\overline{a(b+1)}}{\overline{ba}}$$

$$\frac{\overline{a0(a+2)}_{(5)}}{5^3-1}=\frac{\overline{a(b+1)}}{\overline{ba}}$$

$$\frac{13a+1}{62}=\frac{\overline{a(b+1)}}{\overline{ba}}$$

Cumple para

$a=2 \ \rightarrow \ b=6$

Reemplazando en el otro dato, tenemos:

$$\frac{99}{808}=0,\overline{m...n}\,\widehat{x...y}$$

$808=2^3\times 101 \ \rightarrow$ Genera 3 cifras en la parte no periódica y 4 cifras en el periodo.

$$\frac{99}{808}=0,\overline{mcn}\,\widehat{xpqy}=\frac{\overline{mcnxpqy}-\overline{mcn}}{9\,999\,000}$$

Simplificando

$1\,225\,125=\overline{mcnxpqy}-\overline{mcn}$

$$\begin{array}{r} \overline{m\,c\,n\,x\,p\,q\,y} \ - \\ \overline{m\,c\,n} \\ \hline 1\,2\,2\,5\,1\,2\,5 \end{array}$$

$\rightarrow \ m=1,\ c=2 \ \wedge \ n=2$

Luego

$y-2=5 \ \rightarrow \ y=7$

$x=5$

$\therefore \ m+n+x+y=15$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

Si $\overline{abcde}-\overline{edcba}=\overline{729pq}$, siendo $b>d$

además, $\dfrac{\overline{qp}}{\overline{pq}}=0,\widehat{5xyzwr}$, calcule $p+q+y+w$.

A) 10 B) 11 C) 8

D) 9 E) 12

Resolución

Si $\dfrac{\overline{qp}}{\overline{pq}}=0,\widehat{5xyzwr}$

Observación

- $0,5<\dfrac{\overline{qp}}{\overline{pq}}<0,6$ entonces $q<p$
- $\overline{pq}$ es divisor de 999 999

$$\rightarrow \ \frac{\overline{qp}}{\boxed{\overline{pq}}}=\frac{\overline{5xyzwr}}{\boxed{999\,999}}$$

$7\times 3=21 \qquad 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$

$7\times 9=63$

$\overline{pq}\in\{21;\ 63\}$

Los dos casos generan el mismo decimal; veamos

$$\rightarrow \ \frac{12}{21}=\frac{36}{63}=0,\widehat{571428}$$

($\overline{pq}$ en 21 y 63; y, w en las dos últimas cifras del periodo)

Tenemos $y=1$; $w=2$

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c\,d\,e} \ - \\ \overline{e\,d\,c\,b\,a} \\ \hline \overline{7\,2\,9\,p\,q} \end{array} \qquad (b>d)$$

- $a-e=7$

- Orden 1

$$10+\underbrace{e-a}_{-7}=q$$

$$3=q$$

De los dos valores que pueda tomar $\overline{pq}$; si $q=3$, entonces $p=6$.

$$\therefore\ \underbrace{p+q}_{9}+\underbrace{w+y}_{3}=12$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 30

Se cumple que $a,b\widehat{cd}_{(5)}=10,\overline{\left(\frac{a}{2}\right)}\widehat{\left(\frac{a}{2}\right)b}_{(a)}$

Calcule la suma de los términos de la fracción f, si $f=[d, c, b]$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 15

Resolución

Vemos que a es 2 ó 4 en:

$$a,b\widehat{cd}_{(5)}=10,\overline{\left(\frac{a}{2}\right)}\widehat{\left(\frac{a}{2}\right)b}_{(a)}$$

- Con $\underline{a=2}$

$$2,b\widehat{cd}_{(5)}=10,1\,\widehat{1b}_{(2)};\quad b=0$$

$$\rightarrow\ 0,\bar{0}\,\widehat{cd}_{\underset{+}{(5)}}=0,\overset{+}{1}\,\widehat{10}_{\underset{-}{(2)}}$$

Por lo tanto, no cumple.

- Con $\underline{a=4}$

$$0,b\widehat{cd}_{(5)}=0,2\widehat{2b}_{(4)}$$

$$\frac{\overline{bcd}_{(5)}-b}{440_{(5)}}=\frac{\overline{22b}_{(4)}-2}{330_{(4)}}$$

Entonces

$$\begin{array}{c}22b+5c+d=76\\ \downarrow\quad\ \downarrow\ \downarrow\\ 3\quad\ \underbrace{2\ \ 0}\\ \text{máx}=24\ \rightarrow\ b=3\end{array}$$

Luego

$$f=[d;\ c,\ b]=[0;\ 2;\ 3]$$

Considerando f irreductible, tenemos

	0	2	3
[3]	[7]	3	1
	3	1	0

$$\rightarrow\ f=\frac{3}{7}$$

$\therefore\ 3+7=10$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 31

Si $\frac{a-1}{a}=0,\widehat{(a+1)bcdef}$, calcule la suma de la cantidad de cifras de la parte periódica y no periódica del número decimal que se obtiene a partir de la siguiente fracción:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{b(c+f)f(c+f)\underbrace{000...0}_{a\text{ ceros}}}}$$

A) 460 B) 462
C) 467
D) 469 E) 472

Resolución

Si

$$\frac{a-1}{a}=0,\widehat{(a+1)bcdef} \qquad (a\leq 8)$$

$$\frac{a-1}{a}=\frac{\overline{(a+1)bcdef}}{999\,999}$$

$$999\,999 = 3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$$

a es factor de 999 999, solo cumple

$a=7$

Reemplazamos

$$\frac{6}{7}=\widehat{0,8bcdef}$$

$$\frac{6}{7}=0,857142$$

$b=5,\ c=7,\ d=1,\ e=4,\ f=2$

Entonces

$$f=\frac{75}{5929\underbrace{0...0}_{7\text{ cifras}}}$$

$$f=\frac{3\cdot 5^2}{7^2\cdot 11^2\cdot 2^7\cdot 5^7}$$

Observación

- $\frac{1}{7^2}$ genera 42 cifras en el periodo.
- $\frac{1}{11^2}$ genera 22 cifras en el periodo.

Simplificamos

$$f=\frac{3}{\underbrace{2^7\times 5^5}_{\text{7 cifras no periódicas}}\times \underset{\text{42 cifras periódicas}}{7^2}\times \underset{\text{22 cifras periódicas}}{11^2}}=0,\underbrace{\overline{\qquad}}_{m\text{ cifras}}\underbrace{\widehat{\qquad}}_{n\text{ cifras}}$$

$m=7 \wedge n=\text{MCM}(42, 22)$

$n=462$

$m+n=469$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 32

Sea $0,\overline{(a+1)(a+4)}_{(8)}=0,\dot{3}_{(b+10)}$, además,

$$\frac{\overline{2b}_{(\overline{a3})}}{\overline{(\overline{a2})(\overline{a2})(\overline{a2})}_{(\overline{a3})}}=\frac{\overline{2c}}{\overline{mnpq}}$$

Calcule la suma de las tres últimas cifras de la parte periódica del número decimal que se obtiene a partir de la fracción $\frac{q+1}{(p-m)a}$.

A) 12 B) 14 C) 15

D) 16 E) 17

Resolución

$$0,\overline{(a+1)(a+4)}_{(8)}=0,\dot{3}_{(b+10)}$$

$$\frac{\overline{(a+1)(a+4)}_{(8)}}{8^2-1}=\frac{3}{b+9}$$

$$(b+9)\overbrace{(3a+4)}^{\neq \overset{\circ}{3}}=63=3\times 3\times 7$$

$\rightarrow\ b=0 \wedge a=1$

Reemplazando en el otro dato, tenemos:

$$\frac{20_{(13)}}{(12)(12)(12)_{(13)}}=\frac{\overline{2c}}{\overline{mnpq}}=\frac{26}{2196}$$

$$(12)(12)(12)_{(13)} = 13^3-1$$

$c=6;\ m=2;\ n=1;\ p=9 \wedge q=6$

Luego, nos piden las tres últimas cifras del periodo de

$$\frac{q+1}{(p-m)a}=\frac{7}{71}=0,\widehat{r...xyz}$$

$$\frac{7}{71}=\frac{\overline{r...xyz}}{9...999}\rightarrow \underbrace{7(9...999)}_{...993}=71\times\overline{r...xyz}$$

$$\begin{array}{r} \overline{r...xyz}\ \times \\ 71 \\ \hline ...183 \\ ...81\ \\ \hline ...993 \end{array}$$

$1\times z=...3\ \rightarrow\ z=3$

$1\times y=...8\ \rightarrow\ y=8$

$1\times x=...1\ \rightarrow\ x=1$

$\therefore\ x+y+z=12$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Si $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,\widehat{2mnpqr}$,

calcule la suma de términos de la fracción continua asociada a $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$.

A) 11 B) 12 C) 10

D) 13 E) 14

Resolución

Si $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,\widehat{2mnpqr}$ $(a<b)$

Observación

- $0,2=\frac{1}{5}$
- $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,2...\ \rightarrow\ \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}\doteq\frac{1}{5}$ entonces $b\geq 5$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{\overline{2mnpqr}}{999999}$$

$7\times 13=91$ $3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$

$\overline{ba}\in\{\underbrace{7\times 3}_{21};\ \underbrace{7\times 9}_{63};\ \underbrace{13\times 3}_{39};\ \underbrace{7\times 13}_{91}\}$

$$\frac{19}{91}=0,\widehat{208791}$$

($m=0$, $n=8$, $p=7$, $q=9$, $r=1$)

Tenemos: $a=1$ y $b=9$

Para la fracción continua de $\frac{19}{91}$ aplicamos el algoritmo de Euclides

	0	4	1	3	1	3
19	91	19	15	4	3	1
	19	15	4	3	1	0

Los cocientes son: 0; 4; 1; 3; 1 y 3, entonces la fracción continua es $\frac{19}{91}=[0;4;1;3;1;3]$.

$\therefore\ 0+4+1+3+1+3=12$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

Si $0,\widehat{\overline{aba}}_{(5)}\times 0,\widehat{\overline{aba}}_{(6)}=0,741\widehat{3}$, calcule $a\times b$.

A) 6 B) 12 C) 3

D) 8 E) 16

Resolución

Si $0,\overline{a\widehat{b}a}_{(5)}\times 0,\overline{a\widehat{b}a}_{(6)}=0,741\widehat{3}$

$$\frac{\overline{aba}_{(5)}-\overline{ab}_{(5)}}{400_{(5)}}\times\frac{\overline{aba}_{(6)}-\overline{ab}_{(6)}}{500_{(6)}}=\frac{7413-741}{9000}$$

Desarrollando

$$\underbrace{(21\underset{4}{a}+4\underset{3}{b})}\underbrace{(31\underset{4}{a}+5\underset{3}{b})}=\underline{2\times2\times2\times2\times2\times3}\times139$$

$\therefore\ a\times b=12$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Si $0,\overline{ab}_{(7)}\times 0,\overline{ba}_{(6)}=0,\overline{b}\widehat{(a-2)}$,

calcule $a+b$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

Se observa

- $2\leq a<6\ \rightarrow\ a\in\{2;3;4;5\}$
- $0<b<6$
- $0,\overline{ab}_{(7)}\times 0,\overline{ba}_{(6)}=0,\overline{b}\widehat{(a-2)}$

$$\frac{\overline{ab}_{(7)}-a}{60_{(7)}}\times\frac{\overline{ba}_{(6)}-b}{50_{(6)}}=\frac{\overline{b(a-2)}-b}{90}$$

$$\frac{\overbrace{(6a+b)}^{\neq\overset{\circ}{7}}}{\underbrace{2\times3\times7}}\times\frac{\overbrace{(5b+a)}}{5\times6}=\frac{(9b+a-2)}{2\times5\times9}$$

Genera 1 cifra no periódica en base 7

Tenemos

$$\underbrace{(6a+b)}_{\neq\overset{\circ}{7}}\times(5b+a)=\underbrace{(9b+a-2)\times2\times7}_{\overset{\circ}{7}}$$

$\underbrace{5b+a=\overset{\circ}{7}}$

└→ 7; 14; 21; 28

cumple para

$5\underset{5}{b}+\underset{3}{a}=28$

$\therefore\ a+b=8$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

Si $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,\widehat{mnpq}_{(5)}$,

calcule $a+b+m+n+p+q$.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

Resolución

Se tiene que: $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,\widehat{mnpq}_{(5)}$

Veamos la tabla de los numerales de cifras máximas:

$$4_{(5)}=4=2^2$$
$$44_{(5)}=24=2^3\times3$$
$$444_{(5)}=124=2^2\times31$$
$$4444_{(5)}=624=\underbrace{2^4\times3\times13}_{\text{D.C.}}$$

Además $\overline{ab}<\overline{ba}$

y para que tenga 4 cifras en el periodo

$\rightarrow\ \overline{ba}=13\times2^2=52;\ \ a=2\ \wedge\ b=5$

Luego

$$\frac{25}{52}=0,\widehat{mnpq}_{(5)}=\frac{\overline{mnpq}_{(5)}}{5^4-1}$$

$\overline{mnpq}_{(5)}=300=2200_{(5)}$

$m=n=2\ \wedge\ p=q=0$

$\therefore\ a+b+m+n+p+q=11$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

Jorge ahorró S/.108 000 durante 10 años: en el cuarto año ahorró 2/9, más lo que había ahorrado el segundo año; el sexto año ahorró S/.25 770 soles; el octavo año ahorró 1/11 menos que lo que había ahorrado el cuarto año, y el décimo año ahorró lo que en el cuarto más S/.230 soles. Calcule lo que ahorró el segundo año si solo ahorró los años pares.

A) S/.18 000
B) S/.20 000
C) S/.19 500
D) S/.18 200
E) S/.21 500

Resolución

- En total ahorra S/.108 000
- Solo ahorra los años pares durante 10 años.
- De los datos

	Ahorro
2.° año	$9K$
4.° año	$9K+2K=11K$
6.° año	25 770
8.° año	$11K-K=10K$
10.° año	$11K+230$
Total	$41K+26\,000$

$$41K+26\,000=108\,000$$
$$K=2000$$

El 2.° año ahorró$=9(2000)$
$=18\,000$

Por lo tanto, ahorró S/.18 000 el segundo año.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

Si $N=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, calcule $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$. Considere

$$N=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

A) $\sqrt{18}$
B) $\sqrt{12}$
C) $\sqrt{21}$
D) $\sqrt{15}$
E) $\sqrt{24}$

Resolución

Del dato: $N=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\underbrace{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ddots}}}_{N-1}}}$

De donde

$$N^2=\frac{5}{3}$$

$$N=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\underbrace{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}_{\text{del dato}}$$

$$\therefore\ \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 39

Si $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{a9}}=0,\widehat{mn2}_{(7)}$, calcule $a+b+m+n$.

A) 20
B) 19
C) 18
D) 17
E) 16

Resolución

Del dato: $\frac{\overline{ab}}{\overline{a9}}=0,\widehat{mn2}_{(7)}$

Analizamos la tabla de base 7

$$6_{(7)}=2\times3$$
$$66_{(7)}=2^4\times3$$
$$666_{(7)}=2\times3^2\times\textcircled{19}$$

$\overline{a9}$ es un divisor de $666_{(7)}$ pero no es de $66_{(7)}$; el único valor es

$\overline{a9}=19 \rightarrow a=1$

en su fracción generatriz

$$\frac{\overline{1b}}{19}=\frac{\overline{mn2}_{(7)}}{666_{(7)}}$$

Simplificando tenemos

$$\overline{1b}\times18=\overline{mn2}_{(7)} \qquad \text{(I)}$$

$$(\overset{o}{7}+3+b)(\overset{o}{7}+4)=\overset{o}{7}+2$$

$$b=\overset{o}{7}+1$$

$b=1$ ó $b=8$

Comprobando cada caso:

- Si $b=1$ en (I)

$$\underbrace{11\times18}=\overline{m\,n\,2}_{(7)}$$
$$198=4\;0\;2_{(7)}$$

$\rightarrow m+n+b+a=6$

- Si $b=8$ en (I)

$$\underbrace{18\times18}=\overline{m\,n\,2}_{(7)}$$
$$324=6\;4\;2_{(7)}$$

$\rightarrow m+n+b+a=19$

Por lo tanto, hay 2 respuestas: 6 ó 19.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

Se sabe que

MCD $(m, \overline{ab})$ = MCD $(n, \overline{cd})=1$,

además, $\frac{m}{\overline{ab}}+\frac{n}{\overline{cd}}=b$ y $m+n=24$.

Halle cuántas parejas de fracciones cumplen con dichas condiciones.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Del dato:

MCD$(m; \overline{ab})$ = MCD$(n; \overline{cd})=1$

- **Por propiedad**

m y $\overline{ab}$ son PESI $\wedge$ n y $\overline{cd}$ son PESI.

Luego, $\frac{m}{\overline{ab}}$ y $\frac{n}{\overline{cd}}$ son fracciones irreductibles

Propiedad

Sean las fracciones irreductibles

$$f_1=\frac{a}{b} \text{ y } f_2=\frac{c}{d}$$

$f_1+f_2=K \;\wedge\; K\in\mathbb{Z}^+ \rightarrow b=d$

$\rightarrow \overline{ab}=\overline{cd}$

$$\frac{m}{\overline{ab}}+\frac{n}{\overline{cd}}=\frac{m+n}{\overline{ab}}=b$$

Como $m+n=24$

$$\overline{ab}\times b=24$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$12 \quad 2$$

$12=2^2\times3$ ...(D.C.)

Si m y n son PESI con 12

$\rightarrow m$ y $n\neq\overset{o}{2} \wedge \neq\overset{o}{3}$

$m+n=24$
$\downarrow \quad \downarrow$

1	23
5	19
7	17
11	13

Por lo tanto, cumplen 4 parejas de fracciones.

Clave C

PROBLEMA N.° 41

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción irreductible

en la cual $\frac{a}{b}=[3n; n+1, n, 2n]$

además, $\overline{n(n+1)(n+2)}_{(n+3)}=\overline{m000}_{(3)}$.
Halle $(a+b)$.

A) 21 B) 28 C) 35
D) 38 E) 41

Resolución

Del dato $\overline{n(n+1)(n+2)}_{(n+3)}=\underbrace{\overline{m000}_{(3)}}_{m<3}$

Observación

Por descomposición polinómica
$(n\times(n+3)^2+...)\leq 2\times 3^3$
$(n\times((n+3))^2\leq 54$
$\rightarrow\ n=1 \ \vee \ n=2$

Si $n=1$

$123_{(4)}=\overline{m000}_{(3)} \rightarrow 27=m\times 3^3$
$m=1$

Si $n=2$; no cumple

Reemplazamos $n=1$

$\frac{a}{b}=[3; 2; 1; 2]$

Por el algoritmo de Euclides 3; 2; 1 y 2 son los cocientes:

	3	2	1	2
$a=27$	$b=8$	3	2	1
	3	2	1	0

$\therefore\ a+b=35$

Clave C

PROBLEMA N.° 42

Si el número irracional $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ se representa como fracción continua de la forma $[7; \overline{3,5}]$, calcule $a+b+c$.

A) 318 B) 344
C) 346
D) 350 E) 356

Resolución

Sea $x=[7; \overline{3,5}]$

$$x=7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\underbrace{\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}_{x-7}}}$$

De donde

$$x=\frac{22x-37}{3x-5}$$

$3x^2-27x+37=0$

Entonces

$$x_{1;2}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(-27)^2-4(3)(37)}}{2(3)}$$

$$x_{1;2}=\frac{27\pm\sqrt{285}}{6}$$

Como $x>7 \rightarrow x=\frac{27+\sqrt{285}}{6}$

Del dato:

$$x=\frac{a+\sqrt{b}}{c} \rightarrow a=27;\ b=285 \ \wedge\ c=6$$

$\therefore\ a+b+c=318$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 43

Sean

$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots;$

$B=\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^8}+\ldots$

Calcule la cifra de orden -25 que generan $A+B$.

A) 6 B) 2 C) 7
D) 0 E) 4

Resolución

- $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\ldots$

  Multiplicado por 2^2

  $$2^2A=2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots}_{A} \rightarrow A=\frac{2}{3}$$

- $B=\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^8}+\frac{9}{10^{11}}+\ldots$

Multiplicado por 10^3

$$10^3B=90+\underbrace{\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^8}+\ldots}_{B}$$

$1000B=90+B$

$$B=\frac{10}{111}$$

$$\rightarrow A+B=\frac{2}{3}+\frac{10}{111}$$

$$A+B=\frac{84}{111}$$

$$A+B=0,\widehat{756}$$

Entonces

$$=0,\overset{\frown}{\underline{7}\ \underline{5}\ \underline{6}}\ \vdots\ \overset{\frown}{\underline{7}\ \underline{5}\ \underline{6}}\ \vdots\ \overset{\frown}{\underline{7}\ \underline{5}\ \underline{6}}\ \vdots\ldots$$

orden: $-1\ -2\ -3\ \vdots\ -4\ -5\ -6\ \vdots\ -7$

Por lo tanto, la cifra de orden $-\text{(25)}$ es 7

$$25=\overset{\circ}{3}+1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

Calcule una fracción equivalente a $\frac{777}{1147}$, tal que la suma de sus términos sea $\overset{\circ}{91}$ y que la diferencia de los mismos esté comprendida entre 250 y 350. Dé como respuesta la suma de cifras del denominador de la fracción equivalente.

A) 12 B) 18
C) 20
D) 21 E) 22

Resolución

Observación

Sabemos que las fracciones equivalentes se obtienen a partir de una fracción irreductible, entonces

$$\frac{777}{1147}=\frac{21\times 37}{31\times 37}=\frac{21}{31}$$

Luego, la fracción equivalente será

$$\frac{21K}{31K};\quad K\in\mathbb{Z}^+$$

Donde

$$21K+31K=\overset{o}{91}$$
$$52K=\overset{o}{91}$$
$$4K=\overset{o}{7}\ \rightarrow\ K=\overset{o}{7}$$

Además

$$250<31K-21K<350$$
$$25<K<35$$
$$\downarrow$$
$$28$$

Entonces, el denominador de la fracción equivalente es

$$31K=31(28)=868$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 22.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 45

Se cumple que $\frac{3}{\overline{mnp}}=0,\widehat{abcde}_{(6)}$.

Halle x, si $x=[m;\bar{n}]$.

A) $2+\sqrt{5}$ B) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

D) $1+\sqrt{2}$ E) $3+\sqrt{5}$

Resolución

Si

$$\frac{3}{\overline{mnp}}=0,\widehat{abcde}_{(6)}$$

Tabla de la base 6

$$5_{(6)}=5$$
$$55_{(6)}=5\times 7$$
$$555_{(6)}=5\times 43$$
$$5555_{(6)}=5\times 7\times 37$$
$$55\,555_{(6)}=5^2\times \textcircled{311}$$

$\overline{mnp}$ es factor de $55\,555_{(6)}$, pero no de los menores a él.

$$\overline{mnp}=311$$
$$\rightarrow\ m=3\ \wedge\ n=1$$

$$\frac{3}{311}=\frac{\overline{abcde}_{(6)}}{\boxed{55555_{(6)}}}$$
$$\downarrow$$
$$5^2\times 311$$

$$75=\overline{abcde}_{(6)}$$

$$203_6=\overline{a\ b\ c\ d\ e}_{(6)}$$
$$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$$
$$0\,0\,2\,0\,3_{(6)}$$

Piden $x=[m;\bar{n}]$

$$x=[3;\bar{1}]$$

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

Luego

$$x-3=\cfrac{1}{1+\underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}_{x-3}}$$

$$x-3=\frac{1}{1+x-3}$$

Resolviendo, tomamos la raíz positiva.

$$\therefore\quad x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Clave C

Entonces

$$\frac{207}{275}=0,7b\widehat{27}=\frac{\overline{7b27}-\overline{7b}}{9900}$$

$$7452=\overline{7b27}-\overline{7b}$$

$$\begin{array}{r} \overline{7b27}\ - \\ \overline{7b} \\ \hline 7452 \end{array}$$

$7-b=2$

$\rightarrow\ b=5$

$\therefore\ a+b+c=14$

Clave C

PROBLEMA N.° 46

Si la fracción irreductible $\dfrac{\overline{c(a-7)a}}{\overline{ca(a-2)}}$ origina un decimal de la forma $0,ab\widehat{ca}$, halle $(a+b+c)$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

Resolución

Si $\dfrac{\overline{c(a-7)a}}{\overline{ca(a-2)}}$

es una fracción irreductible, entonces a es impar: 7 ó 9.

Además

$$\frac{\overline{c(a-7)a}}{\overline{ca(a-2)}}=0,ab\widehat{ca}$$

$$\rightarrow\ \overline{ca(a-2)}=\begin{cases} 5^2\times 11=275 & \text{Sí cumple} \\ 5^2\times 3\times 11=825 & \text{No cumple} \end{cases}$$

De donde

$a=7\ \wedge\ c=2$

PROBLEMA N.° 47

Si $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cc}}=0,\widehat{db}$; además, $\overline{ab}+\overline{db}=100$, halle la suma de los valores de $(a+b)$.

A) 7 B) 8 C) 17
D) 13 E) 15

Resolución

Si $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cc}}=0,\widehat{db}$

$$\frac{\overline{ab}}{\boxed{\overline{cc}}}=\frac{\overline{db}}{99}$$

$\overline{cc}$ es un factor de 99

$\overline{cc}$ puede ser: 11; 33; 99

$c\in\{1;3;9\}$

$$\frac{\overline{ab}}{\cancel{11}\times c}=\frac{\overline{db}}{\cancel{11}\times 9}$$

$$\overline{db}=\frac{9\times\overline{ab}}{c}$$

En el dato:

$$\overline{ab}+\underbrace{\overline{db}}=100$$

$$\overline{ab}+\frac{9\times\overline{ab}}{c}=100$$

Para $c=1 \rightarrow \overline{ab}=10;\ a+b=1$

Para $c=3 \rightarrow \overline{ab}=25;\ a+b=7$

Para $c=9 \rightarrow \overline{ab}=50;\ a+b=5$

Por lo tanto la suma de los valores de $a+b$ es $1+7+5=13$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 48

Sea

$$M=0,\widehat{abcde}_{(3)}=0,\underbrace{\widehat{mn...}}_{\overline{ab}\text{ cifras}}$$

Además, $\dfrac{\overline{dc}}{\overline{cd}}$ genera un número decimal con seis cifras periódicas (periódico puro). Calcule el máximo valor de $a+b+c+d+e$.

A) 9
B) 10
C) 8
D) 7
E) 6

Resolución

De los datos:

$$c \text{ y } d < 3$$

$$\overline{cd} \in \{11;\ 12;\ 21;\ 22\}$$

Además

$$\frac{\overline{dc}}{\overline{cd}}=\square,\overline{------}$$

Como el número decimal tiene seis cifras en el periodo, analizamos en

$$999\,999=3^3\times7\times11\times13\times37$$

$$\rightarrow \overline{cd}=7\times3=21$$

Reemplazamos en M

$$M=0,\widehat{ab21e}_{(3)}=0,\underbrace{\widehat{mn...}}_{\overline{ab}\text{ cifras}}$$

$$\frac{\overline{ab21e}_{(3)}}{3^5-1}=\frac{\overline{mn...}}{10^{\overline{ab}}-1}$$

$$\overline{mn...}=\frac{10^{\overline{ab}}-1}{\underset{\downarrow\ 2\times11^2}{242}}\times\overline{ab21e}_{(3)}$$

Piden

$$(a+b+c+d+e)_{\text{máx}}$$

Analizando tenemos

- $(10^{\overline{ab}}-1)$ es impar

  $\rightarrow 10^{\overline{ab}}-1=\overset{o}{11}$

  $(\overset{o}{11}-1)^{\overline{ab}}=\overset{o}{11}+1$

  Luego, ab es par; $a<3 \wedge b<3$

  $\rightarrow \overline{ab}=22$

- $\overline{ab21e}_{(3)}$ debe ser par

$$\overline{2221e}_{(3)}=\underbrace{2\times3^4+2\times3^3+2\times3^2+1\times3}_{\text{impar}}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{e}=\text{par}$$

$$\therefore\ (a+b+c+d+e)_{\text{máx}}=8$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 49

Calcule $a+b+c$, si

$$a\frac{b}{c}=\frac{1}{3}+\frac{13}{15}+\frac{33}{35}+\frac{61}{63}+...+\frac{397}{399}.$$

A) 29 B) 31 C) 34
D) 27 E) 28

Resolución

Del dato

$$a\frac{b}{c}=\frac{1}{3}+\frac{13}{15}+\frac{33}{35}+\frac{61}{63}+...+\frac{397}{399}$$

$$1\cdot 3 \quad 3\cdot 5 \quad 5\cdot 7 \quad 7\cdot 9 \quad 19\cdot 21$$

$$\frac{19-1}{2}+1=10 \text{ términos}$$

Como $\frac{n}{n+2}=1-\frac{2}{n+2}$; entonces

$$a\frac{b}{c}=1-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{15}+1-\frac{2}{35}+1-\frac{2}{63}+...+1-\frac{2}{399}$$

$$=10-\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+...+\frac{2}{19\cdot 21}\right)$$

$$=10-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{21}\right)$$

$$=10-\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=9+\frac{1}{21}$$

$$a\frac{b}{c}=9\frac{1}{21}$$

$a=9 \wedge b=1 \wedge c=21$

$\therefore\ a+b+c=31$

Clave B

PROBLEMA N.° 50

Indique cuántas cifras en su parte no periódica tendrá en base 21 la siguiente fracción:

$$f=\frac{3}{213!-212!}$$

A) 102 B) 101 C) 34
D) 33 E) 69

Resolución

Los divisores primos de la base 21 son 3 y 7; entonces, encontraremos las potencias de 3 y de 7 en el denominador de

$$f=\frac{3}{213!-212!}=\frac{3}{212!(213-1)}$$

$$f=\frac{3}{212!\times 2^2\times 53}$$

Observe que en 212! bastará encontrar el exponente de 3, ya que es mayor que el exponente de 7.

212 ÷ 3 → 70; 70 ÷ 3 → 23; 23 ÷ 3 → 7; 7 ÷ 3 → 2

$70+23+7+2=102$

$\rightarrow\ 212!=3^{102}\times(\quad)$

Luego

$$f=\frac{3}{3^{102}\times(\quad)\times 2^2\times 53}=\frac{1}{3^{101}\times(\quad)\times 2^2\times 53}$$

Nota

La cantidad de cifras de la parte no periódica está dada por el mayor exponente de los divisores primos de la base.

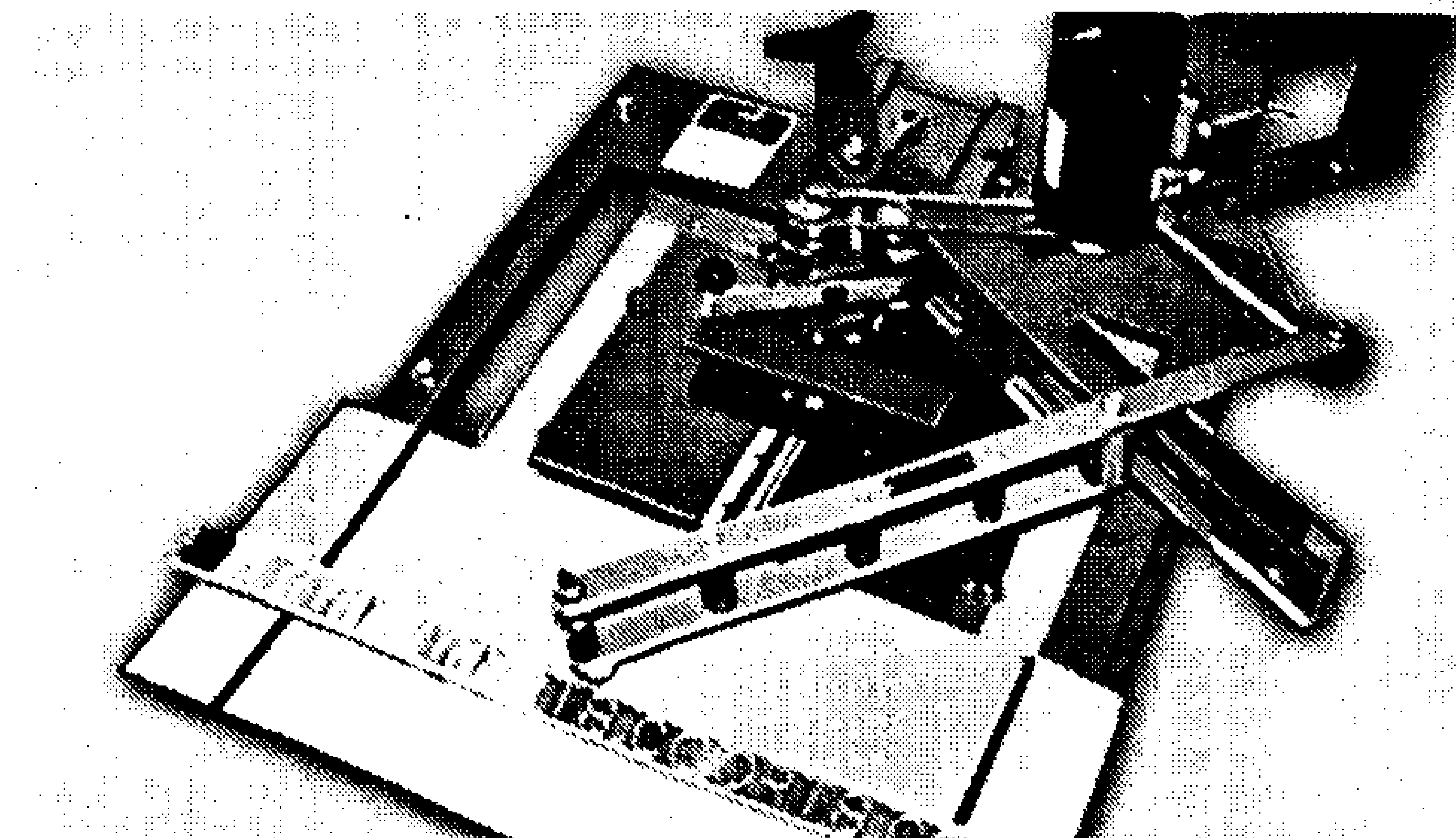
Por lo tanto, hay 101 cifras en la parte no periódica.

Clave B

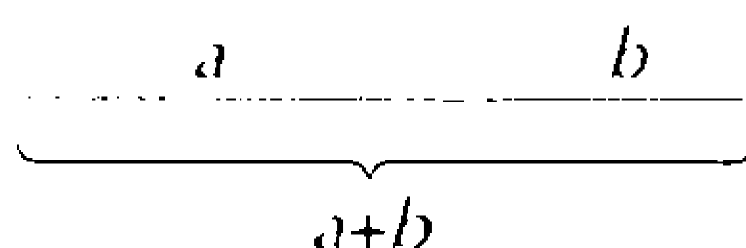
Capítulo

12

Razones y proporciones



Una sección áurea es una división en dos de un segmento según proporciones dadas por el número áureo. La longitud total $a+b$ es al segmento más largo a como a es al segmento más corto b.



El número áureo o de oro (también llamado número dorado, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) representado por la letra griega ϕ (fi) (en honor al escultor griego Fidias), es el número irracional:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868343656 38$$

El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides, en su obra *Elementos*, quien lo definió de la siguiente manera:

"Se dice que una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor".

Capítulo 12

Razones y proporciones

PROBLEMA N.° 1

El radio del planeta Marte es 1/2 del radio terreste y el diámetro del planeta Júpiter es igual a 10 diámetros terrestres. ¿Cuál es la razón geométrica entre los radios de Marte y Júpiter?

A) 3/20 B) 7/20 C) 1/20
D) 3/15 E) 1/10

Resolución

De los datos:

- $r_{\text{Marte}} = \frac{1}{2}(r_{\text{Tierra}})$ (I)
- $2 \times r_{\text{Júpiter}} = 10 \times (2 \cdot r_{\text{Tierra}})$ (II)

$\therefore \frac{(I)}{(II)} : \frac{r_{\text{Marte}}}{r_{\text{Júpiter}}} = \frac{1}{20}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

Los volúmenes que contienen dos recipientes están en la relación de 2 a 5. Si agregamos 33 litros a cada uno, la nueva relación será de 5 a 7. Calcule la cantidad de litros en la que excede el volumen de uno de los recipientes respecto del otro.

A) 15 B) 18 C) 21
D) 24 E) 33

Resolución

Sean los volúmenes iniciales (en litros)
$V_1 = 2K$, $V_2 = 5K$
Luego de agregar 33 litros a cada recipiente, se tiene $\frac{2K+33}{5K+33} = \frac{5}{7}$; $K=6$
Nos piden la diferencia de los volúmenes

$\therefore\ 3K = 18$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

La cantidad de dinero de A es a la de B como 2 es a 3, y la de B es a la de C como 3 es a 4. Si A y C tienen juntos 60 soles, ¿cuántos soles tiene B?

A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

Resolución

Tenemos $\underbrace{\frac{A}{2} = \frac{B}{3} \wedge \frac{B}{3} = \frac{C}{4}} \wedge A+C=60$

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{\boxed{A+C}^{\,60}}{2+4} = 10$$

$\therefore\ B = 3\times 10 \rightarrow B = 30$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Las edades de Julián, Milagros y Pedro se encuentran en la relación de 2; 3 y 4, respectivamente. Si dentro de 9 años sus edades serán proporcionales a 7; 9 y 11, respectivamente, ¿en cuántos años excederá la edad de Pedro a la edad de Julián dentro de 13 años?

A) 8 años B) 10 años C) 12 años D) 14 años E) 18 años

Resolución

Actualmente, las edades de Julián, Milagros y Pedro son: $J=2K$; $M=3K$ y $P=4K$, respectivamente. Dentro de 9 años, se tendrá que

$$\underbrace{\frac{2K+9}{7}=\frac{3K+9}{9}}_{K=6}=\frac{4K+9}{11}$$

Nota

Sabemos que la diferencia de edades entre dos personas siempre es constante

Entonces, la diferencia entre las edades de Pedro y Julián dentro de 13 años será $2K$.

$\therefore$ $2(6)=12$ años

Clave C

PROBLEMA N.° 5

Un vendedor ambulante tiene lapiceros rojos y azules en la proporción de 7 a 4. Si vende 2/5 del total de lapiceros, de los cuales 3/5 son rojos y el resto azules, ¿cuál es la nueva relación de lapiceros rojos y azules?

A) 56/37 B) 109/56 C) 110/31 D) 140/21 E) 108/28

Resolución

Poniendo cantidades adecuadas en la relación de 7 a 4 y que tengan quinta parte dos veces: $7\times5\times5$ y $4\times5\times5$.

	N.° lapiceros rojos	N.° lapiceros azules	Total
Al inicio	$\underbrace{7\times(5\times5)}_{175}$	$\underbrace{4\times(5\times5)}_{100}$	$11\times(5\times5)$
Vende	$\frac{3}{5}(22\times5)=66$	$\frac{2}{5}(22\times5)=44$	22×5
Quedan	109	56	

Se vende $\frac{2}{5}\times11\times5\times5=22\times5$

La relación de lapiceros rojos y azules que quedan es $\frac{109}{56}$.

Clave B

PROBLEMA N.° 6

Dos personas A y B se encuentran en ciudades diferentes y a una distancia de 800 m. Se sabe que dichas personas van al encuentro en una misma vía recta y que las velocidades de A y B están en la relación de 5 a 3. Además, después de 40 s de cruzarse se encuentran separados 320 m y, en ese momento, A se detiene durante un tiempo igual al que le faltaba para llegar al punto de partida de B. Pasado ese tiempo, ¿cuánto le falta recorrer todavía a B para llegar al punto de partida de A?

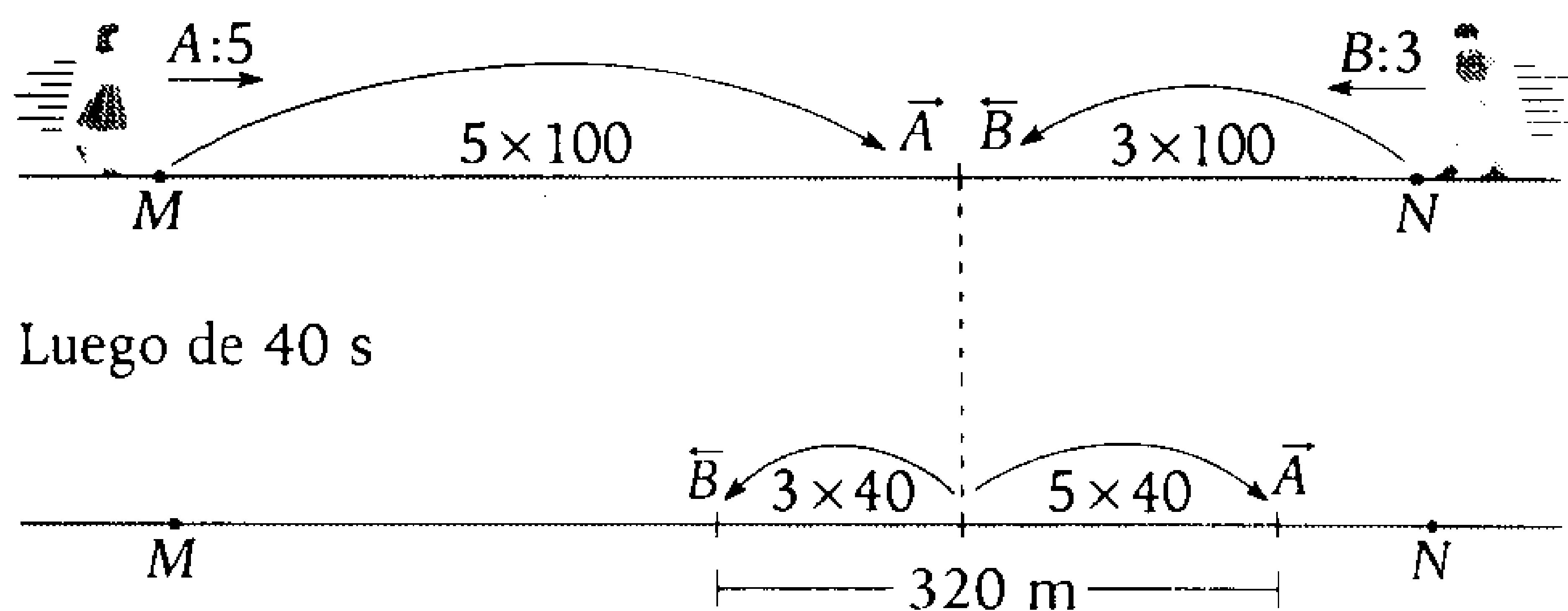
A) 180 m B) 210 m C) 320 m D) 330 m E) 410 m

Resolución

Nota

Recuerda que cuando se desplazan a velocidad constante, los espacios recorridos en un mismo tiempo están en la misma relación que las velocidades.

La distancia $\overline{MN}$ es 800 m.



- Por condición, A se detiene 20 s, que es el tiempo que le falta para llegar a N.
- Entonces, en 20 s B avanzará la mitad de lo que avanzó en 40 s, es decir, 60 m.

Por lo tanto, del gráfico vemos que para llegar a M, a B le falta recorrer todavía $500-(120+60)=320$ m

Clave C

PROBLEMA N.° 7

En el Instituto de Ciencias y Humanidades, el número de varones y mujeres se encuentra en la relación de 7 a 5. En el ciclo anual, hay 1280 alumnos, lo cual es el doble de lo que hay en el ciclo semestral. Si el número de varones en el ciclo anual es al número de mujeres en el ciclo semestral como 5 es a 2, calcule la suma entre el número de varones del ciclo semestral y el número de mujeres del ciclo anual.

A) 500 B) 600 C) 700 D) 800 E) 900

Resolución

La cantidad total de alumnos se puede expresar

$$\underbrace{(\text{N.}^\circ\text{ varones})}_{7K} + \underbrace{(\text{N.}^\circ\text{ mujeres})}_{5K} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{alumnos del}\\ \text{ciclo anual}\end{pmatrix}}_{1280} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{alumnos del}\\ \text{ciclo semestral}\end{pmatrix}}_{\frac{1280}{2}}$$

$$K=160$$

$$\frac{\text{varones anual}}{\text{mujeres semestral}} = \frac{5n}{2n}$$

Distribuyendo los datos en el cuadro, tenemos

	Varones	Mujeres	Total
Anual	$5n$	$y=1280-5n$	1280
Semestral	$x=640-2n$	$2n$	640
Total	1120	800	

$$5n+640-2n=1120$$
$$n=160$$

Nos piden $x+y=1920-7n$

$x+y=1920-7\times 160$

$\therefore\ x+y=800$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Se tienen tres cubos A, B y C, en los cuales la arista de A es a la arista de B como 2 es a 3 y la arista de B es a la arista de C como 2 es a 5. Si para pintar todas las caras de B gasté 40 tarros de pintura más que para pintar todas las caras de A, ¿cuántos tarros de pintura se necesitarán para pintar dos caras del cubo C?

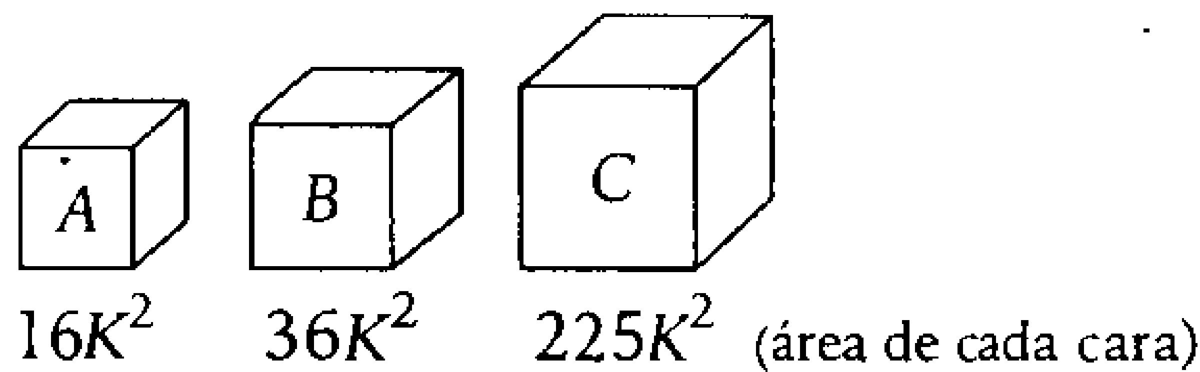
A) 120 B) 140 C) 150 D) 240 E) 130

Resolución

Hallamos la relación en la que se encuentran las aristas de los cubos A, B y C.

$$\frac{A}{\textcircled{B}}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{2} \qquad \frac{\textcircled{B}}{C}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{3} \rightarrow A=4K,\ B=6K \ \wedge\ C=15K$$

Graficando, tenemos



Por condición, gasto 40 tarros de pintura para pintar $6(36K^2-16K^2)=6\times 20K^2$

Luego, sea N el número de tarros de pintura que se necesitan para pintar 2 caras del cubo C:

$$\frac{40}{6\times 20K^2}=\frac{N}{2\times 225K^2}$$

$\therefore\ N=150$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En un partido del equipo A vs. el equipo B, 300 personas realizan apuestas sobre el posible ganador. Al inicio, las apuestas favorecen a A en la razón de 3 a 2, pero al final quedaron favorables a B, en la razón de 5 a 1. Calcule cuántas personas cambiaron sus apuestas como mínimo, si no hubo abstenciones.

A) 60 B) 80 C) 130
D) 170 E) 185

Resolución

	Al inicio	Al final
Equipo A	$3K$	$1n$
Equipo B	$2K$	$5n$
Total	↓ $5K=300$ $K=60$	↓ $6n=300$ $n=50$

Al inicio, en el equipo A: $3\times 60=180$

Al final, en el equipo A: $1\times 50=50$

Cambian de equipo: $180-50=130$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Los antecedentes de una proporción están en la relación de 8 a 5 y la suma de consecuentes es 156. Calcule la diferencia de los términos medios, si los extremos están en la relación de 4 a 3.

A) 46 B) 68 C) 51
D) 27 E) 35

Resolución

$$\frac{8a}{b}=\frac{5a}{c}=\frac{13a}{156}=\frac{a}{12}$$

(+ entre antecedentes y + entre consecuentes)

$\rightarrow\ b=96\ \wedge\ c=60$

Además

$$\frac{8a}{c}=\frac{4}{3};\ a=10$$

$\rightarrow\ b-5a=46$

Por lo tanto, la diferencia de los términos medios es 46.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 11

En una proporción geométrica, la suma de los términos extremos es 20 y su diferencia 16. ¿Cuál es su media proporcional?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Por tener media proporcional, se entiende que es continua.

Sea la proporción continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

a y c son los términos extremos; $b=\sqrt{ac}$ es la media proporcional.

Del dato:

$$a+c=20$$
$$a-c=16$$
$$2a=36$$
$$a=18 \rightarrow c=2$$

La media proporcional es $b=\sqrt{18\times 2}$

$\therefore\ b=6$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

En una proporción geométrica continua, la suma de los términos es 105 y la diferencia de extremos es 63. Halle la razón si es mayor que la unidad.

A) 2 B) 3,5 C) 4
D) 5 E) 3,5

Resolución

Sea la proporción continua

$$\frac{aK^2}{aK}=\frac{aK}{a};\ K>1$$

- $aK^2+2aK+a=105$
  $a(K+1)^2=105$
- $aK^2-a=63$
  $a(K^2-1)=63$
  $a(K-1)(K+1)=63$ $\quad\div$

$$\frac{K+1}{K-1}=\frac{5}{3}$$

$\therefore\ K=4$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

En una proporción geométrica, las diferencias de los términos de cada razón son 9 y 21. Si la diferencia de cuadrados de los antecedentes es 360, halle la suma de antecedentes.

A) 10 B) 30 C) 12
D) 15 E) 36

Resolución

La proporción es $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Datos: $a-b=9\ \wedge\ c-d=21$

Por propiedad de proporciones

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}\ \wedge\ \frac{a}{9}=\frac{c}{21}$$

Simplificamos

$$\frac{a}{3}=\frac{c}{7}=K \rightarrow \begin{matrix} a=3K \\ c=7K \end{matrix}$$

Por dato:

$$c^2-a^2=360$$
$$(7K)^2-(3K)^2=360 \rightarrow K=3$$

La suma de antecedentes

$$a+c=3\cdot(3)+7\cdot(3)$$

$\therefore\ a+c=30$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

Se tiene

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K;\ (K\in\mathbb{Z})$$

Además, $a+c=52$ y $b-d=9$.
Calcule la media diferencial de a y d.

A) 23 B) 20 C) 15
D) 26 E) 22

Resolución

Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K;\ K\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow\ a=bK\ \wedge\ c=dK$

Datos:

$a+c=52\ \wedge\ b-d=9$

$K\underbrace{(b+d)}=52=2\times2\times13$

K	$(b+d)$
2	26
4	13
13	4
26	2
52	1

Luego, la media diferencial de a y d es $\frac{a+d}{2}$, entonces

K	b	d	$a=bK$	$\left(\frac{a+d}{2}\right)$
2	17,5	8,5	35	21,75
4	11	2	44	23
13	6,5	−2,5	84,5	41
26	5,5	−3,5	143	69,75
52	5	−4	260	128

Por lo tanto, una de las soluciones es 23.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Se sabe que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a^2-12}{b^2-27}=\frac{5c^2+4}{5d^2+9}$$

Calcule el valor de $\frac{7b+d}{7a+c}$

A) 2/5 B) 3/4 C) 4/3
D) 2/3 E) 3/2

Resolución

De la proporción

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K\ \rightarrow\ \begin{matrix}a=bK\\ c=dK\\ a\cdot d=b\cdot c\end{matrix}$$

Del dato:

$$\frac{a^2-12}{b^2-27}=\frac{5c^2+4}{5d^2+9}$$

$$(a^2-12)(5d^2+9)=(5c^2+4)(b^2-27)$$

$a^2\downarrow b^2K^2$; $c^2\downarrow d^2K^2$

Reduciendo y factorizando, tenemos

$$(9K^2-4)\times\underbrace{(b^2+15d^2)}_{>0}=0$$

$$9K^2-4=0\ \rightarrow\ K=\frac{2}{3}$$

Nos piden: $\frac{7b+d}{7a+c}$

Reemplazamos $a=bK;\ c=dK$

Tenemos:

$$\frac{7b+d}{7a+c}=\frac{7b+d}{7(bK)+dK}$$

$$\frac{7b+d}{7a+c}=\frac{7b+d}{K(7b+d)}$$

$$\frac{7b+d}{7a+c}=\frac{1}{K};\ \text{como } K=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{7b+d}{7a+c}=\frac{3}{2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 16

En una proporción geométrica continua, la suma de los antecedentes es 18 y la suma del primer y último término es 15. Calcule la suma de los cuatro términos de la proporción, si la razón es la menor posible y, además, es entera.

A) 15 B) 18 C) 24
D) 27 E) 30

Resolución

Sea la proporción continua $\frac{aK^2}{aK}=\frac{aK}{a}$; $K\in\mathbb{Z}$

Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} aK(K+1)=18 \\ a(K^2+1)=15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K=2 \text{ (mínimo valor)} \\ a=3 \end{array}$$

Luego

- Sabemos que la suma del primer y último término es 15.
- La suma de los términos medios es $2aK=2\times3\times2=12$.

Por lo tanto, la suma de los cuatro términos de la proporción es $15+12=27$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

Las edades de cuatro hermanos, de los cuales dos son mellizos, forman una proporción geométrica y la suma de las cuatro edades es a la mayor diferencia de edades como 3 es a 1. Calcule la suma de edades del mayor y el menor de ellos, si los mellizos tienen 18 años.

A) 27 B) 36 C) 45
D) 50 E) 66

Resolución

Las edades de los cuatro hermanos forman una proporción continua

$$\frac{nK^2}{nK}=\frac{nK}{n}=K$$

Las edades son

nK^2, $\underbrace{nK \;,\; nK}_{\text{mellizos: 18 años}}$ y n

Por dato:

$$\frac{nK^2+nK+nK+n}{nK^2-n}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{n(K+1)^2}{n(K+1)(K-1)}=\frac{3}{1} \rightarrow \frac{K+1}{K-1}=3$$

Operando, tenemos $K=2$

$$\rightarrow n\times \underbrace{K}_{2}=18 \rightarrow n=9$$

El mayor tiene $n\cdot K^2=9\cdot2^2=36$

El menor tiene $n=9$

Por lo tanto, suman $36+9=45$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

Si $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$ y $(a-m)(b-n)(c-p)=343$,

halle $\sqrt[3]{abc}-\sqrt[3]{mnp}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Si

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=K \rightarrow a=mK, b=nK, c=pK$$

Dato:

$$(a-m)(b-n)(c-p)=343$$

$$m(K-1)\times n(K-1)\times p(K-1)=343$$

$$m\times n\times p(K-1)^3=7^3$$

$$\sqrt[3]{mnp}\times(K-1)=7$$

Nos piden: $\sqrt[3]{abc}-\sqrt[3]{mnp}$

$$\underbrace{\sqrt[3]{mK\cdot nK\cdot pK}-\sqrt[3]{mnp}}_{\sqrt[3]{mnp}\times(K-1)}$$

$\therefore\quad \sqrt[3]{abc}-\sqrt[3]{mnp}=7$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Si $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ y

$$\frac{5a_1^2+6a_2^2+7a_3^2}{5b_1^2+6b_2^2+7b_3^2}=\frac{9}{1},$$

calcule $\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_1a_2}{b_1b_2}+\dfrac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}$.

A) 39 B) 27 C) 36
D) 30 E) 21

Resolución

La serie de razones $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=K$

Elevamos al cuadrado

$$\frac{a_1^2}{b_1^2}=\frac{a_2^2}{b_2^2}=\frac{a_3^2}{b_3^2}=K^2$$

$$\frac{5a_1^2}{5b_1^2}=\frac{6a_2^2}{6b_2^2}=\frac{7a_3^2}{7b_3^2}=K^2$$

$$\frac{5a_1^2+6a_2^2+7a_3^2}{5b_1^2+6b_2^2+7b_3^2}=K^2$$

$$\underbrace{\frac{5a_1^2+6a_2^2+7a_3^2}{5b_1^2+6b_2^2+7b_3^2}}_{9}=K^2$$

$K=3$

Nos piden

$$\underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{K}+\underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{K}\cdot\underbrace{\frac{a_2}{b_2}}_{K}+\underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{K}\cdot\underbrace{\frac{a_2}{b_2}}_{K}\cdot\underbrace{\frac{a_3}{b_3}}_{K}$$

$K+K\cdot K+K\cdot K\cdot K$

$K+\ K^2\ +\ K^3$

$3+\ 3^2\ +\ 3^3$

39

Clave **A**

PROBLEMA N.° 20

En la serie $\dfrac{a}{65}=\dfrac{6}{b}=\dfrac{c}{35}=\dfrac{10}{d}$

se tiene que a, d, b y c forman una proporción aritmética. Calcule $a+b+c+d$.

A) 60 B) 36 C) 80
D) 74 E) 72

Resolución

Se tiene $\dfrac{a}{65}=\dfrac{6}{b}=\dfrac{c}{35}=\dfrac{10}{d}$

Además

$a-d=b-c\rightarrow\quad a+c=b+d$

Sabemos que

$$\frac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}}=\text{razón}$$

Luego, en la serie

$$\frac{a+c}{65+35}=\frac{6+10}{b+d}$$

$(a+c)(b+d)=100\times16$

$(a+c)^2=100\times16$

$a+c=40$

$\therefore\quad a+b+c+d=80$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

En una serie, la suma de los términos de cada razón es 35; 42 y 63, respectivamente. Si la mayor razón aritmética de dos consecuentes es 12, halle la relación de los dos mayores antecedentes.

A) 1/2 B) 2/3 C) 3/5
D) 5/6 E) 9/5

Resolución

La serie tiene 3 razones geométricas:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

Dato:

$a+b=35$ (menores términos)
$c+d=42$
$e+f=63$ (mayores términos)

Por propiedad

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{e+f}$$

$$\frac{a}{35}=\frac{c}{42}=\frac{e}{63}$$

Los mayores antecedentes son c y e.

La relación entre c y e $\frac{c}{42}=\frac{e}{63}$

$$\therefore \quad \frac{c}{e}=\frac{2}{3}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 22

Sea la siguiente serie:

$$\frac{x^2+1}{40+b}=\frac{2x}{41-b}=\frac{4x^2+1}{143+2b}$$

Calcule $x+b$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 12

Resolución

Del dato:

$$\frac{x^2+1}{40+b}=\frac{2(2x)}{2(41-b)}=\frac{4x^2+1}{143+2b}=\text{razón}$$

Sabemos que

$$\frac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}}=\text{razón}$$

$$\frac{(x^2+1)+2x}{(40+b)+(41-b)}=\frac{2(2x)+(4x^2+1)}{2(41-b)+(143+2b)}=\text{razón}$$

$$\frac{(x+1)^2}{81}=\frac{(2x+1)^2}{225}$$

$$\frac{x+1}{9}=\frac{2x+1}{15} \quad \rightarrow \quad x=2$$

Luego, reemplazamos x en

$$\frac{x^2+1}{40+b}=\frac{(x+1)^2}{81}$$

$$\frac{5}{40+b}=\frac{3^2}{81} \quad \rightarrow \quad b=5$$

$$\therefore \quad x+b=7$$

Clave D

PROBLEMA N.° 23

Sea $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=K \quad (K \in \mathbb{Z})$

Además $\frac{(A+B)}{(b+c)}\times\frac{(B+C)}{(a+b)}=25$

Calcule J si

$$J=\sqrt{\frac{5A+5B}{a+b}}+\frac{A^2+B^2}{a^2+b^2}+\frac{B+C}{b+c}.$$

A) 35 B) 25 C) 20
D) 40 E) 38

Resolución

Por dato: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=K$

Por propiedad

- $\frac{A+B}{a+b}=\frac{B+C}{b+c}=K$
- $\frac{A^2}{a^2}=\frac{B^2}{b^2}=\frac{A^2+B^2}{a^2+b^2}=K^2$

En el dato, luego de ordenar en los denominadores, tenemos

$$\underbrace{\frac{A+B}{a+b}}_{K}\times\underbrace{\frac{B+C}{b+c}}_{K}=25$$

$$K \times K = 25$$
$$K = 5$$

Calculamos J

$$J=\sqrt{5\underbrace{\frac{A+B}{a+b}}_{K}}+\underbrace{\frac{A^2+B^2}{a^2+b^2}}_{K^2}+\underbrace{\frac{B+C}{b+c}}_{K}$$

$$J=\sqrt{5\cdot 5}+5^2+5$$

$\therefore\ J=35$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Se tiene la siguiente serie de razones geométricas equivalentes:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=K\,;\,K\in\mathbb{Z}$$

Halle $M=n+K+\frac{a_1\times b_n+P}{P+b_1\times a_n}$,

si $\sum_{i=2}^{n}\sqrt[i]{\frac{a_1\times a_2\times\cdots\times a_i}{b_1\times b_2\times\cdots\times b_i}}=323$ y $n>K$

A) 12 B) 50 C) 100
D) 38 E) 40

Resolución

Del dato:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=K;\ K\in\mathbb{Z}$$

Observamos que

$$a_1\times b_n=b_1\times a_n$$

Entonces

$$M=n+K+\frac{a_1\times b_n+P}{P+b_1\times a_n}$$

$$M=n+K+1$$

Luego

$$\sum_{i=2}^{n}\sqrt[i]{\frac{a_1\times a_2\times\cdots\times a_i}{b_1\times b_2\times\cdots\times b_i}}=323 \quad y \quad n>K$$

Recuerda

$$\frac{a_1\times a_2\times\cdots\times a_i}{b_1\times b_2\times\cdots\times b_i}=K^i$$

Entonces

$$\sum_{i=2}^{n}\sqrt[i]{K^i}=323$$

$$\sum_{i=2}^{n}K=323$$

$$(n-1)K=323=19\times 17$$

$\rightarrow\ n=20\ \wedge\ K=17$

$\therefore\ M=n+K+1=38$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{11}$

Además, $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$; $\frac{y}{z}=\frac{5}{7}$,

determine el menor valor numérico de

$\sqrt{\frac{14}{11}abc}$; $\{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}^+$

A) 210 B) 330 C) 1155
D) 2310 E) 2431

Resolución

Tenemos

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{11}$$

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=11$$

Despejando

$a=11x \quad b=11y \quad c=11z$

Nos piden a, b y c mínimos, entonces x, y, z son mínimos.

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{y}{z}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{x}{2.5}=\frac{y}{3.5} \quad = \quad \frac{y}{5\cdot 3}=\frac{z}{7\cdot 3}$$

$$\rightarrow \frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}$$

Los mínimos valores enteros

$x=10 \rightarrow a=11\times 10$

$y=15 \rightarrow b=11\times 15$

$z=21 \rightarrow c=11\times 21$

Nos piden el mínimo valor de

$$\sqrt{\frac{14}{11}\cdot a\cdot b\cdot c}$$

$$\sqrt{\frac{14}{11}\cdot(11\cdot 10)(11\cdot 15)(11\cdot 21)}=2310$$

Por lo tanto, el mínimo valor es 2310.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 26

En un ómnibus, en el cual viajan 36 caballeros, 38 damas y cierta cantidad de niños, el cobrador observa que por cada 3 caballeros que bajan, bajan 2 damas y suben 5 niños. Si cuando llegan al paradero final el número de caballeros, damas y niños se encuentra en la relación de 4; 5 y 7, respectivamente, entonces, ¿cuántos niños llegaron al paradero final?

A) 20 B) 22 C) 32
D) 40 E) 42

Resolución

Del enunciado

	Caballeros	Damas	Niños
Al inicio	36	38	a
Bajan	$3K$	$2K$	0
Suben	0	0	$5K$

Cuando llegan al paradero final, se tiene

$$\underbrace{\frac{36-3K}{4}=\frac{38-2K}{5}}_{K=4}=\frac{a+5K}{7}$$

$$\rightarrow a+5K=7\times\left(\frac{36-3K}{4}\right)=42$$

Por lo tanto, al paradero final llegan 42 niños.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 27

En una caja se tienen fichas azules, blancas y rojas; además, por cada tres rojas hay una azul y las blancas representan la cuarta parte del total. Si se extraen tantas rojas como azules se agregan, la nueva relación entre ellas será de 11 a 7, respectivamente.
¿Cuántas fichas rojas había al inicio, dado que al final hay 14 fichas azules más que blancas?

A) 189 B) 63 C) 112
D) 128 E) 1

Resolución

Se tienen fichas azules (A), blancas (B) y rojas (R):

$$\frac{R}{3}=\frac{A}{1} \quad \text{y} \quad \frac{B}{1}=\frac{B+R+A}{4}$$

$$\frac{R}{3}=\frac{A}{1}=\frac{R+A}{4}; \quad \frac{R+A}{3}=\frac{B}{1}$$

$$\frac{R}{3\cdot 3}=\frac{A}{1\cdot 3}=\frac{R+A}{4\cdot 3} = \frac{R+A}{3\cdot 4}=\frac{B}{1\cdot 4}$$

Tenemos

$$\frac{R}{9}=\frac{A}{3}=\frac{B}{4} \rightarrow \begin{array}{l} R=9K \\ A=3K \\ B=4K \end{array}$$

Se extraen tantas rojas como azules se agregan, entonces, el total de azules más rojas al inicio y al final es la misma.

$$\underbrace{\text{rojas + azules}}_{\text{Al inicio}} = \underbrace{\text{rojas + azules}}_{\text{Al final}}$$

$$\underbrace{9(K) + 3(K)}_{12\times(K)} = \underbrace{11\times a \quad 7\times a}_{18\times a}$$

$$12\times(K) \rightarrow 3n \qquad 18\times a \rightarrow 2n$$

entonces $K=3n$ y $a=2n$

	rojas	azules	blancas
Al inicio →	$9\times(3n)$	$3\times(3n)$	$4\times(3n)$
	$12\times(3n)=36n$		iguales
Al final →	$11\times(2n)$	$7\times(2n)$	$12n$
	$18\times(2n)=36n$		

Por dato, al final se tiene:

$$(\text{N.° azules}) - (\text{N.° blancas}) = 14$$

$$14n - 12n = 14$$

$$n=7$$

El número de bolas rojas al inicio es

$27n=27\times 7$

$\therefore\ 27n=189$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

En un colegio se tomaron tres exámenes eliminatorios a un grupo de estudiantes, con la condición de que para rendir un examen es necesario aprobar el examen anterior. Si la razón de los que aprobaron y no aprobaron el primer, segundo y tercer examen es 10/7, 3/5 y 1/2, respectivamente, calcule la diferencia entre el número de aprobados y desaprobados en el primer y segundo examen, respectivamente, ya que solo 10 aprobaron el tercer examen.

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50

Resolución

Del enunciado, se tiene que los que aprueban el primer examen son los que rinden el segundo examen y los que aprueban el segundo examen son los que rinden el tercer examen, entonces

Examen	1.er	2.o	3.er
Aprueban	$10 \cdot 4 \cdot K$	$3 \cdot 5 \cdot K$	$1 \cdot 5 \cdot K$
Desaprueban	$7 \cdot 4 \cdot K$	$5 \cdot 5 \cdot K$	$2 \cdot 5 \cdot K$
Total	$17 \cdot 4 \cdot K$	$8 \cdot 5 \cdot K$	$3 \cdot 5 \cdot K$

Como $5K=10 \rightarrow K=2$

$$\underbrace{40K}_{\text{Aprobados en el primer examen}} - \underbrace{25K}_{\text{Desaprobados en el segundo examen}} = 15K = 30$$

Por lo tanto, la diferencia entre el número de aprobados y desaprobados en el primer y segundo examen, respectivamente, es 30.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

Un ciclista sube una cuesta y la baja con velocidades en la relación de 4 a 11, respectivamente. Si emplea 14 horas más en subir que en bajar y ahora duplica su velocidad de subida, ¿en cuánto tiempo llegará a la cima?

A) 10 horas B) 14 horas C) 13 horas
D) 11 horas E) 12 horas

Resolución

Al subir y bajar la cuesta recorre el mismo espacio, con velocidades en relación de 4 a 11; los tiempos respectivos están en relación inversa, es decir, de 11 a 4 y se diferencian en 14 horas.

	Velocidades	Tiempos
Subida	$4a$	$11b$
Bajada	$11a$	$4b$

$$11b-4b=14$$
$$b=2$$

En subir demora $11b=22$ horas

Si ahora duplica la velocidad de subida, entonces demora la mitad del tiempo, es decir

$$\frac{22}{2}\text{ h} = 11 \text{ horas}$$

Por lo tanto, el ciclista llegará a la cima en 11 h.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Las edades de Juan y Luis, hace $2n$ años, estuvieron en la relación de 3 a 4, respectivamente, pero dentro de unos años, el doble del anterior, estarán en la relación de 5 a 6. Halle la menor edad, si actualmente sus edades suman 75 años.

A) 30 B) 32 C) 33
D) 35 E) 38

Resolución

Recuerda

La diferencia de edades entre dos personas siempre es constante.

$2n$ años $4n$ años

	Pasado	Presente	Futuro
Juan	$3K$	$3K+2n$	$5K$
Luis	$4K$	$4K+2n$	$6K$

Vemos que

$5K-3K=2n+4n=6n$

$K=3n$

Además

$(3K+2n)+(4K+2n)=75$

$25n=75$

$n=3 \rightarrow 3K+2n=11n$

Por lo tanto, la menor edad es 33 años.

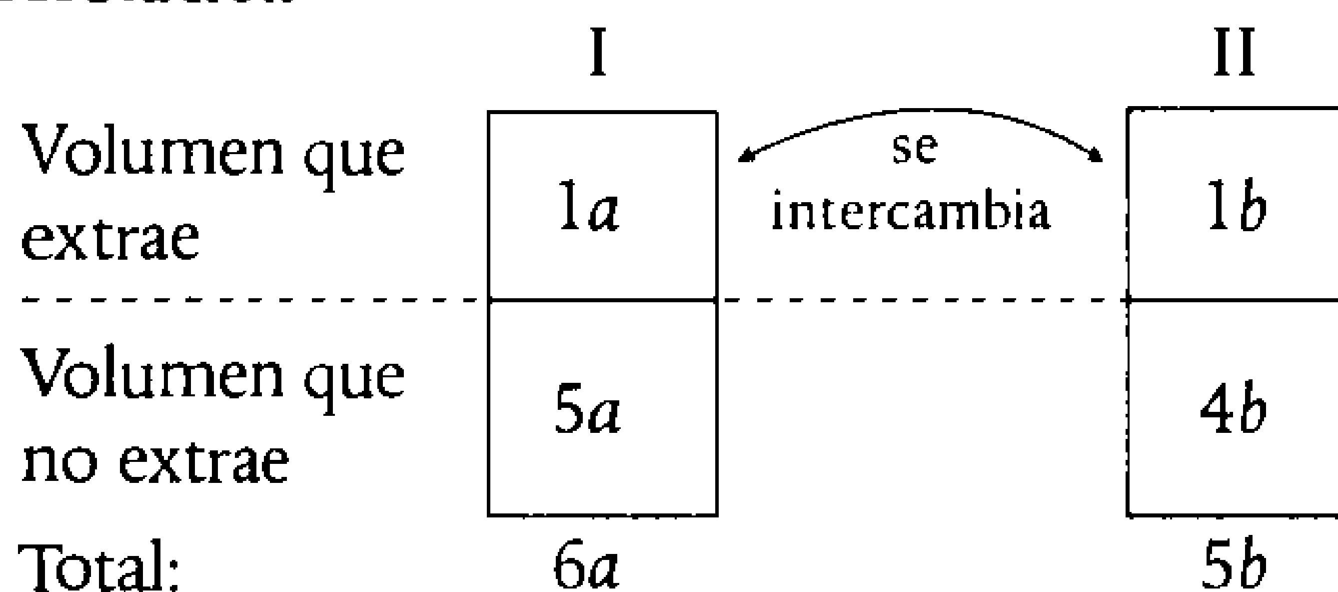
Clave C

PROBLEMA N.° 31

Se tienen dos recipientes que contienen cantidades diferentes de agua. Del primero se extrae una cantidad de agua igual a la quinta parte de lo que no se extrae y del segundo se extrae la cuarta parte de lo que no se extrae; además, cada cantidad extraída es vertida en el otro recipiente para obtener volúmenes iguales. ¿Qué parte del volumen de agua debió extraerse del segundo recipiente y vertirle en el primero para que el volumen sea el mismo en ambos recipientes?

A) 1/10 B) 2/5 C) 1/20
D) 3/20 E) 1/18

Resolución



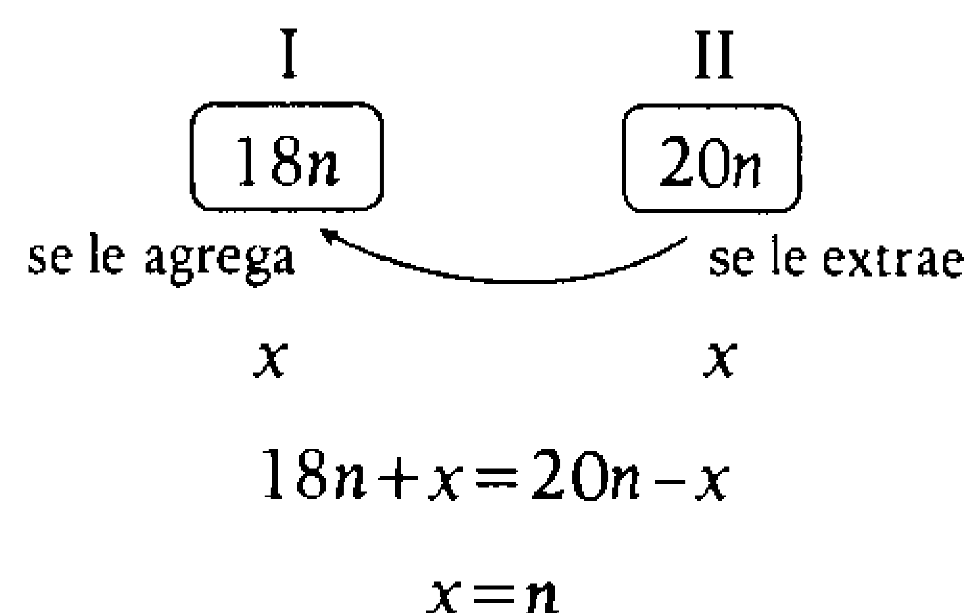
Luego del intercambio, los volúmenes son iguales

$5a+b=4b+a$

$4a=3b \rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{4}=n$

$a=3n \wedge b=4n$

Los volúmenes eran



$18n+x=20n-x$

$x=n$

Al segundo se le extrae n de $20n$ para que al vertirlo en el primero tengan igual volumen.

$<> \frac{n}{20n}=\frac{1}{20}$

Clave C

PROBLEMA N.° 32

En un examen de admisión a una universidad nacional, la relación de vacantes y postulantes es de 4 a 15; pero si aumentara en 1500 la cantidad de postulantes, la nueva relación sería de 2 a 15. ¿Cuántas vacantes deben aumentar para que, al incrementar en 4500 los postulantes, no ingresen 12 alumnos de cada 15 postulantes?

A) 927 B) 540 C) 800
D) 700 E) 420

Resolución

En la primera suposición, observe que la cantidad de vacantes no cambia, entonces

	Real	Suposición
Vacantes	$4K$	$2\times2\times K$
Postulantes	$15K$	$15\times2\times K$

$30K-15K=1500 \rightarrow K=100$

Luego, de cada 15 postulantes no ingresan 12 alumnos, es decir, la relación entre la cantidad de vacantes y postulantes será de 1 a 5 (ingresan 3 alumnos de cada 15 postulantes).
Sea V la cantidad de vacantes que se debe aumentar, tenemos

$$\frac{400+V}{1500+4500}=\frac{1}{5}; \quad V=800$$

Por lo tanto, deben aumentar 800 vacantes.

Clave **C**

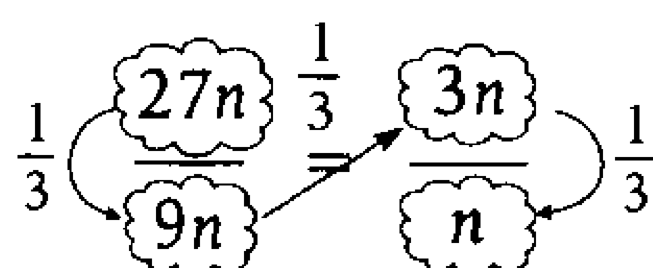
PROBLEMA N.° 33

En una proporción discreta, cada término es la tercera parte del que le precede, además, la suma de extremos es 196. Calcule la suma de los términos medios.

A) 84 B) 42 C) 21
D) 7 E) 3

Resolución

En la proporción, cada término es la tercera parte del que le precede (el anterior).
Entonces, el primer término debe tener 3 veces tercera parte; asumimos que el primer término es $3^3n=27n$.



Suma de extremos
$27n+n=196$
$n=7$

Suma de términos medios $=9n+3n$
$=9\times7+3\times7=84$

Por lo tanto, la suma de términos medios es 84.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

La suma de los términos de una proporción continua es 252 y la diferencia de los términos extremos es 168. Calcule la suma de antecedentes de dicha proporción, si la constante es menor que uno.

A) 37 B) 42 C) 56
D) 64 E) 70

Resolución

Sea la proporción continua

$$\frac{aK^2}{aK}=\frac{aK}{a}; \quad K<1$$

Tenemos

$aK^2+2aK+a=252$
$a(K+1)^2=252$
$a-aK^2=168$ $\quad \div$
$a(1-K^2)=168$
$a(1-K)(1+K)=168$

$$\frac{K+1}{1-K}=\frac{3}{2}$$

$$K=\frac{1}{5}$$

Reemplazamos: $a=175$
Luego, la suma de antecedentes es $aK(K+1)$

$$\therefore \quad 175\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{5}=42$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

En una proporción geométrica continua, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos de la segunda razón como 2 es a 3. Si la suma de términos es 100, halle la media proporcional.

A) 16 B) 24 C) 27
D) 30 E) 32

Resolución

Sea la proporción continua

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+b}{b+c}=K$$

Dato:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{3}\rightarrow\frac{a+b}{b+c}=\frac{2}{3}$$

Como la constante es $K=\frac{2}{3}$, la proporción será

$$\frac{4n}{6n}=\frac{6n}{9n}=\frac{2}{3}$$

(numeradores y denominadores multiplicados por 2^2)

Suma de términos: $4n+6n+6n+9n=100$

$n=4$

Por lo tanto, la media proporcional es

$6n=6\times4=24$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

Si se cumple que

$$\frac{\sqrt{a^2-18}}{3}=\frac{\sqrt{b^2-98}}{7}=\frac{\sqrt{c^2-32}}{4}=2,$$

calcule $E=\sqrt{a^2+27}+\sqrt{b^2+147}+\sqrt{c^2+48}$

A) 20 B) 28 C) 42
D) 38 E) 56

Resolución

Tenemos

$$\frac{\sqrt{a^2-18}}{3}=\frac{\sqrt{b^2-98}}{7}=\frac{\sqrt{c^2-32}}{4}=2$$

Elevamos al cuadrado

$$\frac{a^2-18}{9}=\frac{b^2-98}{49}=\frac{c^2-32}{16}=4$$

$$\frac{a^2}{9}-\frac{18}{9}=\frac{b^2}{49}-\frac{98}{49}=\frac{c^2}{16}-\frac{32}{16}$$

$$\frac{a^2}{9}=\frac{b^2}{49}=\frac{c^2}{16}=6$$

$a^2=54;\ b^2=294\ \wedge\ c^2=96$

Piden

$$E=\sqrt{a^2+27}+\sqrt{b^2+147}+\sqrt{c^2+48}$$

$\therefore\ E=9+21+12=42$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

En una serie de razones geométricas continuas y equivalentes, la razón entre el primer antecedente y el último es dieciséis veces la razón del primer consecuente y penúltimo antecedente. Si la suma de las razones entre el primer antecedente y cada consecuente hasta el penúltimo es igual a $\overline{(2a+1)bc(a-2)}$, calcule la cantidad de razones.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Sean n razones en la serie continua

$$\overbrace{\frac{\boxed{pK^n}}{\boxed{pK^{n-1}}}=\frac{pK^{n-1}}{pK^{n-2}}=\cdots=\frac{\boxed{pK^2}}{pK}=\frac{\boxed{pK^1}}{p}}^{n\text{ razones}}=K$$

Dato:

$$\frac{\boxed{pK^n}}{\boxed{pK^1}}=16\times\frac{\boxed{pK^{n-1}}}{\boxed{pK^2}}\rightarrow\frac{K^n\cdot K^2}{K^{n-1}\cdot K}=16$$

$\rightarrow\ K=4$

Tenemos

$$\frac{p\cdot K^n}{p\cdot K^{n-1}}+\frac{pK^n}{p\cdot K^{n-2}}+\frac{p\cdot K^n}{p\cdot K^{n-3}}+\cdots+\frac{pK^n}{p}=\overline{(2a+1)bc(a-2)}$$

$$K + K^2 + K^3 +\cdots+ K^n = \overline{(2a+1)bc(a-2)}$$

$$1+4 + 4^2 + 4^3 +\cdots+ 4^n = \underbrace{\overline{(2a+1)bc(a-2)}}_{\text{número par}}+1$$

$a=2$ ó 4

Ejecutamos

$$\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\overline{(2a+1)bc(a-1)}$$

$\rightarrow\ a=2\ \wedge\ n=6$

$$\underbrace{4^{n+1}}-1=\underbrace{\overline{(2a+1)bc(a-1)}}\ \times 3$$

4^6	1 3 6 5	No cumple
4^7	5 4 6 1	Sí cumple

$\therefore\ n=6$ razones

Clave B

PROBLEMA N.° 38

En una serie de razones geométricas equivalentes, la suma de las raíces cuadradas del producto de los términos de cada razón es a la suma de las razones aritméticas de los términos de cada razón como 4 es a 15. Determine la suma de consecuentes, si los antecedentes suman 240.

A) 10 B) 12 C) 18
D) 16 E) 15

Resolución

Sea la serie de razones geométricas equivalentes

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=K$$

Del dato:

$$\frac{\sqrt{a_1\times b_1}+\sqrt{a_2\times b_2}+\sqrt{a_3\times b_3}+\cdots+\sqrt{a_n\times b_n}}{(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_n-b_n)}=\frac{4}{15}$$

De la serie

$$a_1=b_1K;\ a_2=b_2K;\ \ldots;\ a_n=b_nK$$

Reemplazando, tenemos

$$\frac{b_1\sqrt{K}+b_2\sqrt{K}+b_3\sqrt{K}+\ldots+b_n\sqrt{K}}{b_1(K-1)+b_2(K-1)+b_3(K-1)+\ldots+b_n(K-1)}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{\sqrt{K}}{K-1}=\frac{4}{15}\ \rightarrow\ K=16$$

Además, la suma de antecedentes es 240.

Sabemos que

$$\frac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}}=K$$

Por lo tanto, la suma de consecuentes es

$$\frac{240}{46}=15.$$

Clave E

PROBLEMA N.° 39

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=2$; y además

$\frac{\sqrt{a\cdot e}}{a+e}=\frac{6}{13}$; $b\times f=144$, calcule $a\times d\times e$.

Considere que $b+d+f=30$

A) 1832 B) 1956 C) 2124
D) 2230 E) 2304

Resolución

Tenemos como dato:

- $b+d+f=30$ (I)
- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=2 \rightarrow \begin{matrix} a=2b \\ e=2f \end{matrix}$
- $\frac{\sqrt{a\cdot e}}{a+e}=\frac{6}{13}$

$$\frac{\sqrt{(2b)(2f)}}{2b+2f}=\frac{\sqrt{36}}{13}$$

Simplificando y dando forma

$$\frac{\sqrt{b\times f}}{b+f}=\frac{\sqrt{9\times 4}}{9+4} \quad \Bigg| \quad \frac{b}{f}=\frac{9}{4}$$

Como $b\times f=144$

$$\frac{\sqrt{144}}{b+f}=\frac{6}{13} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} b+f=26 \\ 9(K)+4(K)=26 \\ K=2 \end{matrix}$$

Tenemos

$b=18 \rightarrow a=2\times 18=36$
$f=8 \rightarrow e=2\times 8=16$

En (I) $\underbrace{b+f}_{26}+d=30 \rightarrow d=4$

$\therefore\ a\times d\times e=36\times 4\times 16=2304$

Clave E

PROBLEMA N.° 40

Si $\frac{a+123b}{b}=\frac{e+123f}{f}=\frac{c+123d}{d}$

y $(b+d+f)(a+e+c)=2809$, calcule

$M=\sqrt{ab}+\sqrt{ef}+\sqrt{cd}$

A) 21 B) 29 C) 53
D) 33 E) 59

Resolución

Tenemos

$$\frac{a+123b}{b}=\frac{e+123f}{f}=\frac{c+123d}{d}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{123b}{b}=\frac{e}{f}+\frac{123f}{f}=\frac{c}{d}+\frac{123d}{d}$$

Luego $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}=\frac{c}{d}=K$

Sabemos que

$$\boxed{\frac{a+e+c}{b+f+d}=K}$$

Además

$$(b+d+f)\underbrace{(a+e+c)}_{(b+d+f)K}=2809$$

$K(b+d+f)^2=2809$

$\sqrt{K}\cdot(b+d+f)=53$

Piden

$$M=\underset{bK}{\sqrt{ab}}+\underset{fK}{\sqrt{ef}}+\underset{dK}{\sqrt{cd}}$$

$M=b\sqrt{K}+f\sqrt{K}+d\sqrt{K}$

$M=\sqrt{K}(b+f+d)$

$\therefore\ M=53$

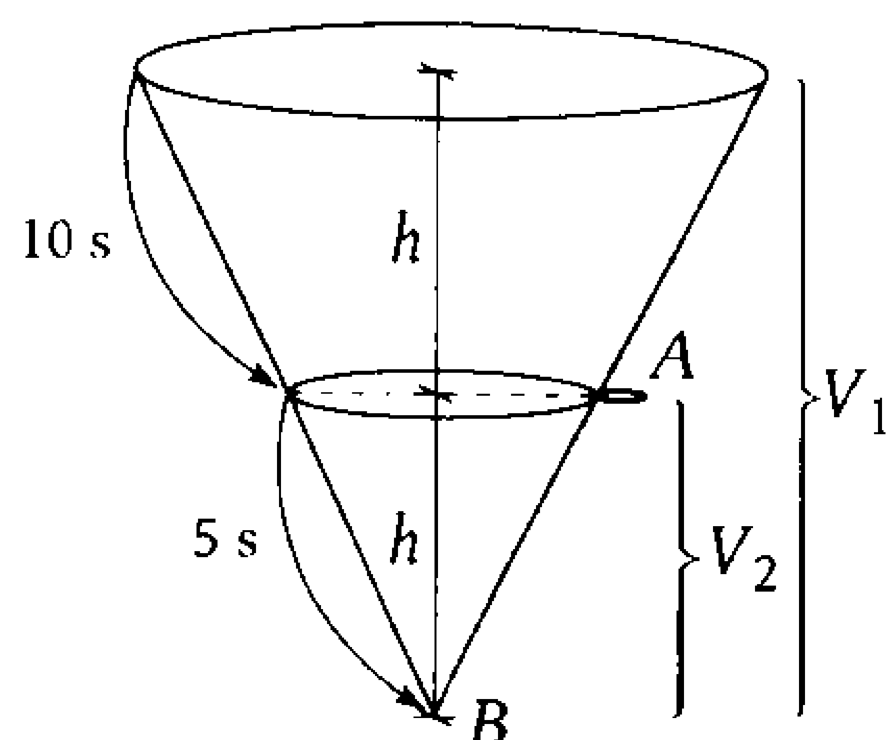
Clave C

PROBLEMA N.° 41

En una fábrica, se tiene un embudo industrial en el cual se vierte miel de abeja, pero se dan cuenta de que en la mitad hay un agujero por el cual, durante 10 segundos, se perdió 400 mL de miel de abeja y, 5 segundos más tarde, se terminó de verter todo su contenido. Halle la capacidad del embudo.

A) 1 L B) 640 mL C) 4 L
D) 500 mL E) 2 L

Resolución



- Por A, durante 10 segundos, se perdió 400 mL.
- Asumimos que por B sale a mL por segundo.
- El volumen V_1 es la suma de lo que sale por A durante 10 segundos más lo que sale por B durante 15 segundos.
  $V_1=400+15a$ (I)
- El volumen V_2 sale por B durante 5 s.
  $V_2=5a$
- Volumen DP (altura)^3 $\rightarrow$ $\dfrac{V_1}{(2h)^3}=\dfrac{V_2}{h^3}$

Reemplazamos V_1 y V_2

$$\frac{400+15a}{8}=\frac{5a}{1} \rightarrow a=16$$

En (I)

$V_1=400+15\times 16$

$\therefore$ $V_1=640$ mL

Clave B

PROBLEMA N.° 42

Un recipiente contiene vino y agua en la relación de 5 a 4. Si se agregan 9 L de vino, la nueva relación es de 2 a 1. Halle el volumen de la mezcla inicial.

A) 20 L B) 25 L C) 30 L
D) 28 L E) 27 L

Resolución

Como solo se agrega vino, entonces, el volumen de agua al inicio y al final es el mismo.

	Inicio	Final
Vino (L)	$5\times K$	$2\times 4K$
Agua (L)	$4\times K$	$1\times 4K$

Luego

$5K+9=8K \rightarrow 3K=9$

Por lo tanto, el volumen de la mezcla inicial es $9K=27$ L

Clave E

PROBLEMA N.° 43

En dos casas se celebran un matrimonio y un quinceañero, respectivamente, y curiosamente hay la misma cantidad de personas en cada casa. Por cada 5 personas que se retiran del matrimonio, de la otra casa salen 3 para entrar al matrimonio y una para irse a su casa. Cuando quedan 50 personas en el matrimonio, resulta que hay 20 en el quinceañero, entonces, ¿cuántas personas había en total en cada casa al inicio?

A) 80 B) 120 C) 90
D) 160 E) 95

Resolución

	Al inicio	Salen	Entran	Al final	
Matrimonio	A	$5n$	$3n$	$A-5n+3n=50$	$\rightarrow A=50+2n$
Quinceañero	B	$4n$	0	$B-4n=20$	$\rightarrow B=20+4n$

Del dato: al inicio hay la misma cantidad $A=B \rightarrow 50+2n=20+4n \rightarrow n=15$

Al inicio cada casa tenía $B=20+4\times 15=80$

Por lo tanto, en cada casa había 80 personas al inicio.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 44

En una reunión se encuentran Pedro, Juan y Carlos. Carlos indica que la relación de edades de Pedro y Juan es de 3 a 5, respectivamente, pero dentro de $2n$ años la edad de Pedro coincidirá con la edad actual de Juan. Halle la edad de Carlos dentro de 10 años si es máxima, además, Pedro y Juan son mayores de edad y la suma de las tres edades hace 10 años era 58 años.

A) 50 años
B) 40 años
C) 32 años
D) 82 años
E) 17 años

Resolución

Si hace 10 años sus edades sumaban 58 años, hoy suman $58+3\times 10=88$ años.

Hoy	Pedro	Juan	Carlos	
	↓	↓	↓	
	$3K$	$5K$	n	años

Además

- $3K \geq 18 \ \wedge \ 5K \geq 18 \rightarrow K \geq 6$
- n es máximo.

Luego $8K+n=88;$

$K \downarrow 6$, $n \downarrow 40$

Por lo tanto, la edad de Carlos dentro de 10 años será 50 años.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Rosario y José salen de sus casas para encontrarse en la UNI, que está ubicada entre ambas casas, y lo hacen con velocidades que son proporcionales a 5 y 3, respectivamente. Al final, Rosario tuvo que esperar 5 minutos para encontrarse con José. ¿Cuánto tiempo tendría que esperar José para encontrarse con Rosario, si ellos intercambian sus velocidades? Considere que al inicio José tardó 25 minutos en llegar a la UNI.

A) 15 min y 10 s
B) 18 min y 20 s
C) 20 min y 30 s
D) 12 min y 10 s
E) 16 min y 4 s

Resolución

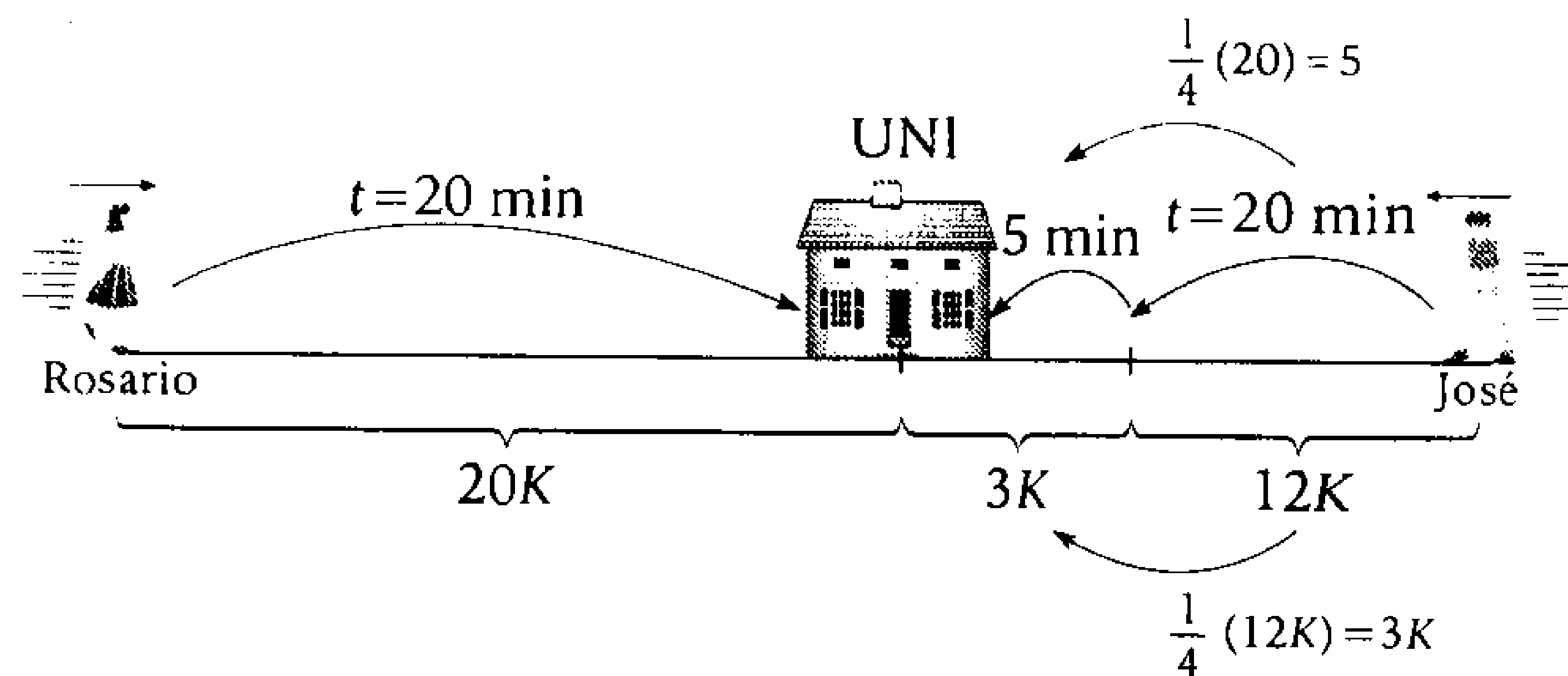
De los datos:

- José tarda 25 min en llegar a la UNI y Rosario esperó 5 min para encontrarse con José.

Entonces, Rosario llegó en 20 minutos si asumimos que recorre $20K$ ⟩ Rosario cada minuto recorre K

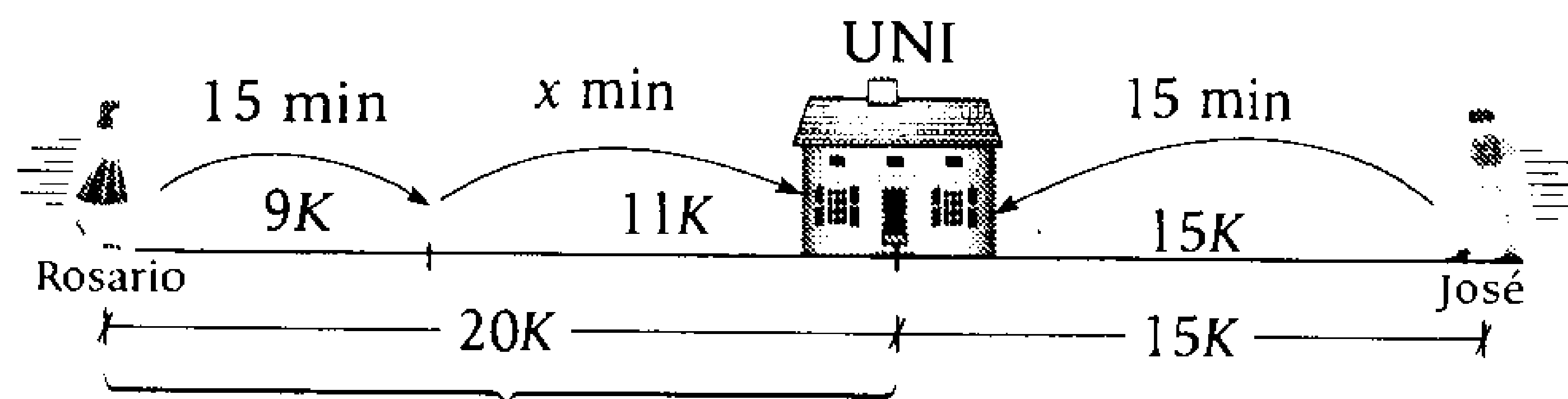
Del dato: por cada 5 que recorre Rosario, José recorre 3.

$$\frac{e_{Rosario}}{e_{José}}=\frac{5\times \mathbf{4K}}{3\times \mathbf{4K}}\left\}\begin{matrix} e_{Rosario}=20K \\ e_{José}=12K \end{matrix}\right.$$



Al intercambiar velocidades, José recorre en cada minuto K.

$\dfrac{e_{José}}{e_{Rosario}}=\dfrac{5\times 3K}{3\times 3K}$; José recorre $15K$ en 15 min y Rosario recorre $9K$.



$$\begin{matrix} 15\,\text{min} \text{ — } 9K \\ x\,\text{min} \text{ — } 11K \end{matrix} \rightarrow \frac{15\,\text{min}}{9K}=\frac{x\,\text{min}}{11K}$$

$$x=\frac{55}{3}\text{min}=18\,\text{min}\ \frac{1}{3}\text{min} <> 18\,\text{min}\ 20\ \text{s}$$

Por lo tanto, José espera 18 minutos 20 segundos.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 46

En una proporción geométrica, los términos medios son números consecutivos y la suma de términos es 52. Si la constante de la proporción es entera, halle la suma de los términos medios.

A) 15 B) 17 C) 18
D) 19 E) 21

Resolución

Sea la proporción

$$\frac{(aK+1)K}{aK+1}=\frac{aK}{a};\quad K\in\mathbb{Z}$$

Además

$$(aK+1)K+(aK+1)+aK+a=52$$

$$(aK+1)(K+1)+a(K+1)=52$$

$$(K+1)[a(K+1)+1]=2\times 2\times 13$$

$$\rightarrow\ K=3\ \wedge\ a=3$$

Piden

$$(aK+1)+aK=2aK+1=19$$

Por lo tanto, la suma de los términos medios es 19.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 47

En una proporción geométrica continua, los términos extremos están en la relación de 9 a 25 y la suma de los términos es 192. Halle la media proporcional.

A) 40 B) 45 C) 50
D) 55 E) 60

Resolución

Sea la proporción continua

$$\frac{25n}{b}=\frac{b}{9n}\ \rightarrow\ 25\cdot 9\cdot n^2=b^2\ \rightarrow\ 15n=b$$

Suma de los cuatro términos

$$25n+15n+15n+9n=192$$

$$64n=192\ \rightarrow\ n=3$$

Reemplazamos n

$$b=15\times 3\ \rightarrow\ b=45$$

Por lo tanto, la media proporcional es 45.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 48

Si $\frac{a}{b+3}=\frac{c^2}{8}=\frac{4b}{c}$

además, $c\times b=8$, calcule $a+b+c$.

A) 8 B) 16 C) 12
D) 120 E) 24

Resolución

Tenemos $\frac{a}{b+3}=\frac{c^2}{8}=\frac{4b}{c}$

Además

$$c\times b=8$$

Luego

$$\frac{c^2}{8}=\frac{4b}{c}\times\frac{c}{c}=\frac{4\times 8}{c^2};$$

$$c^4=4\times 8^2;\ c=4\ \rightarrow\ b=2$$

Reemplazamos en la serie

$$\frac{a}{5}=\frac{4^2}{8};\ a=10$$

$$\therefore\ a+b+c=16$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 49

En una serie de n razones geométricas iguales y continuas de razón 4, la diferencia entre el mayor y menor de sus términos es 12285. Halle la suma de las cifras de la suma de los antecedentes.

A) 19 B) 21 C) 16
D) 18 E) 22

Resolución

Sea la serie continua de razón 4

$$\overbrace{\frac{4^n a}{4^{n-1}a}=\frac{4^{n-1}a}{4^{n-2}a}=\dots=\frac{4^3a}{4^2a}=\frac{4^2a}{4a}=\frac{4a}{a}}^{n \text{ razones}}=4$$

Por dato:

$$\begin{pmatrix}\text{mayor}\\ \text{término}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{menor}\\ \text{término}\end{pmatrix}=12\,285$$

$$4^n\times a-a=12\,285$$

$$(4^n-1)a=12\,285$$

Nos piden suma de antecedentes

$$4^n\times a+4^{n-1}a+\dots+4^3a+4^2a+4a$$

$$=4\times a(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4^2+4+1)$$

$$=4\times a\times\left(\frac{4^n-1}{4-1}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\boxed{a\times(4^n-1)}\ 12\,285$$

$$=\underbrace{16\,380}$$

Suma de cifras $\rightarrow$ $1+6+3+8+0=18$

Clave D

PROBLEMA N.° 50

Si

$$\frac{a}{a+1}=\frac{3a}{b}=\frac{b+1}{c}$$

Además, $a+c=24$,

calcule $a\times b-c$.

A) 40 B) 50 C) 52
D) 64 E) 70

Resolución

Con $a+c=24$, se tiene

$$\frac{a}{a+1}=\frac{3a}{b}=\frac{b+1}{c}=\frac{a+b+1}{25}$$

(sumando antecedentes $+$ y consecuentes $+$)

Además, vemos que

$b=3(a+1)$

Reemplazando en la serie, tenemos

$$\frac{a}{a+1}=\frac{a+b+1}{25}=\frac{4(a+1)}{25}$$

$$4(a+1)^2=a\times 25$$

$\rightarrow$ $a=4$

Luego

$a+c=24$ $\rightarrow$ $c=20$

$b=3(a+1)$ $\rightarrow$ $b=15$

$\therefore$ $a\times b-c=40$

Clave A

Capítulo

13

Magnitudes proporcionales

En nuestro alrededor podemos percibir características propias de la materia (magnitud) que pueden compararse teniendo como referencia una de ellas (medición - cantidad). Por ejemplo, para medir el tiempo podemos tomar como unidad de medida el día, para medir el peso podemos tomar como unidad de medida un kilogramo.

Hay magnitudes que al variar su intensidad una de ellas genera que las otras también varíen en la misma proporción de aumento o disminución, por ejemplo: el número de panes que uno puede comprar y el costo a pagar por ellos, el tiempo que uno demora en llegar a su destino y la rapidez que utiliza en su desplazamiento. Pero hay casos en que no guardan proporcionalidad; por ejemplo, si queremos relacionar el peso de un recién nacido y el número de días que tiene de vida, lo haremos mediante una relación matemática más compleja. En el presente capítulo solo estudiaremos la relación proporcional entre magnitudes, para lo cual debemos reconocerlas y saberlas relacionar.

Capítulo 13

Magnitudes proporcionales

PROBLEMA N.° 1

Se sabe que 10 hombres y 10 mujeres pueden cosechar 20 hectáreas de trigo en 40 días. Después de 10 días de trabajo se retiran 2 hombres y 6 mujeres. Determine con cuántos días de retraso se terminará la cosecha, si el trabajo que hace un hombre equivale al de 2 mujeres.

A) 12   B) 13   C) 14
D) 15   E) 16

Resolución

La relación de eficiencias (e) es $\frac{e_{\text{varón}}}{e_{\text{mujer}}}=\frac{2}{1}$

Trabajan 10 varones y 10 mujeres, toda la obra la deben hacer en 40 días, pero luego de 10 días se retiran 2 varones y 6 mujeres; el trabajo que ellos no hacen en 30 días lo hacen los que quedan en los días adicionales (retraso).

Se retiran		Se quedan	
2 varones	6 mujeres	8 varones	4 mujeres
$e_v=2$	$e_m=1$	$e_v=2$	$e_m=1$
30 días no trabajan		n días adicionales	

Por ser la misma obra

(N.° personas) (eficiencia) (N.° días) = cte.

Reemplazando los datos, tenemos

$$2\times2\times30+6\times1\times30=8\times2\times n+4\times1\times n$$

$\therefore\ n=15$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Un grupo de obreros en 12 días ha avanzado los 2/5 de una obra. Si a partir de ese momento trabajan 5 obreros menos, por lo que la obra se culmina con 2 días de retraso, ¿cuántos obreros trabajaban inicialmente?

A) 32   B) 45   C) 50
D) 36   E) 40

Resolución

Comparamos las magnitudes

(Obra) DP (N.° de días)

$$\frac{\text{obra}}{\text{N.° de días}}=\text{cte.}$$

Si 2/5 de la obra se hace en 12 días, entonces el resto (3/5) de la obra la harán en 18 días.

(N.° de obreros) IP (N.° de días)

(N.° de obreros) (N.° de días) = cte.

Luego, como dejan de trabajar 5 obreros, los que quedan emplean 2 días más para terminar la obra.

Si inicialmente trabajan n obreros, entonces

$$n\times18=(n-5)\times20$$

$\therefore\ n=50$

Clave **C**

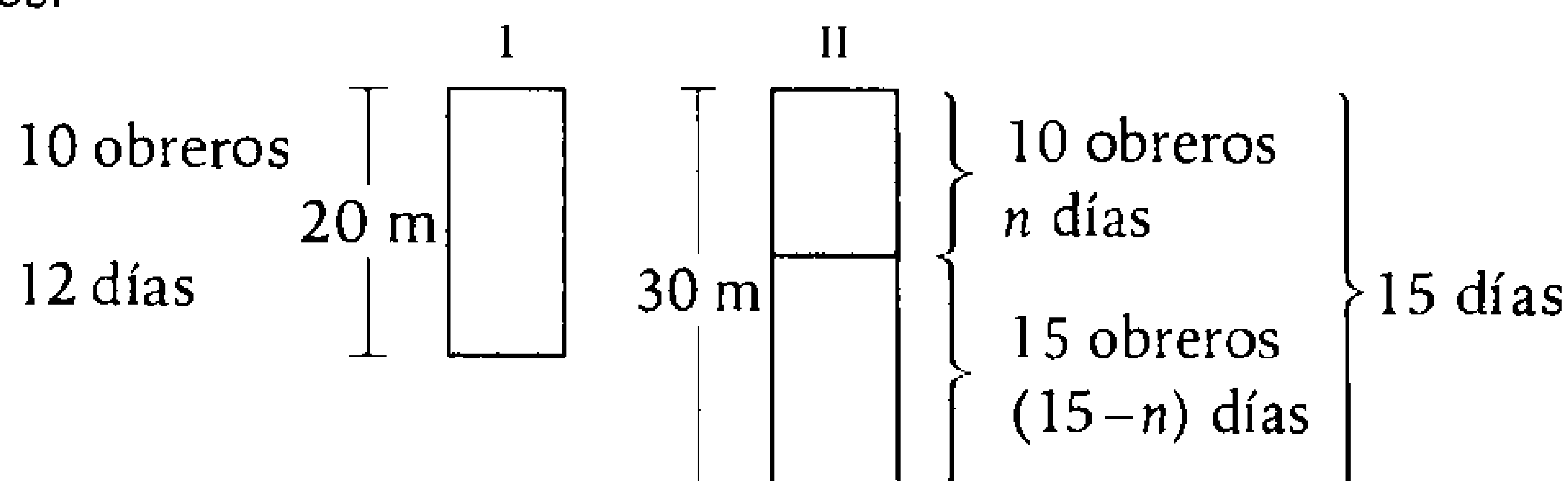
PROBLEMA N.° 3

Diez obreros pueden cavar una zanja de 20 metros de profundidad en 12 días. Después de cierto tiempo de trabajo, se decide aumentar la profundidad en 10 metros, para lo cual contratan a 5 obreros más y acaban la obra a los 15 días de iniciado el trabajo. ¿A los cuántos días se aumentó la profundidad de la obra?

A) 10 B) 11 C) 9 D) 15 E) 13

Resolución

De los datos, tenemos:



La proporcionalidad entre las magnitudes es

$$\frac{(\text{N.}^\circ\text{ obreros})\ (\text{N.}^\circ\text{ días})}{(\text{obra})}=\text{cte.}$$

De (I) De (II)

$$\frac{10\times 12}{20}=\frac{10\times n+15(15-n)}{30}$$

$n=9$

Por lo tanto, a los 9 días se aumentó la profundidad de la obra.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

Un cuartel de 400 soldados tiene provisiones para 10 días y se reparten 3 raciones por día a cada soldado. Producto de un enfrentamiento, mueren algunos y las provisiones alcanzaron para 8 días debido a que los soldados que sobrevivieron aumentaron a cuatro las raciones por día. ¿Cuántos soldados murieron en el enfrentamiento?

A) 32 B) 25
C) 40
D) 20 E) 30

Resolución

Comparamos las magnitudes
(N.° de soldados) IP (N.° de días)
(N.° de soldados) IP (N.° de raciones por día)

Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{N.}^\circ\text{ de}\\ \text{soldados}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{N.}^\circ\text{ de}\\ \text{días}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{N.}^\circ\text{ de raciones}\\ \text{por día}\end{pmatrix}=\text{cte.}$$

Si mueren n soldados

$400\times 10\times 3=(400-n)\times 8\times 4$

$\rightarrow\ n=25$

Por lo tanto, 25 soldados murieron en el enfrentamiento.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

Nueve personas deciden ir de campamento y llevan víveres para ocho días. Si, antes de partir, tres personas deciden también ir de campamento, pero no tienen víveres, ¿para cuántos días menos alcanzarían los víveres, si las tres personas van al campamento?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Los alimentos disponibles:
Estuvieron planificados para 9 personas en 8 días.
En total serán $9+3=12$ personas en n días.

N.° personas IP N.° días
↑ ↓

(N.° personas) (N.° días) = cte.

$\rightarrow 9\times8=12\times n$

$n=6$

Antes duraban 8 días y ahora duran 6 días, por lo tanto, $8-6=2$ días menos.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Se sabe que 300 pantalones de doble costura pueden ser cosidos por 24 varones ó 32 mujeres en 20 días, laborando 9 horas por día. Calcule cuántas mujeres deben reforzar a 21 varones para coser 200 pantalones de triple costura en 18 días, laborando 8 h/d.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Resolución

Comparamos las magnitudes:

- (N.° de obreros) IP (tiempo)
- (N.° de obreros) DP (obra)
- (N.° de obreros) IP (eficiencia)
- (N.° de obreros) DP (dificultad)

Entonces

$$\frac{(\text{N.° de obreros})(\text{tiempo})(\text{eficiencia})}{(\text{obra})(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

Sean:

e_v : eficiencia de los varones
e_m : eficiencia de las mujeres

$$24\times \underset{4}{\underset{\downarrow}{e_v}}=32\times \underset{3}{\underset{\downarrow}{e_m}}$$

Recuerda

En problemas de magnitudes, lo que es constante no se considera, además, la cantidad de costuras se tomará como la dificultad.

Efectuando, tenemos

$$\frac{24\times20\times9\times4}{300\times2}=\frac{(21\times\mathbf{4}+\overset{\text{cantidad de mujeres}}{\overset{\downarrow}{n}}\times3)\times18\times8}{200\times3}$$

$n=12$

Por lo tanto, la cantidad de mujeres que deben reforzar a los 21 varones es 12.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

Tres sastres, A, B y C, se comprometen para confeccionar 39 camisas. Inician la obra A y B, pero luego de t días B se enferma y es reemplazado por C hasta terminar el trabajo. Se sabe que A confecciona 4 camisas en 2 días, B confecciona 6 en 4 días y C confecciona 9 en 3 días. ¿Cuánto le tocará al sastre C si se reparten 1092 soles y, además, cada sastre confecciona un número entero de camisas? ($t\in\mathbb{Z}^+$).

A) S/.400 B) S/.360 C) S/.420
D) S/.320 E) S/.480

Resolución

El número de camisas por día de cada sastre es

	sastre A	sastre B	sastre C
N.° camisas por día	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{6}{4}=1{,}5$	$\frac{9}{3}=3$

Confeccionan 39 camisas de la siguiente manera:

$$\text{N.° camisas: } \underbrace{(2+1{,}5)t_1}_{A \text{ y } B,\ t_1 \text{ días}} + \underbrace{(2+3)t_2}_{A \text{ y } C,\ t_2 \text{ días}} = 39$$

$$\overbrace{7\,t_1}^{...8} + \overbrace{10\,t_2}^{...0} = 78$$

$$t_1 = 4 \qquad t_2 = 5$$

	A	B	C
N.° días trabajados	4+5=9	4	5

Al repartirse S/.1092 por el trabajo, será directamente proporcional al número de camisas que confecciona cada sastre.

$$\frac{(\text{parte})}{\left(\begin{array}{c}\text{N.° camisas}\\ \text{por día}\end{array}\right)(\text{N.° días})} = \text{cte.}$$

Efectuando

$$\frac{P_A}{2\times 9} = \frac{P_B}{(1,5)\times 4} = \frac{P_C}{3\times 5}$$

$$\rightarrow \frac{P_A}{6} = \frac{P_B}{2} = \frac{P_C}{5} = K$$

Luego

$P_A=6_K$; $P_B=2K$; $P_C=5K$

$P_A+P_B+P_C=1092$

$6K+2K+5K=1092$

$13K=1092$

$K=84$

$P_C=5\times 84=420$

Por lo tanto, al sastre C le tocará S/.420.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Por cada dos problemas que resuelve Juan, José resuelve tres problemas de la misma dificultad y en el mismo tiempo. Si Juan resuelve 20 problemas de igual dificultad en 90 minutos, ¿cuántos problemas de doble dificultad resolverá José en el mismo tiempo?

A) 25 B) 30 C) 35
D) 40 E) 15

Resolución

Sabemos que:

$$\frac{(\text{N.° de personas})(\text{tiempo})(\text{eficiencia})}{(\text{N.° de problemas})(\text{dificultad})} = \text{cte.}$$

Sean:

e_1: eficiencia de Juan y e_2: eficiencia de José

$$\rightarrow \frac{e_1}{2} = \frac{e_2}{3}$$

Nota

Como el tiempo es constante, entonces, no lo consideramos.

Luego, si José resuelve n problemas de doble dificultad, tenemos

$$\rightarrow \frac{1\times 2}{20\times 1}=\frac{1\times 3}{n\times 2}$$

$\therefore\ n=15$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

Rubén puede hacer un trabajo en 60 días y Jessica en 90 días. Empiezan el trabajo juntos, pero al cabo de 20 días Rubén reduce en 1/3 su rendimiento y Jessica lo aumenta en su mitad, así terminan todo el trabajo en t días. Señale en qué tiempo terminaría Rubén un trabajo una vez más dificultoso que el trabajo que hace Jacky, si se sabe que ella tiene una eficiencia como la de Rubén y Jessica juntos y dicho trabajo lo termina en t días.

A) 40 B) 120 C) 75
D) 60 E) 100

Resolución

(N.° días) IP (eficiencia)

→ (N.° días)(eficiencia)=cte.

- **Rubén** | **Jessica**

60 días; e_R | 90 días; e_J

$$60\times e_R = 90\times e_J$$

$$\frac{e_R}{3}=\frac{e_J}{2}$$

Sean las eficiencias $e_R=3$ y $e_J=2$

- **Jessica** | **Rub. y Jes.** ⋮ **Rub. y Jes.**

$e_J=2$ <> $3+2$ ($e=5$) ⋮ $(3-1)+(2+1)$ ($e=5$)

$e_J=2$ | $e=5$

90 días | t días

$$2\times 90 = 5t$$

$$t = 36$$

- **Rubén** | **Jacky**

$e_R=3$, x días <> $e_R+e_J=5$, $t=36$ días

$$\frac{(\text{N.° de días})(\text{eficiencia})}{(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

Dificultad: $2n$ | n

$$\frac{3\cdot x}{2n}=\frac{5\times 36}{n}$$

$$x = 120$$

Por lo tanto, Rubén terminará en 120 días.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

Sean A, B y C magnitudes, se sabe lo siguiente:

- A DP $\sqrt{C}$ (B: cte.)
- A IP B (C: cte.)

Si cuando A aumenta en 60%, C aumenta en 44%, ¿qué pasa con B?

A) Disminuye en 75%.
B) Aumenta en 25%.
C) Disminuye en 25%.
D) Aumenta en 75%.
E) No aumenta ni disminuye.

Resolución

Tenemos que $\dfrac{A\times B}{\sqrt{C}}=\text{cte.}$

Luego

Asumiendo

A	100	160
B	100	B_F
C	100	144

$$\rightarrow \frac{100\times 100}{\sqrt{100}}=\frac{160\times B_F}{\sqrt{144}}$$

$B_F=75$

Por lo tanto, B disminuye en 25%.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Si se cumple lo siguiente:

- A DP B (C: cte.)
- $\sqrt{A}$ IP C (B: cte.)

Además

A	6	1	y
B	2	27	$8x$
C	1	x	y

calcule $(x+y)$, considere $x>0$ e $y>0$

A) 18 B) 16 C) 10
D) 12 E) 15

Resolución

Si

A DP B (C=cte.) $\rightarrow$ A DP B

$\left(\sqrt{A}\right)^2$ IP C^2 (B=cte.) $\rightarrow$ A IP C^2

La proporcionalidad es

$$\frac{A\times C^2}{B}=\text{cte.}$$

Reemplazando los tres casos

A	6	1	y
B	2	27	$8x$
C	1	x	y

$$\frac{6\cdot 1^2}{2}=\frac{1\cdot x^2}{27}=\frac{y\cdot y^2}{8x}$$

Resolviendo, tenemos

$x=9 \wedge y=6$

$\therefore\ x+y=15$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Si se cumple

A DP B^2 $(B\leq 20)$

A IP $\sqrt{B}$ $(B\geq 20)$,

calcule A cuando B es 180, si A es 3 cuando B es 10.

A) 4 B) 6 C) 10
D) 8 E) 12

Resolución

Se tiene

A	3	a_1	a_2
B	10	20	180

(columnas 20 y 180: A IP $\sqrt{B}$; columnas 10 y 20: A DP B^2)

- A DP B^2: $\dfrac{3}{10^2}=\dfrac{a_1}{20^2}$

  $a_1=12$

- A IP $\sqrt{B}$: $a_1\cdot\sqrt{20}=a_2\cdot\sqrt{180}$

  $12\cdot\sqrt{20}=a_2\cdot\sqrt{180}$

$\therefore\ a_2=4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

Cuatro amigos forman una sociedad. El segundo aportó 1/5 más que el primero; el tercero 3/5 más que el primero, y el cuarto S/.36 más que los 3 juntos. Si la ganancia total es de S/.585 y el cuarto recibió S/.300 de ganancia, ¿qué capital puso el primero?

A) S/.100 B) S/.200 C) S/.180
D) S/.120 E) S/.150

Resolución

De los amigos A, B, C y D, como el capital de A debe tener quinta parte, asumimos que el primero aporta un capital de $5n$.

Entonces, de los datos tenemos:

	A	B	C	D	Total
Capital aportado	$5n$	$5n+\frac{1}{5}(5n)=6n$	$5n+\frac{3}{5}(5n)=8n$	$19n+36$	$38n+36$
Ganancia				300	585

capital DP ganancia

$$\frac{\text{capital}}{\text{ganancia}}=\text{cte.}$$

$$\frac{19n+36}{300}=\frac{38n+36}{585}$$

Resolviendo: $n=36$

Entonces, el capital del primero es $5n$: $5\times 36=180$.

Por lo tanto, el primero puso un capital de 180 soles.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

Juan inicia un negocio con S/.1200 y a los 2 meses se le asocia Rosa con S/.1500. Luego de tres meses de esto, Juan incrementa su capital en un 25%. Si el negocio duró un año y al final ambos obtuvieron las mismas utilidades, además, faltando n meses para que termine el negocio, Rosa incrementó su capital en su quinta parte, calcule n.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

Resolución

Comparamos las magnitudes

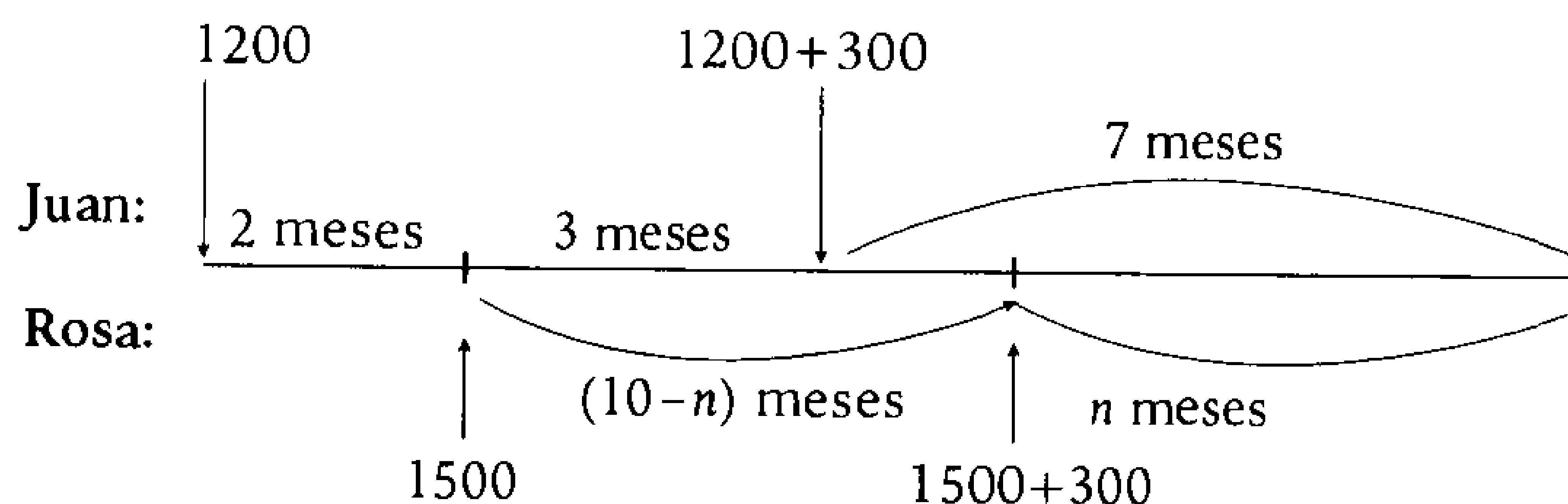
(Ganancia) DP (Capital)

(Ganancia) DP (tiempo)

Entonces

$$\frac{\text{ganancia}}{(\text{capital})(\text{tiempo})}=\text{cte.}$$

Del enunciado, se tiene:



Entonces: $\dfrac{G}{1200\times 5+1500\times 7}=\dfrac{G}{1500(10-n)+1800\times n}$

$\therefore\ n=5$

Clave **A**

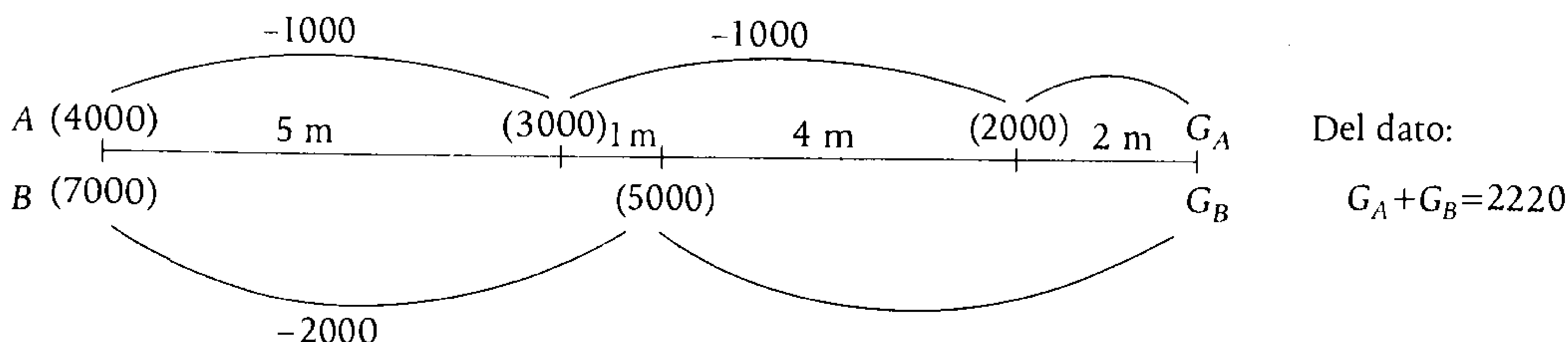
PROBLEMA N.° 15

Dos socios forman una empresa aportando S/.4000 y S/.7000, respectivamente. El primero de ellos, al cabo de 5 meses retiró S/.1000; un mes después, el segundo retiró S/.2000 y después de 4 meses más, el primero retiró S/.1000 más. Si el negocio duró un año y se obtuvo una ganancia de S/.2220, calcule cuánto ganó cada socio y dé como respuesta la diferencia de dichas cantidades.

A) S/.380 B) S/.480 C) S/.660 D) S/.680 E) S/.780

Resolución

Los capitales de los socios A y B están variando de acuerdo al gráfico



Al hacer el reparto de la ganancia (G) proporcional al capital (C) y al tiempo (T), se cumple:

$$\left.\begin{matrix}\text{G DP C}\\ \text{G DP } T\end{matrix}\right\}\ \frac{G}{C\times T}=\text{cte.}$$

Reemplazando $\dfrac{G_A}{4000\times 5+3000\times 5+2000\times 2}=\dfrac{G_B}{7000\times 6+5000\times 6}$

Simplificando, tenemos

$$\frac{G_A}{13}=\frac{G_B}{24}=\frac{\overbrace{G_A+G_B}^{2220}}{13+24}=60$$

$G_B=24\times 60$

$G_A=13\times 60$

$\therefore\ G_B-G_A=660$

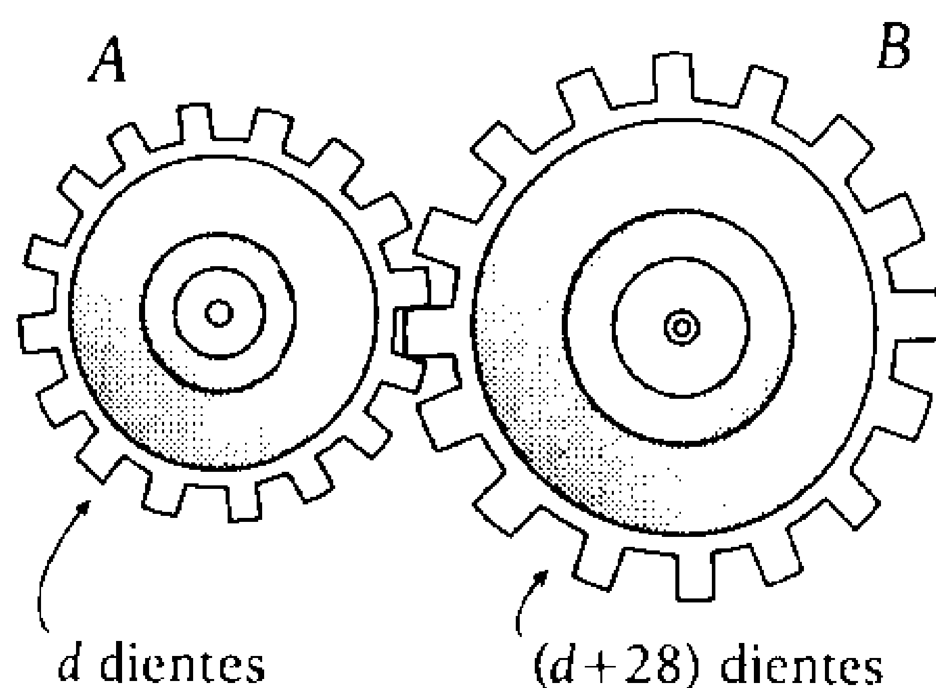
Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

Se tienen dos ruedas engranadas y una de ellas tiene 28 dientes más que la otra. Al cabo de cierto tiempo, la diferencia del número de vueltas es 20. ¿Cuántos dientes tiene la rueda que da más vueltas, si en ese tiempo el número de vueltas y dientes de una rueda suman 100 y el número de vueltas es un número entero?

A) 40 B) 42 C) 30
D) 60 E) 36

Resolución



Sabemos que a menor número de dientes corresponde mayor número de vueltas.

(N.° de vueltas) IP (N.° de dientes)

(N.° de vueltas) (N.° de dientes) = cte.

Entonces

$V_A\times d=V_B\times(d+28)$

Además $V_A-V_B=20$, luego

$$\frac{V_A}{d+28}=\frac{V_B}{d}=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$$

De la condición

$V_A+d=100$ o $V_B+(d+28)=100;$

$V_A\in\mathbb{Z}^+,\ V_B\in\mathbb{Z}^+$

- $V_A + d=100$
  $\downarrow\ \ \downarrow$
  $5K\ (7K-28)$

  $K=\frac{128}{12}$ no cumple

- $V_B + (d+28)=100$
  $\downarrow\ \ \downarrow$
  $5K\ \ 7K$

  $K=6$ sí cumple

  $\rightarrow\ d=7K=42$

Por lo tanto, la rueda que da más vueltas tiene 42 dientes.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

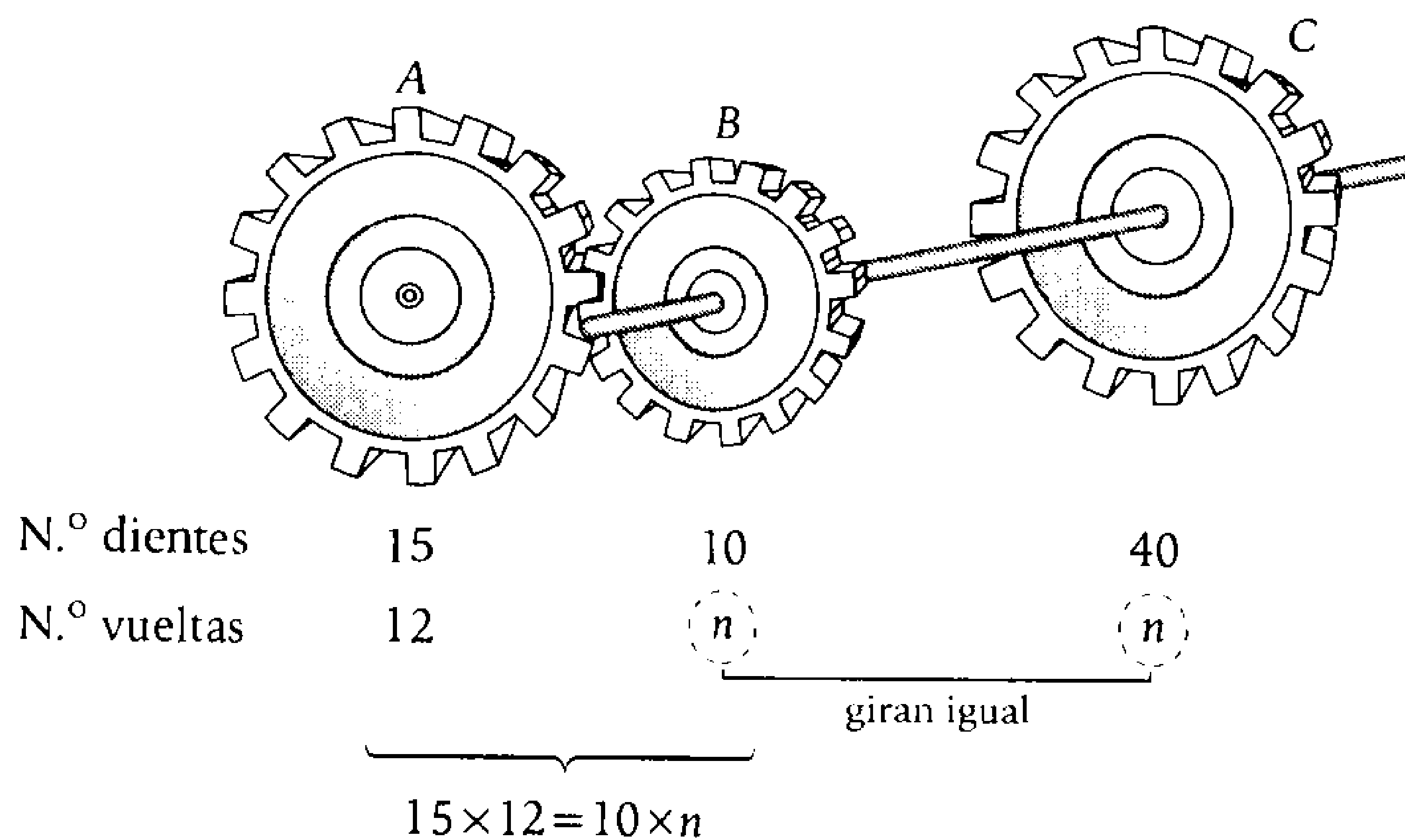
Se tienen dos ruedas engranadas A y B con 15 y 10 dientes, respectivamente; además, B está unida con un eje a una rueda C de 40 dientes. Si la rueda A ha dado 12 vueltas, ¿cuántas vueltas ha dado C?

A) 16 B) 18 C) 20
D) 9 E) 12

Resolución

En ruedas engranadas	En ruedas unidas por un eje
A B D_A D_B V_A V_B (N.° vueltas)(N.° dientes)=cte. $V_A \cdot D_A = V_B \times D_B$	eje A B V_A V_B (N.° vueltas)=cte $V_A = V_B$

En el problema



Operando, tenemos

$n=18$

Por lo tanto, C gira 18 vueltas.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Si $f(6)=7$ y $f(x)$ es una función de proporcionalidad inversa, indique el valor de

$$E=\frac{f(5)\times f(10)}{f(8)}$$

A) 8,12 B) 7,68 C) 7,42
D) 6,72 E) 6,24

Resolución

Si $f(x)$ es una función de proporcionalidad inversa, entonces

$$f(x)=\frac{K}{x}; \quad K \text{ es la constante}$$

Luego

$$f(6)=7=\frac{K}{6}$$

$$\rightarrow K=42$$

Piden

$$E=\frac{f(5)\times f(10)}{f(8)}=\frac{\left(\frac{42}{5}\right)\left(\frac{42}{10}\right)}{\left(\frac{42}{8}\right)}$$

$\therefore \; E=6,72$

Clave D

PROBLEMA N.° 19

Para valores de $B \leq 8$, las magnitudes A y B son DP; para valores de $8 \leq B \leq 15$, las magnitudes A y B son IP y para valores de $B \geq 15$, A es IP con B^2. Si cuando $B=4$, $A=15$, calcule el valor de A cuando $B=30$.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 8

Resolución

Del enunciado, tenemos:

A DP B; $B \leq 8$
A IP B ; $8 \leq B \leq 15$
A IP B^2; $B \geq 15$

En el cuadro, asociamos los casos

A	15	m	n	x
B	4	8	15	30

$\frac{A}{B}=\text{cte.}$ (I) $A\times B=\text{cte.}$ (II) $A\times B^2=\text{cte.}$ (III)

En (I): $\frac{15}{4}=\frac{m}{8} \rightarrow m=30$

En (II): $m\times 8=n\times 15 \rightarrow n=16$ (con $m=30$)

En (III): $n\cdot 15^2=x\cdot 30^2 \rightarrow x=4$ (con $n=16$)

Por lo tanto, cuando B es igual a 30, el valor de A es igual a 4.

Clave B

PROBLEMA N.° 20

Luis, Juan y Pedro cosechan sus respectivas chacras. Luis termina su parte en 12 días, que es el triple de la del segundo y los 2/5 de la de Pedro. Calcule la diferencia del número de días que demorarían Pedro y Juan en cosechar sus respectivas chacras, si todos tienen igual eficiencia.

A) 15 B) 12 C) 20
D) 26 E) 30

Resolución

$\times\frac{2}{5}$, $\times 3$

	Luis	Juan	Pedro
Obra:	6	2	15
N.° de días:	12	t_J	t_P

Considerando que Luis, Juan y Pedro tienen la misma eficiencia, entonces

(N.° de días) DP (obra)

$$\frac{\text{N.° de días}}{\text{obra}}=\text{cte.}$$

$$\frac{12}{6}=\frac{t_J}{2}=\frac{t_P}{15}=\frac{t_P-t_J}{13}$$

$\rightarrow t_P-t_J=26$

Por lo tanto, Pedro demoraría 26 días más que Juan.

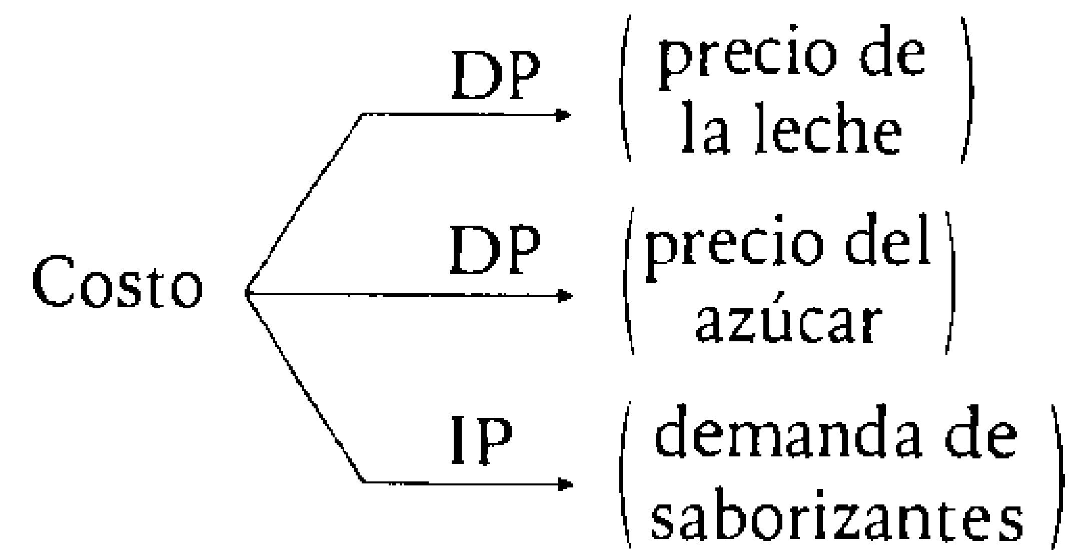
Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

En la fabricación de los helados, los insumos relevantes son la leche, el azúcar y los saborizantes. El precio de estos helados está en relación directamente proporcional con el precio de la leche y el azúcar, e inversamente con la demanda de los saborizantes en el mercado. ¿Qué variación experimentará el precio de un helado de vainilla cuando el precio de la leche disminuya en 1/8, el azúcar aumente en 3/8 y la demanda de la esencia de vainilla aumente en 3/4?

A) Disminuye en 11/6.
B) Aumenta en 11/16.
C) Disminuye en 5/16.
D) Aumenta en 5/16.
E) Aumenta en 5/11.

Resolución



$$\frac{(\text{costo})(\text{demanda saborizantes})}{(P_{\text{leche}})(P_{\text{azúcar}})}=\text{cte.}$$

Datos:

Costo	C_1	C_2	
P_{leche}	$8K$	$7K$	→ disminuye 1/8
$P_{\text{azúcar}}$	$8n$	$11n$	→ aumenta 3/8
Demanda	$4a$	$7a$	→ aumenta 3/4

$$\frac{C_1\times 4a}{8K\times 8n}=\frac{C_2\times 7a}{7K\times 11n}$$

$$\frac{C_1}{16}=\frac{C_2}{11}$$

disminuye 5

De 16 disminuye en 5; por lo tanto, disminuye en sus 5/16.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Dos personas alquilan una casa, una de ellas ocupa los 5/8 de la casa y paga S/.600 de alquiler mensual. ¿Cuánto paga de alquiler mensual la otra persona?

A) S/.300 B) S/.350 C) S/.360
D) S/.400 E) S/.420

Resolución

Comparamos las magnitudes: (pago de alquiler) DP (área que ocupa)

$$\frac{\text{pago de alquiler}}{\text{área que ocupa}}=\text{cte. Entonces } \frac{600}{\frac{5}{8}}=\frac{P}{\frac{3}{8}};\quad P=360$$

Por lo tanto, la otra persona paga S/.360 de alquiler mensual.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Tres obreros se reparten una bonificación en partes proporcionales a sus sueldos mensuales, que son de S/.2400; S/.3000 y S/.4200, pero luego no les parece justo el reparto, motivo por el cual acuerdan que sea en partes iguales y para ello, el tercero entrega S/.12 000 al segundo y este, a su vez, una cierta cantidad al primero. ¿Cuál fue la cantidad que el segundo entregó al primero?

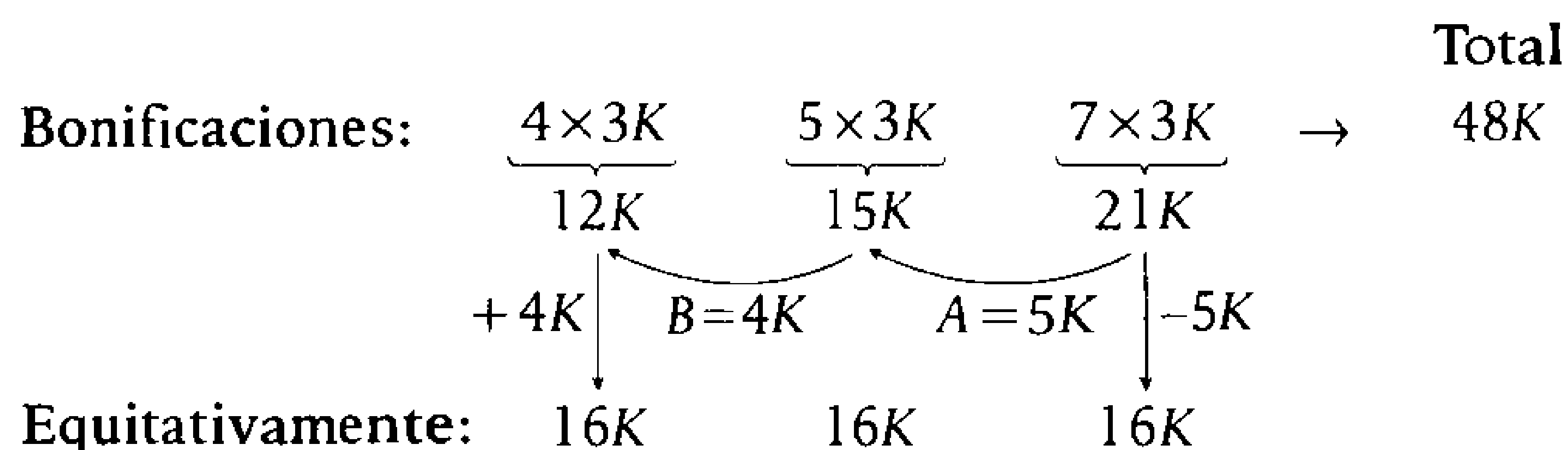
A) S/.4800 B) S/.6000 C) S/.7200 D) S/.8400 E) S/.9600

Resolución

(bonificación) DP (sueldos)

Los sueldos son: $\underbrace{2400}_{4\times600}$, $\underbrace{3000}_{5\times600}$ y $\underbrace{4200}_{7\times600}$

La relación de sus bonificaciones es de 4; 5 y 7, respectivamente y el total es como 16; los multiplicamos por $3K$ y obtenemos: $12K$, $15K$ y $21K$; además, el total $48K$ al dividirlo equitativamente entre los tres cada uno recibe $16K$.



Por dato: $A=5K=12\ 000 \rightarrow K=2400$

Nos piden $B=4(2400)=9600$

Por lo tanto, la cantidad que el segundo entregó al primero es de S/.9600.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 24

Cinco agricultores comparan sus terrenos, observando que sus áreas son proporcionales a cinco números pares consecutivos. Para cultivarlos contratan a dos peones y trabajan todos en partes iguales. La relación entre lo que aportan para el pago de los peones el de mayor y menor terreno es de 8 a 7. ¿Qué parte del aporte total representa el aporte del agricultor del menor terreno?

A) 24/125
B) 7/40
C) 18/125
D) 14/75
E) 30/125

Resolución

Asumimos convenientemente:

Agricultor	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Total
Áreas	$(7a-4)$	$(7a-2)$	$7a$	$(7a+2)$	$(7a+4)$	$35a$

Se contrata a 2 peones y los 7 trabajan en partes iguales, es decir, cada uno $\frac{35a}{7}=5a$.
Entonces

Agricultor	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Total
Área no trabajada	$(2a-4)$	$(2a-2)$	$2a$	$(2a+2)$	$(2a+4)$	$10a$

Observe que el área no trabajada por los agricultores $(10a)$ es lo que trabajan los peones.

Luego, comparando las magnitudes: (área no trabajada) DP (pago).

Entonces, entendemos que la relación en la cual se encuentren las áreas no trabajadas, será la misma relación en la que se encuentren los pagos.

Además $\frac{2a+4}{2a-4}=\frac{8}{7} \rightarrow a=30$

Piden $\frac{2a-4}{10a}=\frac{56}{10\times 30}=\frac{14}{75}$

Por lo tanto, el aporte del agricultor del menor terreno es $\frac{14}{75}$ del aporte total.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

Se reparten N soles entre los hermanos Ángel, Beto y Carlos, en la misma relación que los números 2^m, 2^{m+2} y 2^{m+n}, respectivamente. Lo que recibieron Ángel y Beto juntos es S/.1500, y la razón aritmética de lo recibido por Carlos y Beto es S/.3600. Calcule N y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 9 B) 8 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Sean las partes que reciben Ángel, Beto y Carlos, respectivamente A, B y C.

$N=A+B+C$

$A+B=1500$

$C-B=3600$

Partes	A	B	C
DP	2^m	2^{m+2}	2^{m+n}

La proporción es

$$\frac{A}{2^m}=\frac{B}{2^{m+2}}=\frac{C}{2^{m+n}} \rightarrow \frac{A}{1}=\frac{B}{2^2}=\frac{C}{2^n}=K$$

Por propiedad

$$\frac{\overset{1500}{A+B}}{1+4}=\frac{\overset{3600}{C-B}}{2^n-4}=K$$

Resolviendo, tenemos

$n=4 \wedge K=300$

Entonces

$A=300$

$B=4\times300$

$C=2^4\times300$

Efectuamos

$N=A+B+C \rightarrow N=6300$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$(6+3+0+0)=9$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Cuatro agricultores A, B, C y D deben sembrar chacras circulares de 3; 4; $3\sqrt{2}$ y 5 m de radio, respectivamente. Si el agricultor A cobra S/.960 menos que el agricultor D, ¿cuánto más cobra el agricultor C que el agricultor B?

A) S/.120 B) S/.180 C) S/.240
D) S/.300 E) S/.360

Resolución

Comparamos las magnitudes

(lo que cobra) DP (área sembrada)

$$\frac{\text{lo que cobra}}{\text{área sembrada}}=\text{cte.}$$

$A_{\bullet}=\pi\times r^2$

Vemos que lo que cobra solo dependerá del r^2, ya que π es una constante.

Entonces

$$\frac{C_A}{3^2}=\frac{C_B}{4^2}=\frac{C_C}{(3\sqrt{2})^2}=\frac{C_D}{5^2}=\frac{960}{16}=\frac{C_C-C_B}{2}$$

$C_C-C_B=120$

Por lo tanto, el agricultor C cobra S/.120 más que el agricultor B.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

Al pintar las caras de dos cubos iguales me sobraron 60 tarros de pintura. ¿Cuántos tarros me sobrarán o faltarán al pintar tres cubos iguales cuyos volúmenes sean $2\frac{3}{8}$ más que el anterior, si al pintar un cubo de cada tipo me sobraron 45 tarros de pintura?

A) sobrarán 15 B) faltarán 15 C) sobrarán 3
D) faltarán 12 E) faltarán 3

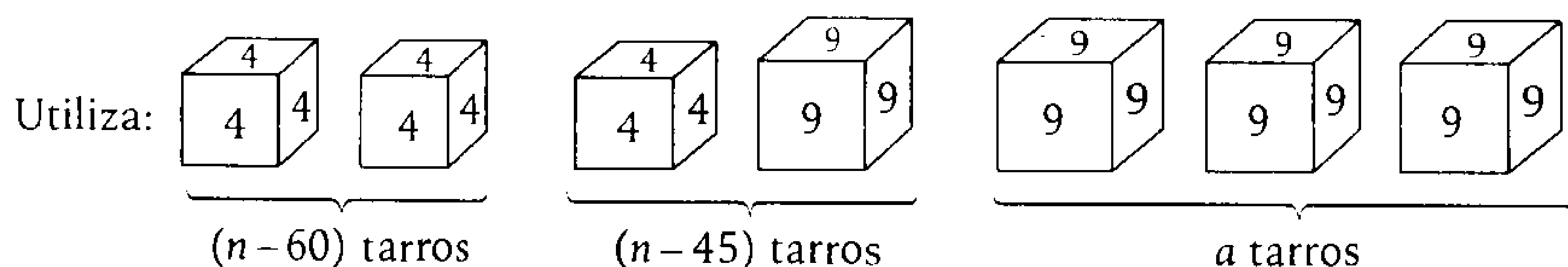
Resolución

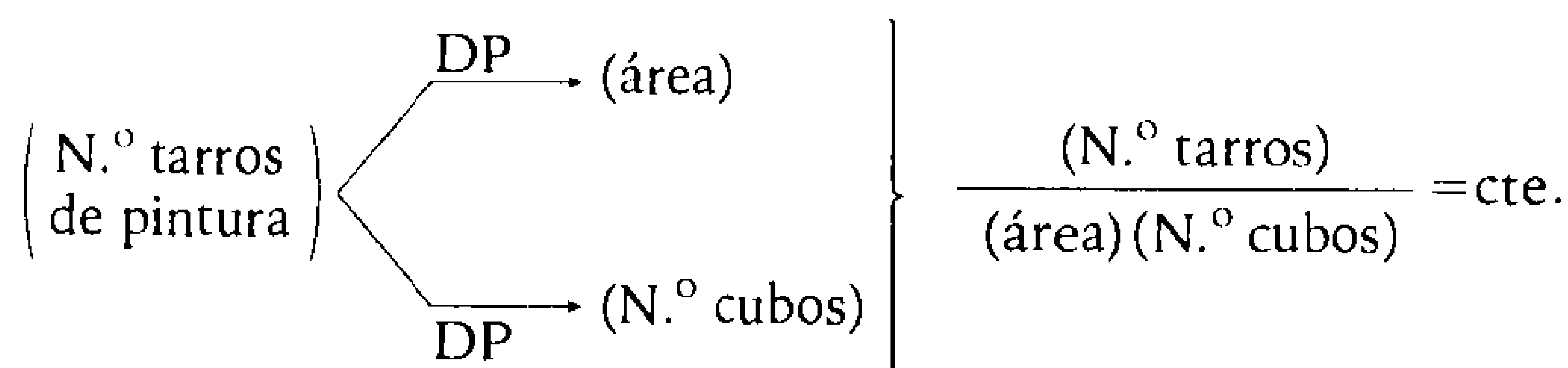
De los volúmenes de los cubos

$$V_2=\left(1+2\frac{3}{8}\right)V_1 \rightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{27}{8}$$

$$\frac{(\ell_1)^3}{(\ell_2)^3}=\frac{27}{8} \rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{3}{2}$$

Si los lados están en la relación de 2 a 3, las áreas están en la relación de 2^2 a 3^2.
Si tiene n tarros de pintura, entonces





Reemplazamos: $\frac{n-60}{4\times2}=\frac{n-45}{4+9}=\frac{a}{9\times3}$

Resolviendo, tiene $n=84$ tarros y utiliza $a=81$ tarros.

Por lo tanto, le sobrarán 3 tarros.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

El costo de un cuaderno varía en forma DP al número de hojas que tiene, e IP al cuadrado del número de cuadernos que se producen; además, el precio de venta de cada uno es los 17/12 de su costo. Si cuando se producen 15 cuadernos de 100 hojas el precio de venta total es S/.680, ¿cuántas hojas tienen los 30 cuadernos que se produjeron y que luego se vendieron todos por S/.255?

A) 72 B) 75 C) 80
D) 85 E) 96

Resolución

Sean:

C: costo de cada cuaderno
H: número de hojas de cada cuaderno
N: número de cuadernos que se producen
P_V: precio de venta

Dato: $\dfrac{C\times N^2}{H}=\text{cte.}$ (I)

Además

$$P_{V(\text{unitario})}=\frac{17}{12}C \rightarrow C=\underbrace{\frac{12}{17}}_{\text{cte.}}\underbrace{P_{V(\text{unitario})}}_{\left(\frac{P_{V(\text{total})}}{N}\right)}$$

Reemplazando en (I), tenemos

$$\frac{P_{V(\text{total})}\times N}{H}=\text{cte.}$$

Luego

$P_{V(\text{total})}$ (S/.)	680	255
N	15	30
H	100	h

$$\frac{680\times 15}{100}=\frac{255\times 30}{h} \rightarrow h=75$$

Por lo tanto, los 30 cuadernos tienen 75 hojas.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 29

Un regimiento de 200 soldados tiene víveres para 40 días a razón de 3 raciones diarias. Pero al cabo de 20 días recibe 40 soldados con víveres para 30 días a razón de 4 raciones diarias. Si se juntan los víveres y se consumen a razón de 2 raciones diarias, calcule para cuántos días alcanzarán los víveres.

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

Resolución

Luego de 20 días, se tienen alimentos para:

	Quedan	Llegan		Se juntan los soldados
	200 sold.	40 sold.		240 sold.
IP	20 días	30 días	<>	x días
IP	$3\ r/d$	$4\ r/d$		$2\ r/d$

$$(\text{N.° soldados})(\text{N.° días})(r/d)=\text{cte.}$$

Reemplazando, tenemos

$$200\times 20\times 3+40\times 30\times 4=240\cdot x\cdot 2$$

$$x=35$$

Por lo tanto, alcanzará para 35 días.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

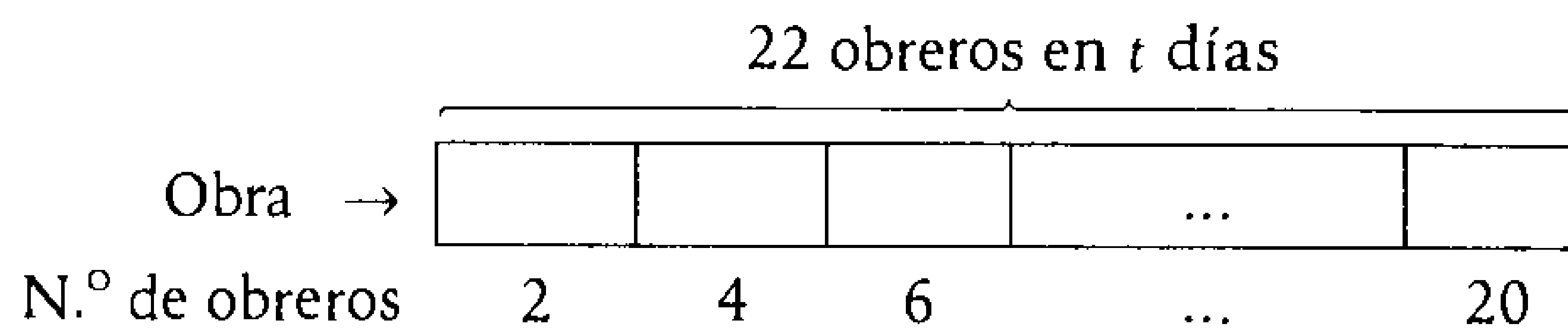
Para hacer una obra en 10 días, se procedió de la siguiente forma: el primer día 2 obreros, el segundo día 4 obreros, el tercer día 6 obreros, y así sucesivamente hasta el décimo día en que laboran 20 obreros. Si se hubiera laborado con 22 obreros, calcule en cuántos días acabarían la misma obra.

A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

Resolución

Sabemos que (N.° de obreros)(N.° de días)=cte.

Del enunciado



Entonces $22\times t=\underbrace{2\times1+4\times1+6\times1+.....+20\times1}_{10\text{ sumandos}}=10\times11 \rightarrow t=5$

Por lo tanto, la obra la acabarían en 5 días.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 31

La tercera parte de una obra fue realizada por un grupo de 10 obreros que laboran 3 horas diarias con otro grupo de 15 obreros que laboran 2 horas diarias y la realizaron durante 20 días. Calcule cuántos obreros del grupo que laboran 3 horas diarias se deben unir con 10 obreros que laboran 2 horas diarias para terminar la obra restante en 30 días, si todos los obreros tienen la misma eficiencia.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

Resolución

Utilizamos la proporcionalidad entre:

$$\frac{(\text{N.° obreros})(\text{h/d})(\text{días})}{(\text{obra})}=\text{cte.}$$

15 obreros 2 h/d	10 obreros 3 h/d	10 obreros 2 h/d	x obreros 3 h/d
20 días		30 días	
n		$2n$	

$$\frac{(15\times2+10\times3)\times20}{n}=\frac{(10\times2+x\cdot3)\times30}{2n}$$

Resolviendo: $x=20$

Por lo tanto, se necesitan 20 obreros.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 32

Una obra puede ser realizada por n máquinas en 30 días, y se realiza con $n+4$ máquinas la misma obra con el doble de dificultad, se realiza en 40 días. Calcule en cuántos días $n+2$ máquinas harán la obra con la dificultad inicial.

A) 20
B) 21
C) 24
D) 25
E) 28

Resolución

Sabemos que

$$\frac{(\text{N.}^\circ\text{ de máquinas})(\text{N.}^\circ\text{ de días})}{(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

$$\underbrace{\frac{n\times 30}{1}=\frac{(n+4)\times 40}{2}}_{n=8}=\frac{(n+2)t}{1}$$

Luego

$8\times 30=10\times t \rightarrow t=24$

Por lo tanto, las $(n+2)$ máquinas harán la obra en 24 días.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Un varón, una mujer y 3 niños pueden realizar una obra en 61 días. Además, la eficiencia de una mujer es a la eficiencia de un varón como 7 es a 10 y la eficiencia de una mujer es a la de un niño como 5 es a 3. Calcule cuánto tiempo se habría ahorrado si se hubiera empezado con 2 mujeres, 2 niños más y un varón con una eficiencia mayor a la anterior en sus 19/50.

A) 16 B) 20 C) 22 D) 24 E) 25

Resolución

De la relación de eficiencias de las mujeres, varones y niños, tenemos:

$$\frac{e_M}{7\times 5}=\frac{e_V}{10\times 5} \wedge \frac{e_M}{5\times 7}=\frac{e_N}{3\times 7} \rightarrow \frac{e_M}{35}=\frac{e_V}{50}=\frac{e_N}{21}$$

Sea las eficiencias: $e_M=35$; $e_V=50$; $e_N=21$

Por dato:

$$\underbrace{\overset{1\text{ varón}}{e_V=50}\quad \overset{1\text{ mujer}}{e_M=35}\quad \overset{3\text{ niños}}{e_N=21}}_{61\text{ días}} <> \underbrace{\overset{2\text{ mujeres}}{e_M=35}\quad \overset{5\text{ niños}}{e_N=21}\quad \overset{1\text{ varón}}{e_V=50+19}}_{n\text{ días}}$$

En la proporción: (N.° personas)(eficiencia)(N.° días)=cte.

$$(1\times 50+1\times 35+3\times 21)61=(2\times 35+5\times 21+1\times 69)n \rightarrow n=37$$

Entonces, antes se realizó en 61 días y ahora se haría en 37 días, por lo tanto, se ahorró 24 días.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Carlos puede hacer una obra en 6 días, mientras que esa misma obra Jessica la hace en 5 días; al final se contrata a los dos. ¿En cuántos días construirían una obra que puede ser realizada por $\overline{(a-2)(a+4)}$ obreros, cuya eficiencia es la tercera parte de la de Jessica, en $\overline{(a-3)(a-3)}$ días, si se sabe que a es par?

A) 154 B) 150 C) 164
D) 56 E) 156

Resolución

En primer lugar, en los numerales

$\overline{(a-2)(a+4)}$ y $\overline{(a-3)(a-3)}$

a: 4 ó 5

$\rightarrow$ $a=4$ por condición

Sean:

e_C: eficiencia de Carlos

e_J: eficiencia de Jessica

Sabemos que

(N.° obreros) (N.° días) (eficiencia) = cte.

$$1\times 6\times e_C=1\times 5\times e_J \rightarrow \frac{e_C}{e_J}=\frac{5}{6}$$

Además, la eficiencia de los otros obreros será

$$e=\frac{e_J}{3}$$

Entonces, la obra que puede ser realizada por 28 obreros en 11 días la harán Carlos y Jessica trabajando juntos en t días:

$$(1\times 5+1\times 6)\times t=28\times 11\times 2$$

$\therefore$ $t=56$

Clave D

PROBLEMA N.° 35

El siguiente cuadro muestra los valores de las magnitudes de A y B que guardan cierta relación de proporcionalidad. Calcule $x+y$.

A	2	x	8	98
B	3	24	y	21

A) 124 B) 128 C) 134
D) 160 E) 192

Resolución

$\times 8^2$ $\times 4$ $\times 49$

A	2	x	8	98
B	3	24	y	21

$\times 8$ $\times 2$ $\times 7$

Observación

- A se multiplica por K^2 y B se multiplica por K.
- A DP B^2

Despejando x e y

$$x=2\times 8^2=128 \;\wedge\; y=3\times 2=6$$

$\therefore$ $x+y=134$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

Luisa inicia un negocio y, después de un mes, acepta un socio mensualmente, que aportará un capital proporcionalmente al orden de ingreso. Determine la ganancia máxima de uno de ellos si la diferencia de las ganancias de los 2 primeros socios es de S/.585 y el negocio duró un año.

A) S/.3120 B) S/.2700 C) S/.2600
D) S/.2730 E) S/.2340

Resolución

Sabemos que $\dfrac{\text{ganancia}}{(\text{capital})(\text{tiempo})} = \text{cte.}$

Trabajaremos solo con los socios, que son 11, ya que el negocio duró 12 meses y el primero entró al segundo mes.
Entonces

$$\frac{G_1}{1\times 11}=\frac{G_2}{2\times 10}=\frac{G_3}{3\times 9}=\ldots=\frac{G_6}{\underset{\text{este es el mayor producto}}{6\times 6}}=\ldots\ldots=\frac{G_{10}}{10\times 2}=\frac{G_{11}}{11\times 1}=\frac{585}{9}$$

De donde la máxima ganancia es la del sexto socio, por lo tanto G_6=S/.2340.

Clave **E**

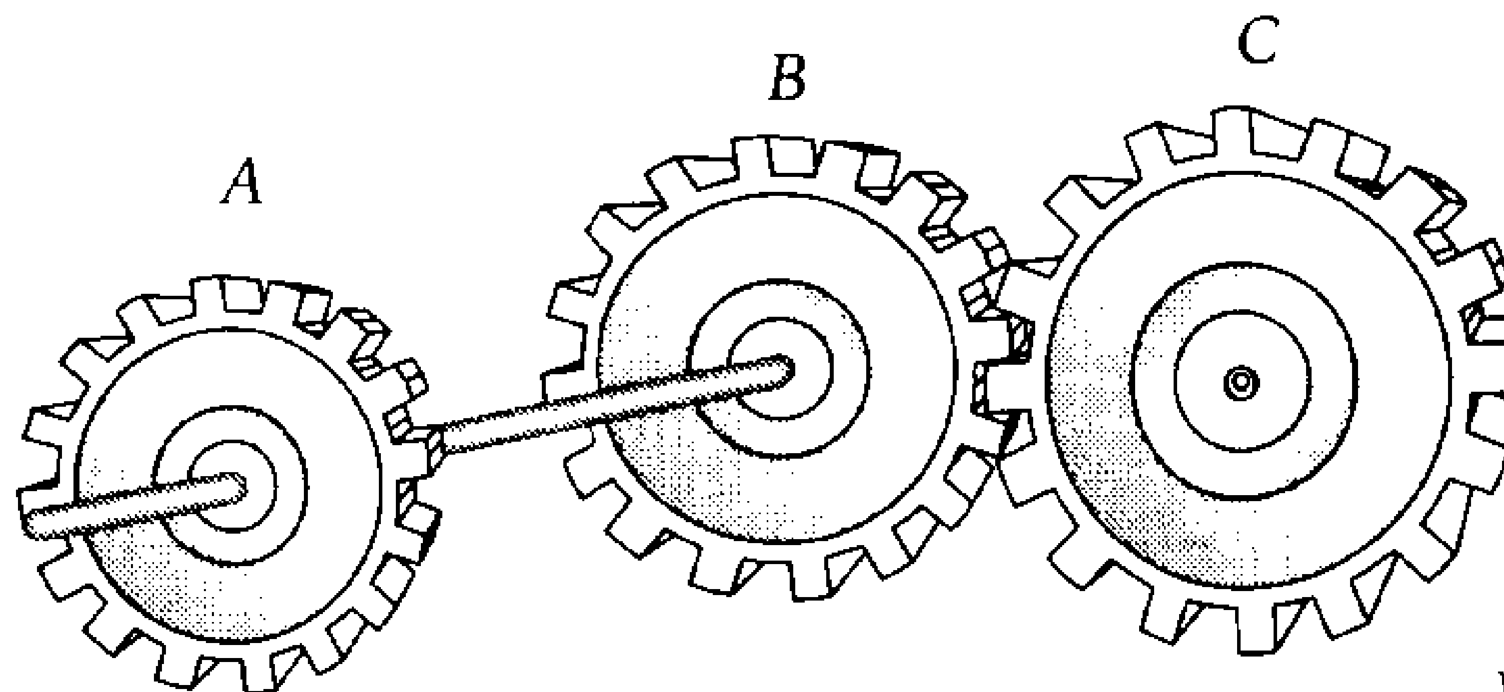
PROBLEMA N.° 37

Una rueda *A* de 20 dientes está unida a un mismo eje con una rueda *B* de 30 dientes que engrana con una rueda *C* de 60 dientes. Si cambiáramos las posiciones de *B* y *C* para una misma cantidad de vueltas de *A*, en el segundo caso las vueltas de *B* exceden en 54 a las vueltas de *C* en el primer caso. ¿Cuál es esa misma cantidad de vueltas de *A*?

A) 27 B) 18 C) 36 D) 30 E) 45

Resolución

Caso I



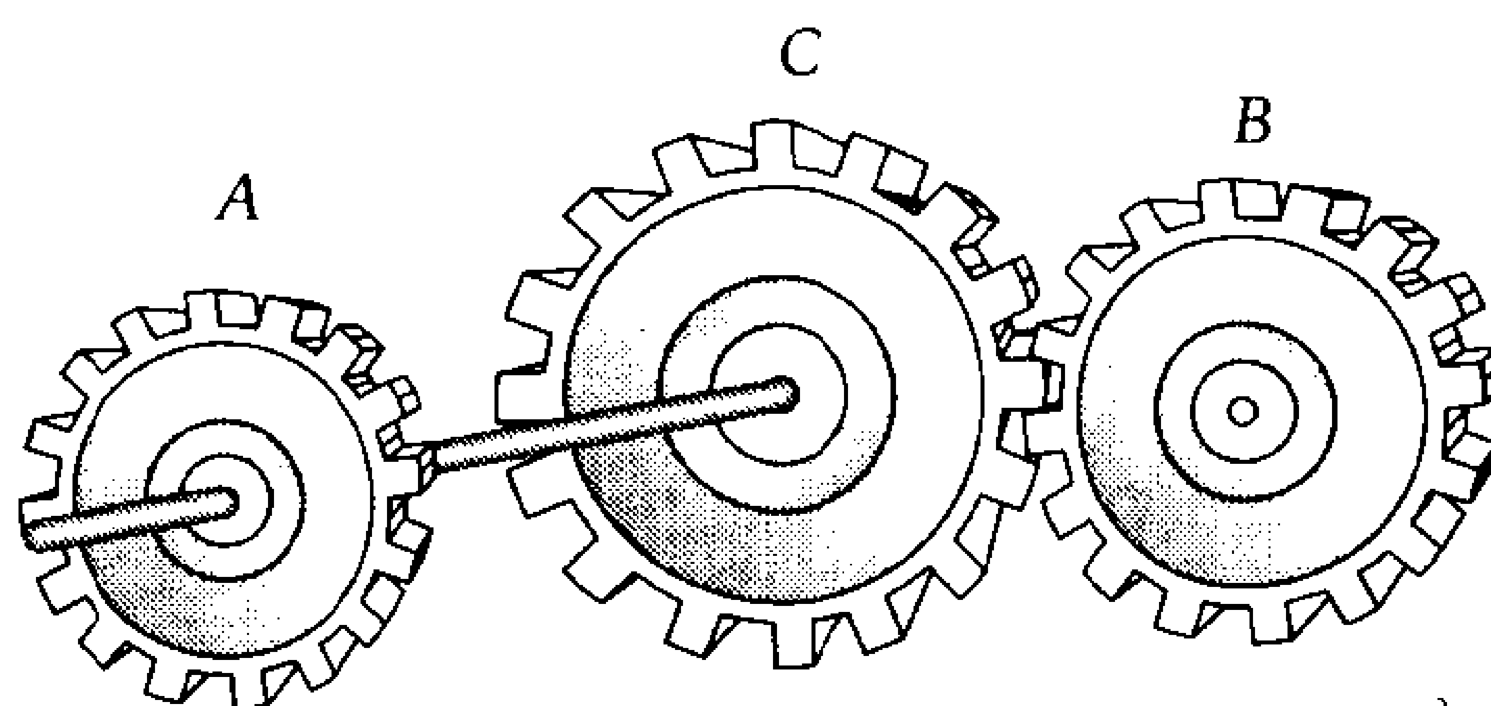
	A	B	C
N.° dientes	20	30	60
N.° vueltas	a	a	b

Para las ruedas *B* y *C*.

$30\times a=60\times b$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{1}$

Caso II



N.° dientes	20	60	30
N.° vueltas	a	a	c

Para las ruedas C y B.

$$60\times a=30\times c$$

$$\frac{a}{1\times 2}=\frac{c}{2\times 2}$$

De I y II

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{4}=K$$

$a=2K$; $b=K$ y $c=4K$

Por dato:

$c-b=54 \rightarrow 4K-K=54$

$K=18$

Nos piden

$a=2\times 18$

$\therefore\ a=36$

Clave C

PROBLEMA N.° 38

Si $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa tal que $f(2)+f(5)=21$, calcule el valor de

$$E=f\left(\frac{7}{11}\right)\times f(11)\times f(13)$$

A) 1094 B) 1576 C) 1714 D) 2033 E) 2457

Resolución

Si $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa, entonces $f(x)=K\cdot x$; K es la constante.

Luego

$f(2)+f(5)=21 \rightarrow 2K+5K=21 \rightarrow K=3$

Piden

$$E=f\left(\frac{7}{11}\right)\times f(11)\times f(13) \rightarrow E=\left(\frac{7}{11}\times 3\right)(11\times 3)(13\times 3)$$

$\therefore\ E=2457$

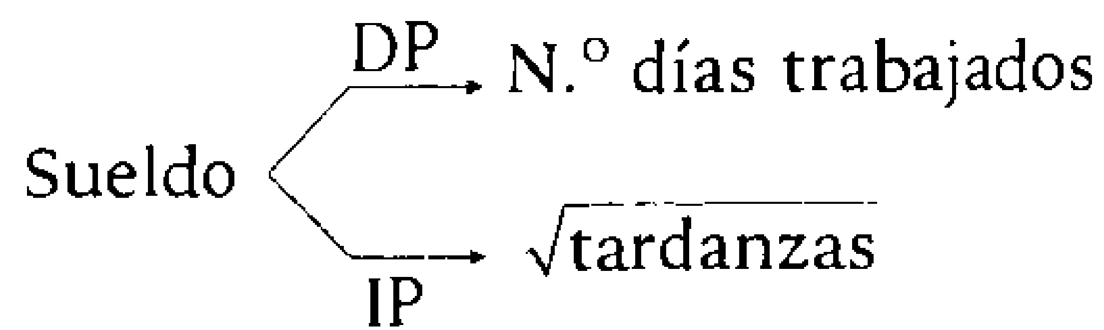
Clave E

PROBLEMA N.° 39

El sueldo de un obrero es directamente proporcional a los días trabajados e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de las tardanzas. Se sabe que cuando trabajó 28 días y tuvo 4 tardanzas, recibió un sueldo de S/.700. Halle de cuánto fue su sueldo cuando trabajó 24 días y tuvo 9 tardanzas.

A) S/.350 B) S/.400 C) S/.450 D) S/.500 E) S/.550

Resolución



La proporcionalidad es

$$\rightarrow \frac{(\text{Sueldo})(\sqrt{\text{tardanzas}})}{(\text{N.° días trabajados})}=\text{cte.}$$

De los datos:

Sueldo	S/.700	S
N.° días	28	24
Tardanzas	4	9

$$\frac{700\cdot\sqrt{4}}{28}=\frac{S\cdot\sqrt{9}}{24} \rightarrow S=400$$

Por lo tanto, su sueldo fue S/.400.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

Las edades de 11 personas están en progresión aritmética. Si se repartiera equitativamente una gratificación, al menor le correspondería 20% más que si el reparto se hiciera en forma proporcional a las edades. Determine la relación entre las edades del mayor y menor.

A) 5/4 B) 7/5 C) 3/2 D) 8/7 E) 4/3

Resolución

Las edades de 11 personas están en progresión aritmética de razón r:

$(a-5r)$; $(a-4r)$; ...; $(a-r)$; a; $(a+r)$; ...; $(a+4r)$; $(a+5r)$

Luego, se propone repartir una gratificación de dos maneras:

								Total
DP a las edades	$(a-5r)$	...	$(a-r)$	a	$(a+r)$	...	$(a+5r)$	$11a$
Equitativamente	a	...	a	a	a	...	a	$11a$

Observación

Como se tiene el mismo total, en ambos repartos, podemos usar la misma constante.

Por condición: $aK=120\%(a-5r)K$

$$\frac{a}{a-5r}=\frac{6}{5} \rightarrow a=30r$$

Piden la relación entre las edades del mayor y menor

$$\frac{a+5r}{a-5r}=\frac{35r}{25r}=\frac{7}{5}$$

Por lo tanto, están en la relación de 7 a 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 41

En un frasco con agua se colocan 2 kg de sal y se observa que en los dos primeros minutos se disuelven 600 g de esta sal. ¿Cuántos gramos se disolverán en los siguientes tres minutos, si se sabe que la cantidad de sal que no se disuelve es inversamente proporcional al cuadrado del tiempo que transcurre?

A) 1200 B) 900 C) 1024
D) 1176 E) 1008

Resolución

Por dato:

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de sal}\\ \text{no disuelta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Tiempo}\\ \text{transcurrido}\end{pmatrix}^2=\text{cte.}$$

De los 2 kg <> 2000 g

3 minutos más

Tiempo	2 minutos	5 minutos
Disuelto	600 g	$600+x$
No disuelto	1400 g	$1400-x$

$$1400\cdot 2^2=(1400-x)\cdot 5^2$$
$$x=1176 \text{ g}$$

Por lo tanto, se disolverán 1176 g.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 42

Se emplearon m obreros para ejecutar una obra, y al cabo de d días hicieron $1/K$ de ella. ¿Cuántos obreros se aumentaron para terminar la obra, si en total se emplearon P días?

A) $\frac{P}{m}(dK-P)$ B) $\frac{m(dK-P)}{P-d}$

C) $\frac{P}{m}(dK-d-P)$

D) $m(K-d-P)$ E) $\frac{m}{P}(dK-P)$

Resolución

Sabemos que

$$\frac{(\text{N.° de obreros})(\text{N.° de días})}{\text{obra}}=\text{cte.}$$

Se aumentan n obreros para terminar la obra

$$\frac{m\times d}{\frac{1}{K}}=\frac{(m+n)(P-d)}{\left(1-\frac{1}{K}\right)}$$

$$\therefore \quad n=\frac{m(dK-P)}{P-d}$$

Clave **B**

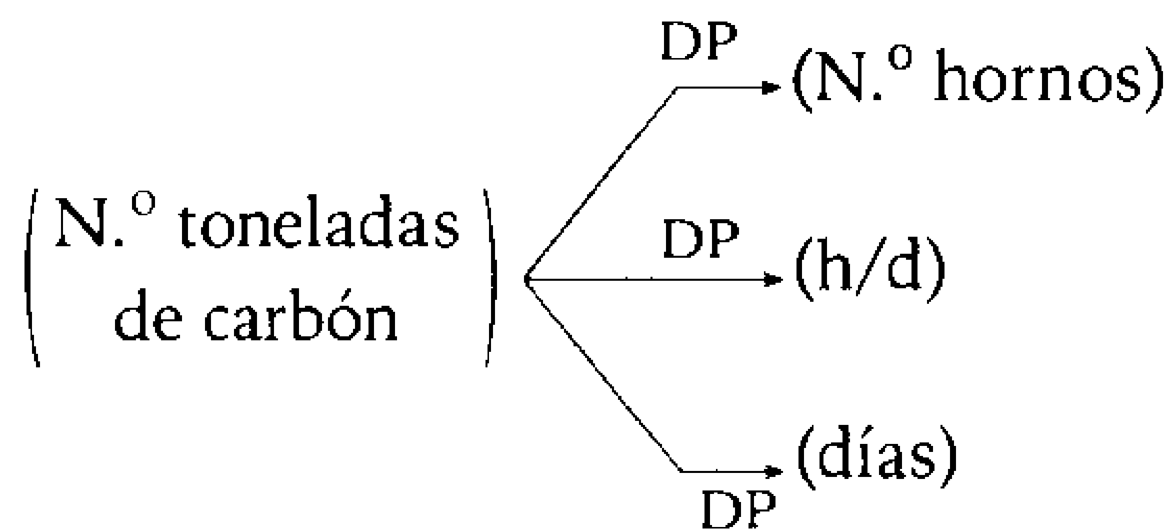
PROBLEMA N.° 43

Se sabe que 6 hornos consumen 60 toneladas de carbón, trabajando 10 h/d durante 18 días. Calcule cuántas toneladas serán necesarias para mantener trabajando 5 hornos más durante 90 días a razón de 7 h/d.

A) 15,4 t B) 305 t C) 345 t
D) 12,5 t E) 385 t

Resolución

Sean



La proporcionalidad es

$$\frac{(\text{N.° toneladas de carbón})}{(\text{N.° hornos})(\text{h/d})(\text{días})}=\text{cte.}$$

	Caso 1	Caso 2
tonelada de carbón	60	x
N.° hornos	6	11
h/d	10	7
N.° días	18	90

$$\frac{60}{6\times10\times18}=\frac{x}{11\times7\times90}$$

Resolviendo, tenemos

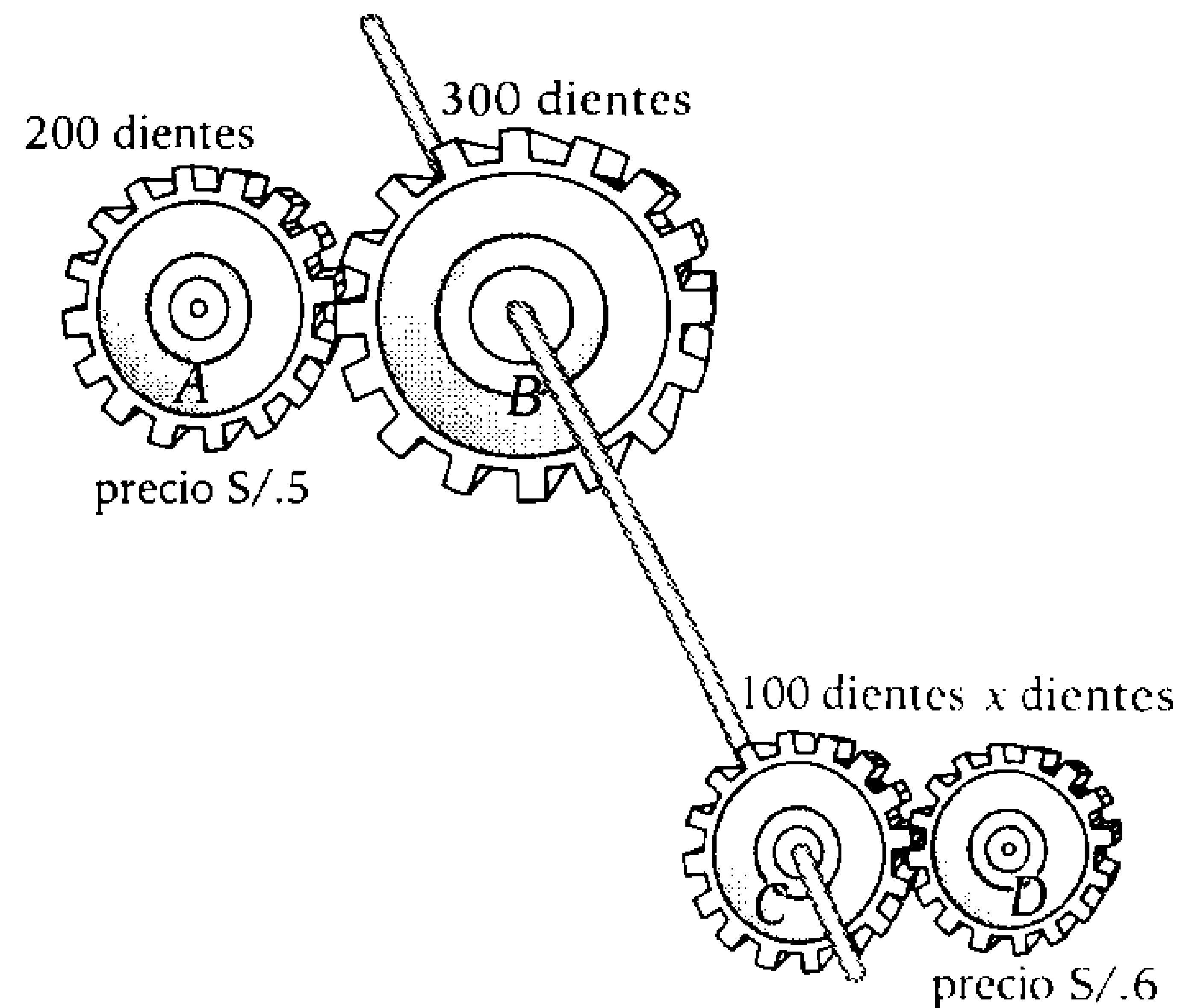
$x=385$

Por lo tanto, se necesitan 385 toneladas.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 44

El precio de cada engranaje se ha determinado con la condición de ser DP al producto del número de dientes y su peso. ¿Cuál será la relación de los pesos de los engranajes A y D, si cuando A da 6 vueltas D da 8 vueltas?



A) 6/7 B) 8/9
C) 16/9
D) 5/24 E) 10/24

Resolución

Sean:

P: precio de cada engranaje

W: peso de cada engranaje

V_i: número de vueltas del engranaje i

Del enunciado, se tiene que

$$\frac{P}{(\text{N.° de dientes})\times W}=\text{cte.}$$

Del gráfico:

- A y B están engranados:

  (N.° de vueltas) (N.° de dientes) = cte.

  $V_A\times200=V_B\times300 \rightarrow V_B=4$

  ($V_A = 6$)

- B y C están unidos por un eje común, entonces

  $V_B=V_C=4$

- C y D están engranados:

$$\underset{\substack{\uparrow\\4}}{V_C}\times 100=\underset{\substack{\uparrow\\8}}{V_D}\cdot x \rightarrow x=50$$

- Luego, trabajamos con A y D en la condición del problema

$$\frac{5}{200\times W_A}=\frac{6}{50\times W_D}$$

$$\therefore\ \frac{W_A}{W_D}=\frac{5}{24}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 45

Ana, Bety y Carla forman una sociedad: los capitales de Ana y Bety están en la relación de 8 a 16, pero los de Bety y Carla están en la relación de 51 a 17. A los 5 meses de iniciada, Ana se retira; 3 meses después, Bety también lo hace; y 4 meses más tarde, Carla liquidó la sociedad para luego repartir las utilidades. ¿Cuál fue la utilidad total si Bety recibió S/.600 más que Carla?

A) S/.2175
B) S/.2751
C) S/.2157
D) S/.2517
E) S/.2400

Resolución

De los capitales de Ana(A), Bety(B) y Carla(C), nos dicen

$$\frac{A}{8}=\frac{B}{16}\ ;\ \frac{B}{51}=\frac{C}{17}$$

Simplificando e igualando respecto de B, tenemos

$$\frac{A}{1\times 3}=\frac{B}{2\times 3}\qquad \frac{B}{3\times 2}=\frac{C}{1\times 2}$$

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{6}=\frac{C}{2}=K\ \begin{cases}A=3K\\ B=6K\\ C=2K\end{cases}$$

Ganancia (G)	G_A	G_B	G_C
Capital (C)	$3K$	$6K$	$2K$
Tiempo (T)	$5m$	$8m$	$12m$

$$\boxed{\frac{G}{C\times T}=\text{cte.}}\ \rightarrow\ \frac{G_A}{3K\cdot 5}=\frac{G_B}{6K\cdot 8}=\frac{G_C}{2K\cdot 12}$$

$$\frac{G_A}{5}=\frac{G_B}{16}=\frac{G_C}{8}=\frac{\overset{600}{G_B-G_C}}{16-8}=75$$

$$\frac{G_A+G_B+G_C}{5+16+8}=75$$

Calculamos la ganancia total

$$G_A+G_B+G_C=29\times 75$$

$$G_A+G_B+G_C=2175$$

Por lo tanto, la utilidad total fue S/2175.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 46

Dos personas deciden hacer una apuesta sobre quién es más hábil, para lo cual ambos deciden construir una pared. Se sabe que el primero utilizó los 7/4 del tiempo que utilizó el segundo para construir una pared 8 metros más alta que la del segundo, y que, si hubiesen trabajado juntos el tiempo que empleó el segundo, habrían construido solo 12 metros de pared. Calcule la relación de eficiencias si las paredes son de igual base.

A) 5/9 B) 10/11 C) 20/13
D) 29/17 E) 31/22

Resolución

Sabemos que

$$\frac{(\text{N.° personas})(\text{N.° días})(\text{eficiencia})}{\text{obra}} = \text{cte.}$$

- La obra solo dependerá de la altura, ya que las paredes son de igual base.

	Solo		Juntos
Persona	1.ª	2.ª	1.ª y 2.ª
N.° de días	7	4	4
Eficiencia	e_1	e_2	e_1 y e_2
Obra	$h+8$	h	12

Luego:

$$\frac{1\times 7\times e_1}{h+8} = \frac{1\times 4\times e_2}{h} = \underbrace{\frac{(1\times e_1 + 1\times e_2)4}{12} = \frac{7e_1 - 4e_2}{8}}_{20e_2 = 13e_1}$$

$$\therefore\ \frac{e_1}{e_2} = \frac{20}{13}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 47

La eficiencia de una persona es IP al número de horas por día que labora, y también IP al número de días laborados. Si dicha persona hace una obra en 24 días laborando 6 horas por día, calcule en qué tiempo hará el cuádruple de la obra laborando 9 horas diarias.

A) 30 B) 32 C) 60
D) 64 E) 72

Resolución

En la proporcionalidad

$$\frac{(\text{N.° días})(\text{h/d})}{(\text{obra})} = \text{cte.}$$

24 días — x días
6 h/d — 9 h/d
n — $4n$

$$\frac{24\times 6}{n} = \frac{x\cdot 9}{4n} \rightarrow x = 64$$

Por lo tanto, el cuádruple de la obra lo hará en 64 días.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 48

Se contrata a 10 obreros para hacer una obra en 20 días trabajando 8 horas diarias. Luego de 5 días, 4 obreros se accidentan y el resto sigue trabajando por 5 días, incrementando en 2 horas el trabajo diario. ¿Cuántos obreros se debe contratar a partir de este momento para terminar la obra en el plazo fijado, si mantienen las 10 horas diarias de trabajo?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Sabemos que:

(N.° de obreros) (tiempo) = cte.

Ahora trabajemos solo con lo que falta de la obra, la cual tenía que ser realizada por los 10 obreros en 15 días trabajando 8 horas diarias.

Sin embargo, se realizó así:

	I	II
N.° de obreros	6	$(6+n)$
N.° de días	5	10
Horas diarias	10	10

Luego

$10\times15\times8=6\times5\times10+(6+n)\times10\times10$

$n=3$

Por lo tanto, se deben contratar 3 obreros.

Clave **C**

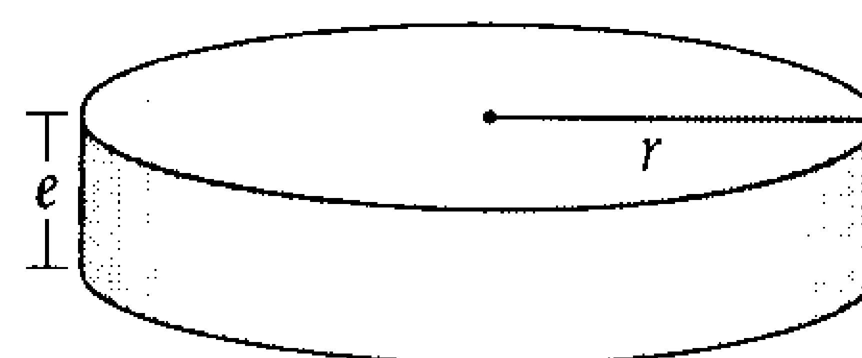
PROBLEMA N.° 49

Se sabe que el peso de un disco circular es DP a su área (cuando el espesor es cte.) y es DP al espesor (cuando el radio es cte.). Se tienen 2 discos cuyos pesos están en la relación de 2 a 3 y cuyos radios están en la relación de 4 a 3, respectivamente. ¿En qué relación estarán sus espesores?

A) 3/5 B) 3/6
C) 3/7
D) 3/8 E) 3/9

Resolución

Graficamos



$$\frac{(\text{peso})}{(\text{área})(\text{espesor})}=\text{cte.}$$

De los datos, tenemos:

Peso	$2n$	$3n$
Radio	$4K$	$3K$
Espesor	e_1	e_2

$$\frac{2n}{\pi(4K)^2\cdot e_1}=\frac{3n}{\pi\cdot(3K)^2 e_2}$$

$$\frac{1}{8\times e_1}=\frac{1}{3e_2}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{e_1}{e_2}$$

Por lo tanto, estarán en relación de 3/8.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 50

Se reparte una bonificación entre tres personas, en forma directamente proporcional a los números a, b y c. Si el reparto se hubiera hecho en forma inversamente proporcional a dichos números, el segundo recibiría la misma cantidad.

Calcule

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{a}{b}+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\times\frac{b}{c}}$$

A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 5/2 E) 3

Resolución

- Se reparte en forma DP a los números a, b y c.

  Sean las partes P_1, P_2 y P_3, tenemos

  $$\frac{P_1}{a}=\frac{P_2}{b}=\frac{P_3}{c}=K$$

  $P_1=aK$, $P_2=bK$, $P_3=cK$

  Calculamos la bonificación

  $P_1+P_2+P_3=(a+b+c)K$

- Si se hubiera repartido en forma IP a los números a, b y c

  Sean las partes P'_1, P'_2 y P'_3, tenemos:

  $a\times P'_1=b\times P'_2=c\times P'_3$

  Luego, dividimos entre $a\times b\times c$.

  $$\frac{P'_1}{b\times c}=\frac{P'_2}{a\times c}=\frac{P'_3}{a\times b}=n$$

  $P'_1=b\times c\times n$, $P'_2=a\times c\times n$, $P'_3=a\times b\times n$

  Calculamos la bonificación

  $P'_1+P'_2+P'_3=(b\times c+a\times c+a\times b)\times n$

  Luego,

  $P_1+P_2+P_3=P'_1+P'_2+P'_3$

  $(a+b+c)K=(b\times c+a\times c+a\times b)\times n$

Además

$P_2=P_2'$

$bK=a\times c\times n$

$$bK=a\times c\times\left[\frac{(a+b+c)\times K}{(b\times c+a\times c+a\times b)}\right]$$

$\rightarrow b^2=a\times c$

Piden

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{a}{b}+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\times\frac{b}{c}}=\frac{a\times c+2\times b^2}{2\times a\times c+b^2}$$

Reemplazamos

$b^2=a\times c$

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{a}{b}+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\times\frac{b}{c}}=\frac{a\times c+2(a\times c)}{2\times a\times c+(a\times c)}=1$$

Clave **A**

Capítulo

14

Tanto por cuanto

Debemos tener en cuenta que el tanto por ciento es una de las expresiones matemáticas que más usamos en la vida cotidiana, claro que cuando la relacionamos con una determinada cantidad, terminamos hablando en realidad de porcentajes. Por ejemplo, podemos decir que en el examen de admisión UNI 2009-II nuestros alumnos (de la academia César Vallejo) cubrieron el 82,4% de las vacantes.

Las aplicaciones del tanto por ciento son diversas; por ejemplo, en lo comercial se usa para saber qué tanto por ciento se gana o se pierde del precio de costo, en qué tanto por ciento se incrementó el costo de un producto o qué tanto por ciento del precio de lista se ha rebajado.

Es común hoy en día que las tiendas por departamento ofrezcan rebajas sobre rebajas, pero usted no se dejará sorprender con un 30% + 20%, que no es 50%, sino que equivale a una rebaja única del 44%, ya que la segunda rebaja se efectuó sobre lo ya rebajado.

Capítulo 14

Tanto por cuanto

PROBLEMA N.° 1

El precio de una tela se rebaja en 12%, y con el dinero que tiene José puede comprar 6 metros más de tela. En las actuales condiciones, ¿cuántos metros de tela puede comprar José?

A) 38 B) 46 C) 44
D) 50 E) 52

Resolución

Si el precio inicial es 100% <> 100
se descuenta: 12% <> 12
el nuevo precio es 88% <> 88

-12

Precio unitario	100	88
Longitud de tela (metros)	n	$n+6$

Costo total: $100\times n=88(n+6)$
$\rightarrow\ n=44$

Ahora puede comprar: $n+6$
$=44+6$
$=50$

Por lo tanto, José podrá comprar 50 metros.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Si la base de un triángulo disminuye en 20% y la altura relativa a dicha base aumenta en 30%, entonces, su área varía en 0,3 cm^2. Calcule la suma de las medidas de la base y altura mencionadas, si se sabe que son números enteros y diferentes de la unidad.

A) 7 cm B) 8 cm C) 12 cm
D) 9 cm E) 10 cm

Resolución

Si

$$\mathbb{A}_0=\frac{b\times h}{2}$$

$$\mathbb{A}_F=\frac{(80\%b)(130\%h)}{2}=104\%\underbrace{\left(\frac{b\times h}{2}\right)}_{\mathbb{A}_0}$$

Entonces, el área varía en:

$$4\%\left(\frac{bh}{2}\right)=\underbrace{0,3}_{\text{dato}}$$

$b\times h=15$
↓ ↓
5 3
3 5

Por lo tanto, la suma de las medidas de la base y altura es 8 cm.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

La suma de tres números, a, b y c, es 1870. Si b y c disminuyen en un 80% y 50%, respectivamente, se hacen iguales. Calcule la suma de los dos menores números. Considere que a es el 30% de b.

A) 670 B) 690 C) 730 D) 770 E) 795

Resolución

Datos: $a+b+c=1870$

$$b-80\%b=c-50\%c \rightarrow 20\%b=50\%c \rightarrow \frac{b}{5}=\frac{c}{2}$$

$$a=30\%b \rightarrow a=\frac{30}{100}b \rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{10}$$

Tenemos

$$\frac{b}{5\times 2}=\frac{c}{2\times 2} \wedge \frac{a}{3}=\frac{b}{10} \rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{10}=\frac{c}{4}=\frac{\overbrace{a+b+c}^{1870}}{3+10+4}=110$$

Los menores son: $a=3\times 110$; $c=4\times 110$

$\therefore\ a+c=770$

Clave D

PROBLEMA N.° 4

En una conferencia, el 70% son varones, además, el 40% de los varones y el 60% de las mujeres usan anteojos. ¿Cuántas personas hay en dicha reunión si 108 no usan anteojos?

A) 140 B) 150 C) 180 D) 200 E) 220

Resolución

Recuerda que el complemento lo tomaremos como lo que falta para 100%.
Por ejemplo, si el 70% son varones, entonces el 30% serán mujeres.

	V	M	Total
	$70K$	$30K$	$100K$
no usan anteojos	$60\%(70K)=42K$	$40\%(30K)=12K$	$54K$

Se sabe que

$$54K=108$$
$$\downarrow$$
$$2$$

Por lo tanto, en dicha reunión hay $100K=100(2)=200$ personas.

Clave D

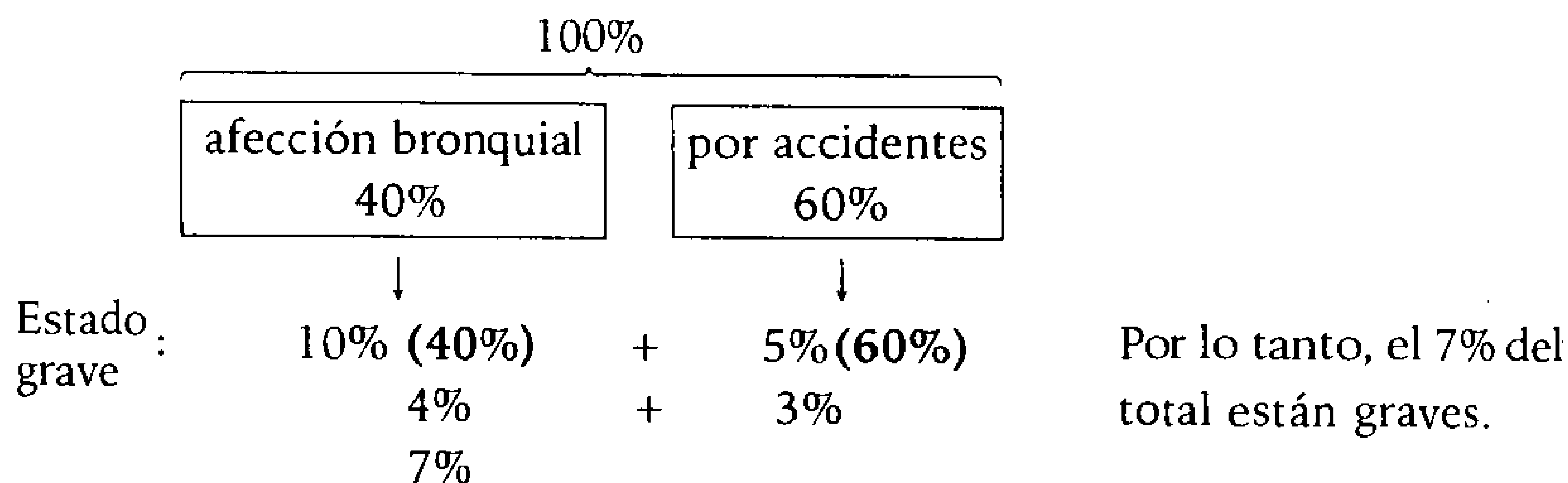
PROBLEMA N.° 5

En una sala de emergencia registramos el 40% de personas enfermas por afección bronquial y el resto de personas enfermas por accidente. De los que padecen afección bronquial, el 10% está grave; y de los accidentados, el 5% está grave. Calcule qué tanto por ciento de las personas está en la condición de graves.

A) 7% B) 10% C) 12% D) 15% E) 8%

Resolución

Del 100% de la sala de emergencia:
el 40% están enfermos por afección bronquial y el 60%, por accidente.



Estado grave: 10% (40%) + 5%(60%)
4% + 3%
7%

Por lo tanto, el 7% del total están graves.

Clave A

PROBLEMA N.° 6

En una empresa se observa que el 30% de los varones están casados, así como el 40% de las mujeres. Después, se observa que se divorcia el 20% de los varones casados, así como el 3% de las casadas. Además, la cantidad de varones es 120% de la cantidad de mujeres. Calcule la variación porcentual en el número de casados.

A) 11,05% B) 12,05% C) 10,05% D) 20,05% E) 50%

Resolución

Asumiendo que hay $100K$ mujeres:

	V	M	Total
	$120K$	$100K$	$220K$
Casados	$30\%(120K)=36K$	$40\%(100K)=40K$	$76K$
Se divorcian	$20\%(36K)=7,2K$	$3\%(40K)=1,2K$	$8,4K$

Observe que la cantidad de casados varía en $8,4K$.

Luego $\dfrac{8,4K}{76K}\times 100\% = 11,05\%$

Por lo tanto, la variación porcentual en el número de casados es 11,05%.

Clave A

PROBLEMA N.° 7

En una reunión social, el 40% de los varones baila, así como el 75% de las mujeres. Si el 10% de los varones que no baila saca a bailar a una dama, ¿en qué tanto por ciento varía el número de mujeres que bailan?

A) 10% B) 13% C) 12%
D) 15% E) 8%

Resolución

N.° de varones: V

N.° de mujeres: M

Como se baila en parejas, se cumple:

$$\begin{pmatrix}\text{N.° de varones}\\ \text{que bailan}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{N.° de mujeres}\\ \text{que bailan}\end{pmatrix}$$

$$40\%V = 75\%M$$

$$\frac{V}{15} = \frac{M}{8}=K$$

$$V=15K \quad \wedge \quad M=8K$$

	varones 15K	mujeres 8K
Bailan	40%(15K)	$\underbrace{75\%(8K)}_{6K}$
No bailan	$\underbrace{60\%(15K)}_{9K}$	25%(8K)

Salen a bailar: 10%(9K) varones con igual cantidad de mujeres

De las mujeres:

Antes bailaban: $6K$ —— 100%

Aumenta en: 10% $9K$ —— x%

Efectuando, tenemos

$$\frac{100\%}{6K}=\frac{x\%}{10\%(9K)}$$

$$\rightarrow x=15$$

Por lo tanto, el número de mujeres que bailan aumenta en 15%.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Para que José cancele su deuda con Miguel, se presta dicha cantidad de Ramiro, con lo cual la deuda que tenía con él aumenta en 40%. No obstante, luego le paga S/.630 y su deuda total disminuye en 30%. Halle la cantidad que José debía a Miguel.

A) S/.250 B) S/.280 C) S/.420
D) S/.600 E) S/.700

Resolución

Del enunciado tenemos

	Miguel	Ramiro
deuda inicial	2K	5K
se presta	–	40%(5K)=2K
paga	2K	–
deuda final	0	7K

Si al pagar S/.630 su deuda total disminuye en 30%, entonces:

$$30\%(7K)=630$$

$$K=300$$

Por lo tanto, José debía S/.600 a Miguel.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

Juan apostó todo su dinero en un casino y perdió el 40%; sin embargo, luego ganó el 40% de lo que le quedó. Si se retiró del casino con S/.63, ¿cuánto dinero tuvo al inicio?

A) S/.65 B) S/.70 C) S/.75 D) S/.80 E) S/.85

Resolución

Sea el dinero que tuvo al inicio: N

Luego

1.°	2.°	Al final
pierde el 40%	de lo que queda, gana el 40%	se retira con 63

$$N\times(100\%-40\%)(100\%+40\%)=63$$

$$N\times 60\%\times 140\%=63 \rightarrow N\times\frac{60}{100}\times\frac{140}{100}=63 \rightarrow N=75$$

Por lo tanto, al inicio tuvo S/.75

Clave C

PROBLEMA N.° 10

En un colegio, se sabe que el número de alumnos varones es el 70%; además, el número de alumnos que solo tienen hermanos es el $66,\bar{6}$ % del número de alumnos que solo tienen hermanas, y estos últimos son el 60% del número de alumnos que tienen hermanos y hermanas. Determine qué tanto por ciento del total son los alumnos que tienen solo hermanas, si todos tienen hermanos o hermanas.

A) 21% B) 44% C) 50% D) 30% E) 75%

Resolución

En primer lugar $66,\bar{6}\% = \left(66+\frac{2}{3}\right)\% = \frac{2}{3}$

Luego

Alumnos que solo tienen hermanos	Alumnos que solo tienen hermanas	Alumnos que tienen hermanos y hermanas	Total de alumnos
$\frac{2}{3}(3K)=2K$	$60\%(5K)=3K$	**5K**	$10K$

Piden

$$\frac{3K}{10K}\times 100\% = 30\%$$

Por lo tanto, el 30% del total de alumnos tienen solo hermanas.

Clave D

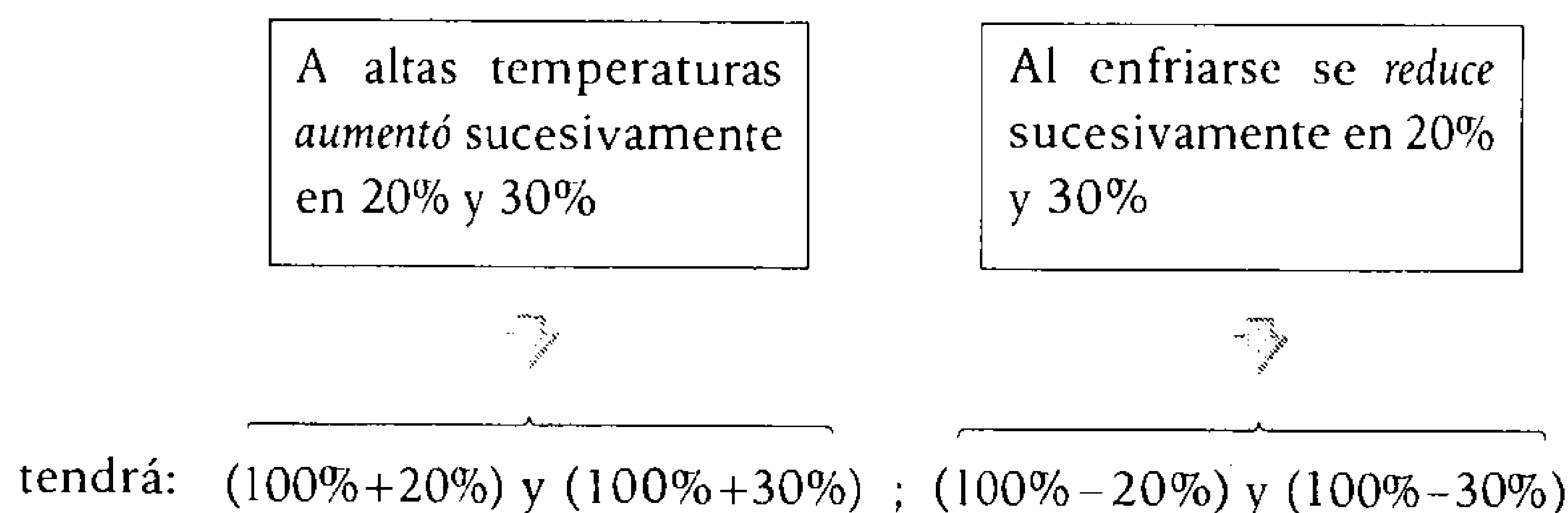
PROBLEMA N.° 11

A altas temperaturas, un compuesto N sufre dos aumentos sucesivos del 20% y 30% de su volumen; además, al enfriarse se reduce sucesivamente en 20% y 30%. Calcule la variación porcentual del volumen del compuesto.

A) No hay variación.
B) Aumenta en 12,64%.
C) Disminuye en 12,64%.
D) Disminuye en 10%.
E) Aumenta en 10%.

Resolución

Sea el volumen inicial: V

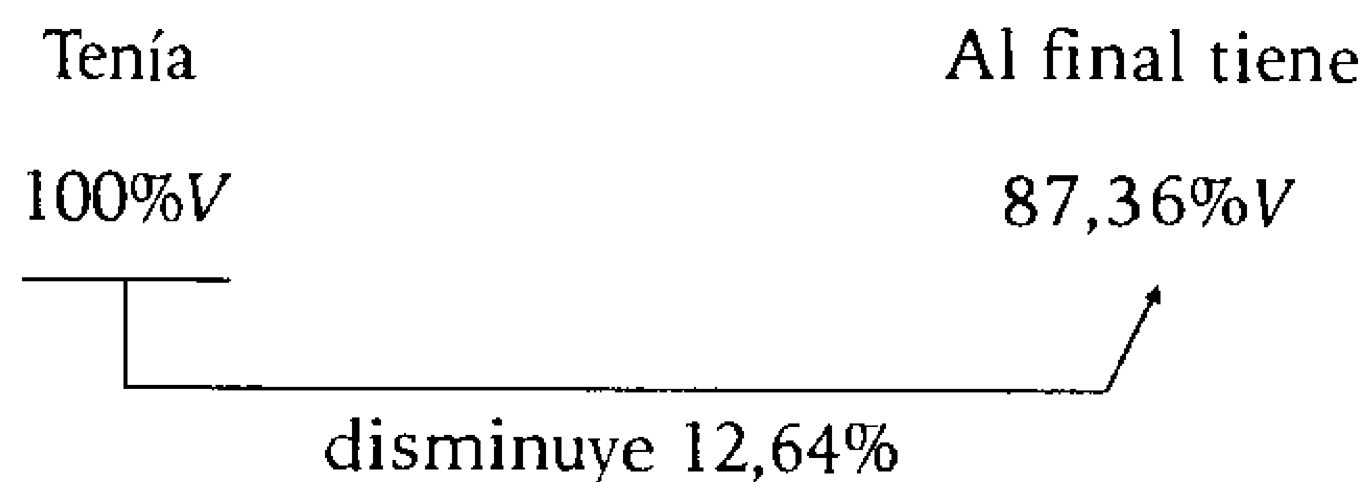


Al final, tenemos:

$$V\cdot 120\%\cdot 130\%\cdot 80\%\cdot 70\%$$

$$V=\frac{120}{100}\cdot\frac{130}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot 70\%$$

$$=87{,}36\%\%\times V$$



Por lo tanto, disminuye 12,64%.

Clave C

PROBLEMA N.° 12

Un envase con aceite cuesta S/.8,4, pero el envase solo cuesta S/.6 menos que el aceite. ¿En qué tanto por ciento es mayor el costo del aceite con respecto al costo del envase?

A) 100%
B) 200%
C) 250%
D) 500%
E) 400%

Resolución

Sean:

E: costo del envase
A: costo del aceite

Entonces

$$\begin{aligned} E+A &= 8{,}4 \\ A-E &= 6 \end{aligned} \quad (-)$$

$$2E = 2{,}4$$

$$E = 1{,}2$$

Piden

$$\frac{A-E}{E}\times 100\% = \frac{6}{1{,}2}\times 100\% = 500\%$$

Por lo tanto, es mayor en 500%.

Clave **D**

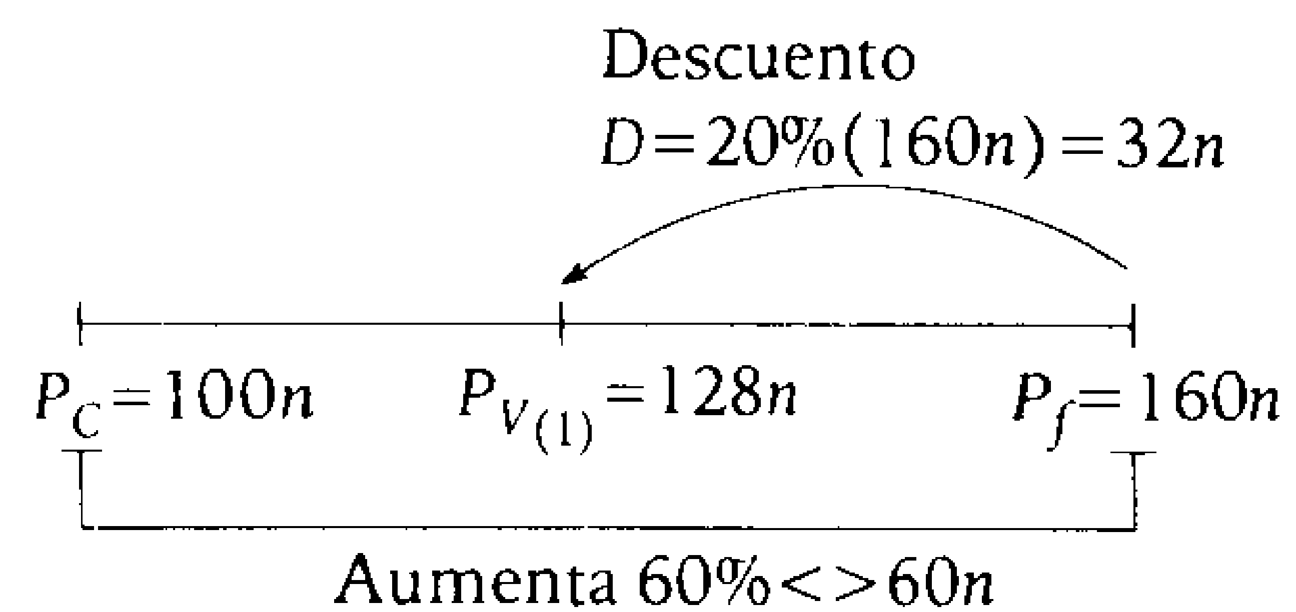
PROBLEMA N.° 13

Para fijar el precio de un artículo, se aumentó su costo en 60%, pero al momento de venderlo se rebajó en un 20%. No obstante, si se incrementara su costo en 80% y efectuara el mismo descuento, se ganaría S/.360. Halle el precio al que se vendió.

A) S/.1080
B) S/.960
C) S/.1020
D) S/.980
E) S/.1060

Resolución

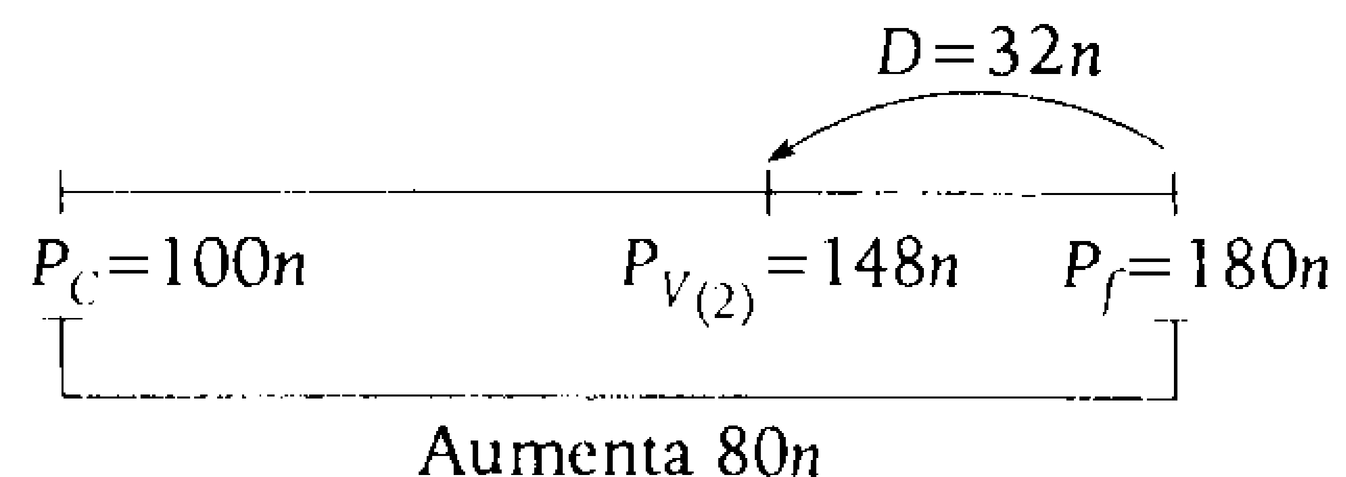
Sea el precio de costo (P_C): $100n$.



El caso supuesto es

Aumenta el costo en 80% < > $80n$

y el mismo descuento $D=32n$



Ganancia

$G=360$

$P_{V(2)}=P_C+G$

$148n=100n+360 \rightarrow n=\dfrac{15}{2}$

Se vendía al precio

$$P_{V(1)} = 128\times\left(\frac{15}{2}\right)$$

$\therefore\ P_{V(1)}=960$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

Se fija el precio de un televisor aumentando el $a\%$ de su costo. Luego, se efectúa un descuento equivalente al 25% de su precio de costo y se observa que se gana el 20% de su precio de venta. Halle a.

A) 20 B) 25 C) 40
D) 50 E) 75

Resolución

Sea $P_V=5K$

Tenemos:

- $P_V=P_C+G$ con $P_V = 5K$, $P_C = 4K$, $G = 20\%(5K)$
- $P_V = P_f - \text{Descuento}$

$$5K=(4K+a\%4K)-25\%(4K)$$

$$\rightarrow\ a\%=50\%$$

$\therefore\ a=50$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

En una granja, el 20% del total de aves son patos, 45% son gallinas y el resto pavos. Si el número de patos se incrementa en su doble, ¿qué tanto por ciento del total sería el número de pavos?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 35% E) 40%

Resolución

Sea el número de aves $100n$

aumenta $2(20n)=40n$

			$+40n$	
Patos :	20% <>	$20n$		$60n$
Gallinas:	45% <>	$45n$		$45n$
Pavos :		$35n$		$35n$
		$100n$		$140n$

Al final

$140n$ —— 100%
$35n$ —— $x\%$

$$\frac{x\%}{35n}=\frac{100\%}{140n}$$

$$x=25$$

$$x\%=25\%$$

Por lo tanto, el número de pavos es al 25% del total.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Luis desea comprar una laptop, entonces, va a una tienda, pero descubre que le faltan S/.200. Si espera un mes, le faltarían S/.308, debido a que el vendedor incrementa el precio en 2% cada mes. Si Luis llegara a un acuerdo con el vendedor para comprar la laptop con el dinero que posee, este último dejaría de ganar el 5% del costo. ¿Cuánto ganaría el vendedor con este acuerdo?

A) S/.900 B) S/.1000 C) S/.1100
D) S/.1200 E) S/.1300

Resolución

- Vemos que dentro de un mes le faltarían S/.108 más, entonces
  $108=2\%P_V$
  $\rightarrow\ P_V=\text{S/.}5400$
- Además, con el acuerdo, el vendedor dejaría de ganar S/.200, entonces
  $200=5\%P_C$
  $\rightarrow\ P_C=\text{S/.}4000$

Luego, el vendedor recibiría
$P_V-200=\text{S/.}5200$

Por lo tanto, ganaría
S/. $5200-P_C=\text{S/.}1200$

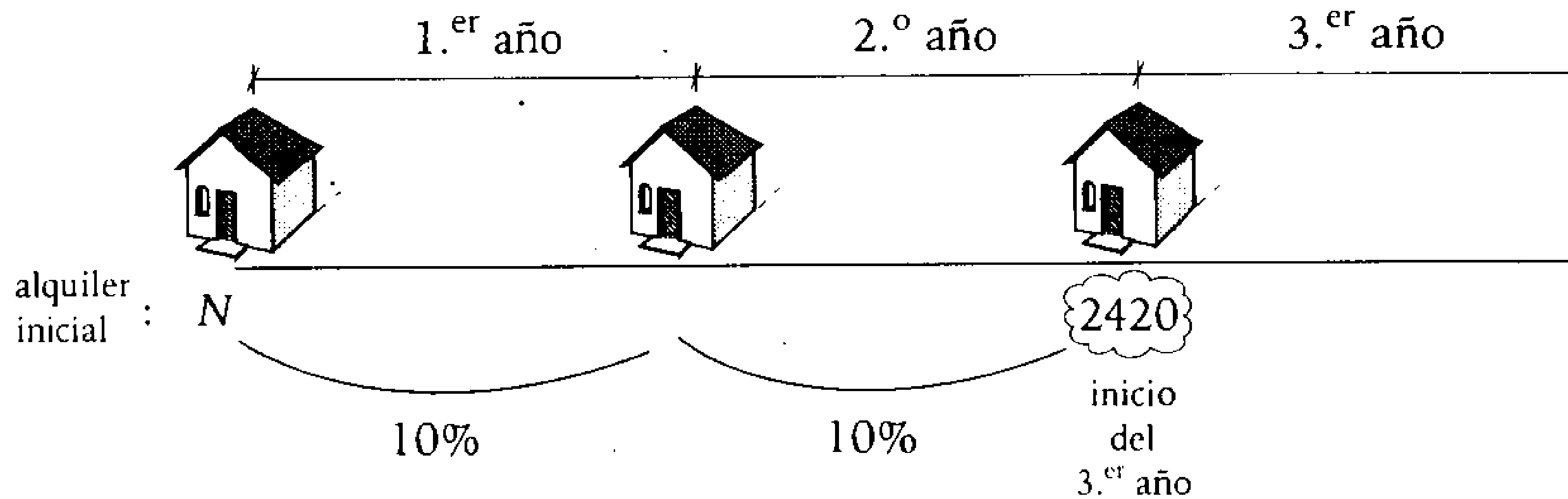
Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

El alquiler de una casa aumenta cada año en 10%. Si al comienzo del tercer año debe pagarse S/.2420, ¿cuál fue el alquiler inicial?

A) S/.1000   B) S/.2000   C) S/.1500   D) S/.2500   E) S/.3000

Resolución



Dos aumentos sucesivos del 10%, entonces $N\cdot 110\%\cdot 110\%=2420$

$$N\cdot\frac{110}{100}\cdot\frac{110}{100}=2420 \rightarrow N=2000$$

Por lo tanto, el alquiler inicial fue S/.2000.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

En una fábrica se han fabricado 1000 productos, el 60% de ellos ha sido fabricado por la máquina *A* y el resto, por la máquina *B*. Si se sabe que el 5% de lo fabricado por *A* es defectuoso y el 4% de *B* también, calcule cuántos de los 1000 productos son defectuosos.

A) 40   B) 45   C) 46   D) 50   E) 90

Resolución

	A	B	Total
Producto	60%×1000=600	400	1000
Defectuoso	5%×600=30	4%×400=16	46

Por lo tanto, 46 productos son defectuosos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

Para la construcción de un edificio se compraron ladrillos a S/.1200 el millar. Si se inutilizaron por diversas causas 3600 ladrillos, equivalentes al 0,1% del total comprado, calcule cuánto se invirtió en la compra.

A) S/.4 000 000
B) S/.4 080 000
C) S/.4 320 000
D) S/.4 800 000
E) S/.4 300 000

Resolución

Se compra N millares de ladrillos.

- Cantidad de ladrillos inutilizados 3600 ladrillos <> 3,6 millares
- 0,1% de N es 3,6

$$\frac{0,1}{100}\times N=3,6$$

$$\rightarrow N=3600 \text{ millares}$$

Cada millar costó S/.1200 y en 3600 millares invierte

$$S/.1200\times 3600=S/.4\,320\,000$$

Por lo tanto, se invirtió S/.4 320 000.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería S/.156. Calcule el valor del dinero inicial.

A) S/.1500
B) S/.1560
C) S/.1800
D) S/.2000
E) S/.3500

Resolución

Recuerda

Toda cantidad representa el 100% de sí misma.

Sea N el valor del dinero inicial, entonces queda:

$$128\%(70\%N)=89,6\%N$$

Pierdo

$$N-89,6\%N=10,4\%N$$

Del dato:

$$10,4\%N=S/.156 \rightarrow N=S/.1500$$

Por lo tanto, el dinero inicial es S/.1500.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 21

El presidente de un club de balompié observa que por partido, en promedio, un tercio de las entradas se queda sin vender; pero afirma que todas las entradas se venderían si se rebajase en un 30% el precio de cada entrada. Suponiendo correctas las hipótesis del presidente del club, determine qué sucedería con la recaudación.

A) Aumentaría en 30%
B) Disminuiría en 5%
C) Aumentaría en 5%
D) No varía
E) Se duplica

Resolución

Por dato:

- En promedio, un tercio de las entradas se quedan sin vender; sean en total $3n$ entradas, entonces, sin vender son: n y vendidas: $2n$.
- Si rebaja el precio inicial en 30%, vendería todas las entradas.

Entonces

	1.er caso		2.° caso
		$-30\%P$ →	
Precio de una entrada :	P		$70\%P$
Entradas vendidas :	$2n$		$3n$
	↓		↓
Recaudación:	$2n\times P$		$3n\times 70\%P$
	$2\times 100\%nP$		$210\%nP$

Aumenta $10\%nP$

Recaudación inicial $200\%nP$ —— 100%

Aumenta $10\%nP$ —— $x\%$

$$\rightarrow \frac{x\%}{10\%nP}=\frac{100\%}{200\%nP};\ x=5$$

Por la tanto, aumenta 5%

Clave C

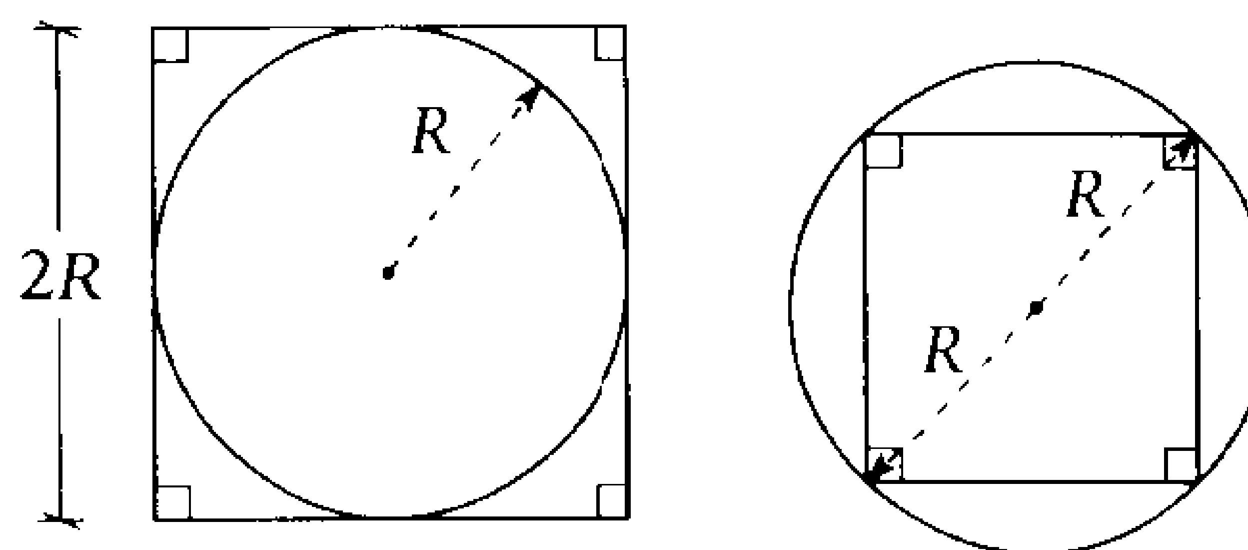
PROBLEMA N.° 22

Determine la relación entre a y b, si a es igual al tanto por ciento que representa el área de un círculo inscrito en un cuadrado, de lado $2R$, del área de dicho cuadrado. Además, b es igual al tanto por ciento que representa el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de diámetro $2R$, del área del círculo de radio R.

A) 3 a 4
B) 2π a 5
C) π^2 a 8
D) $2\pi^2$ a 7
E) π^2 a 3

Resolución

Del enunciado, tenemos:



$$a=\frac{\mathbb{A}_{\bullet\text{ inscrito}}}{\mathbb{A}_{\text{cuadrado}}}\times 100\% \qquad b=\frac{\mathbb{A}_{\blacksquare\text{ inscrito}}}{\mathbb{A}_{\text{círculo}}}\times 100\%$$

$$a=\frac{\pi\times R^2}{(2R)^2}\times 100\% \qquad b=\frac{2\times R^2}{\pi\times R^2}\times 100\%$$

$$\rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\pi^2}{8}$$

Por lo tanto, la relación entre a y b es de π^2 a 8.

Clave C

PROBLEMA N.° 23

Entre dos personas tienen un capital de S/.600. Si una de ellas gasta el 30% de su capital y la otra incrementa el suyo en 30%, tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto es el mayor capital?

A) S/.320 B) S/.340 C) S/.360
D) S/.390 E) S/.420

Resolución

Sean los capitales: A y B

$A+B=600$

Si A gasta 30% y B aumenta 30%, tendrían la misma cantidad de dinero.

$$A-30\%A=B+30\%B$$

$$70\%A=130\%B$$

$$7\times A=13\times B$$

$$\rightarrow \frac{A}{13}=\frac{B}{7}=\frac{\overbrace{(A+B)}^{600}}{13+7}=30$$

El mayor es

$$A=13\times 30$$

$$A=390$$

Por lo tanto, el capital mayor es S/.390.

Clave D

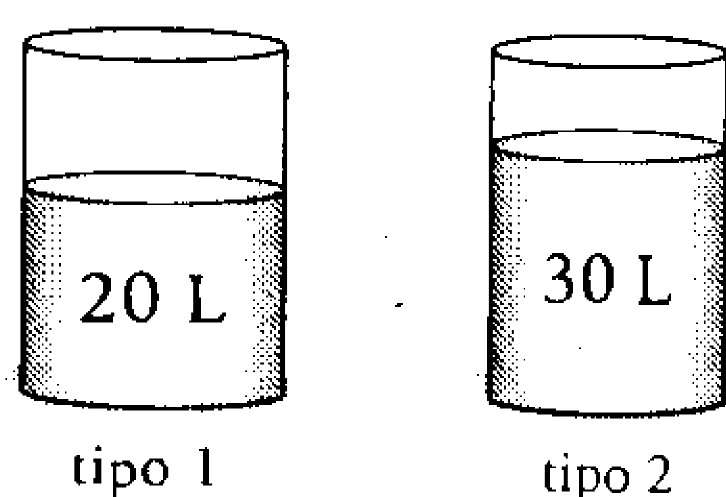
PROBLEMA N.° 24

De dos mezclas de 20 L y 30 L de vino de diferentes calidades, determine qué tanto por ciento representa la cantidad de vino que debe intercambiarse para tener vinos de idéntica calidad, con respecto de la diferencia de las cantidades de vinos iniciales.

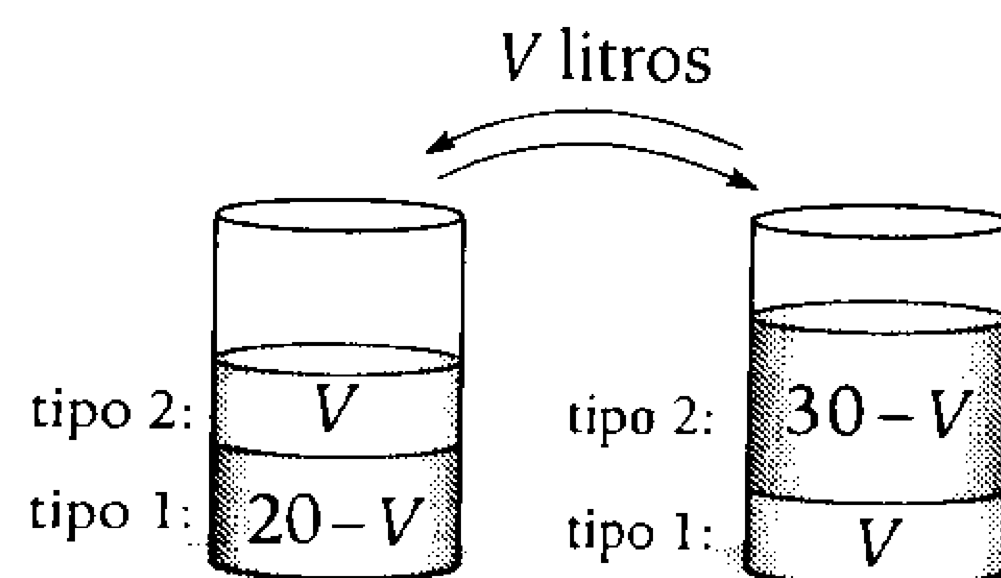
A) 40%
B) 50%
C) 60%
D) 85%
E) 120%

Resolución

Inicialmente se tiene



Si intercambiamos V litros, tenemos:



Luego, para que resulten vino de la misma calidad, en cada depósito los ingredientes deben estar en la misma relación.

$$\frac{20-V}{V}=\frac{V}{30-V} \rightarrow V=12 \text{ litros}$$

Piden

$$\frac{V}{30-20}\times 100\%=120\%$$

Clave E

PROBLEMA N.° 25

Al vender un televisor en S/.406,4, un comerciante ganó el 10% del 20% del 80% del costo. ¿A cuánto debe vender el televisor para ganar el 20% del 25% del 65% del costo?

A) S/.410
B) S/.412
C) S/.413
D) S/.414
E) S/.415

Resolución

En la primera venta, calculamos el costo (P_C)

$$P_V=P_C+G$$

$$406{,}4=P_C+10\%\cdot 20\%\cdot 80\%P_C$$

$$\rightarrow P_C=400$$

En la segunda venta

$P_V = P_C + G$

$P_{V(2)} = 400 + 20\% \times 25\% \times 65\% \times 400 \rightarrow P_{V(2)} = 413$

Por lo tanto, debe vender el televisor a S/.413.

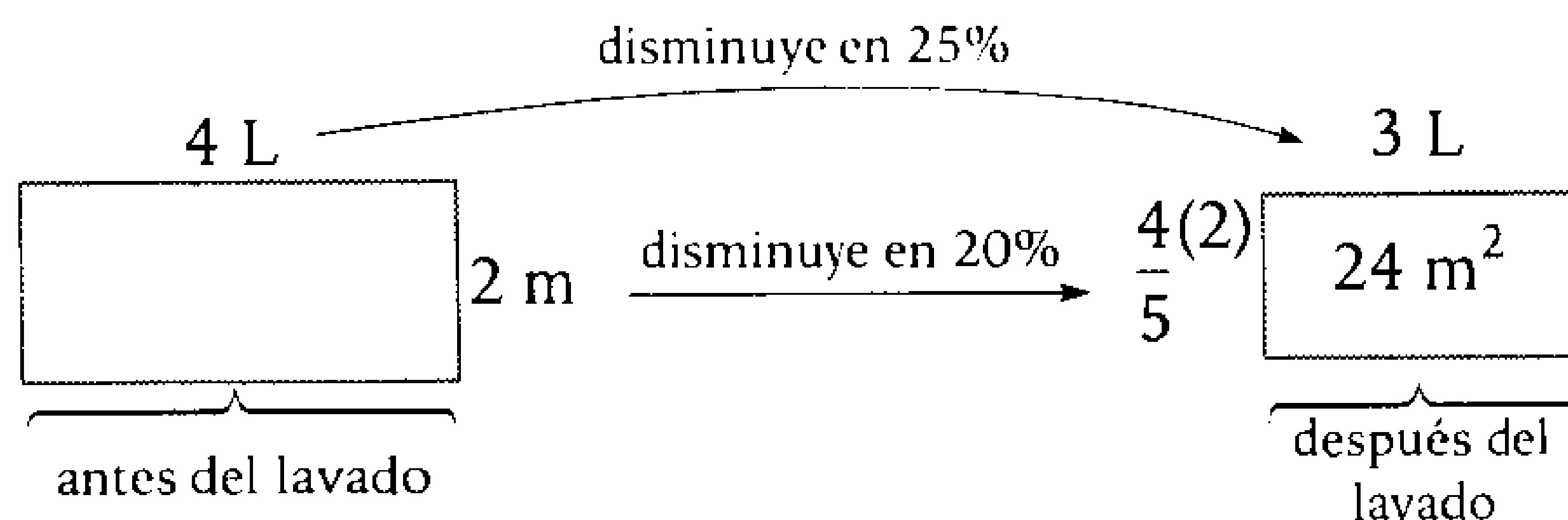
Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

Cuando se lava una tela, se encoge el 20% en el ancho y el 25% en el largo. Se sabe que la tela mide 2 m de ancho. ¿Qué longitud debe comprarse, si se necesitan 24 m^2 de tela después del lavado?

A) 10 m B) 20 m C) 25 m D) 30 m E) 35 m

Resolución



$$(3\text{ L})\left(\frac{4}{5} \times 2\right) = 24 \rightarrow 4\text{ L} = 20$$

Por lo tanto, se debe comprar 20 m de largo.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

¿Qué tanto por ciento habrá que disminuir a un número para que sea igual al 60% del 50% del 25% de sus 4/3?

A) 60% B) 70% C) 80%. D) 90% E) 10%

Resolución

Sea el número N

N disminuye su $x\%$ N	Queda el 60% del 50% del 25% de sus 4/3 de N.

$$N - x\%N = 60\% \times 50\% \times 25\% \times \frac{4}{3}N$$

$$100\%N - x\%N = 60\% \times \frac{50}{100} \times \frac{25}{100} \times \frac{4}{3}N \rightarrow x = 90\%$$

Por lo tanto, habrá que disminuirle el 90%.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

Se sabe que una mezcladora de concreto sufre una depreciación de 10% por cada año de uso, respecto del precio que tuvo al comenzar cada año. Si al cabo de cuatro años su precio es de S/.131 220, calcule su costo original.

A) S/.150000 B) S/.170000 C) S/.200000 D) S/.250000 E) S/.300000

Resolución

Si N es el costo original de la mezcladora, entonces, luego de cuatro años su precio será:

$$90\%90\%90\%90\% \times N = S/.131220 \rightarrow N = S/.200\,000$$

Por lo tanto, el costo original de la mezcladora es S/.200 000.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A está lleno en su mitad y el recipiente B en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de A y B con agua, vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente C. Si se sabe que la capacidad de B es el doble que la de A, determine el tanto por ciento de vino que contiene la mezcla en C, aproximadamente.

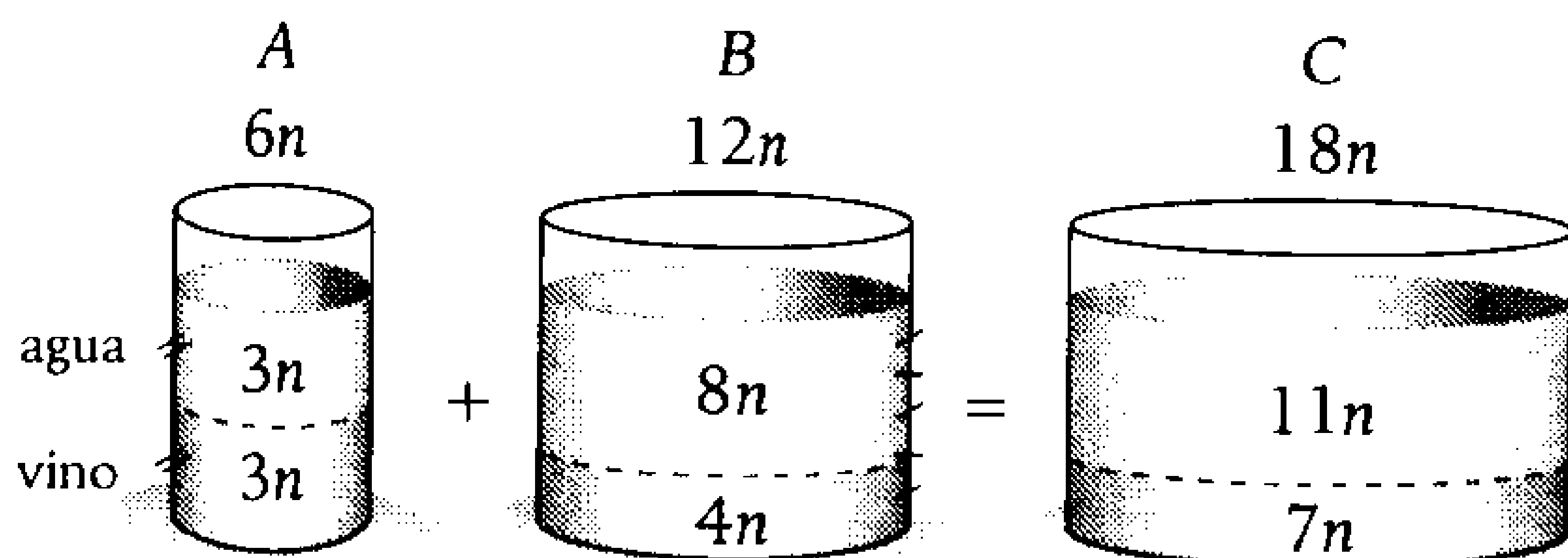
A) 36% B) $38,\widehat{8}\%$ C) 51% D) 54% E) 64%

Resolución

Datos:

- El volumen de B lleno en su tercera parte, entonces $V_B = \overset{\circ}{3}$
- El volumen de A lleno hasta su mitad; entonces $V_A = \overset{\circ}{2}$
- Si $V_B = 2V_A \rightarrow \dfrac{V_B}{2\times2\times3} = \dfrac{V_A}{1\times2\times3} = n$

$\rightarrow V_A = 6n;\ V_B = 12n$



En C:

$$\left.\begin{array}{lcl} 18n & — & 100\% \\ 7n & — & x\% \end{array}\right\} \frac{x\%}{7n} = \frac{100\%}{18n}$$

$x = 38,\widehat{8}$

Por lo tanto, la mezcla C contiene $38,\widehat{8}\%$ de vino, aproximadamente.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

En un corral, la relación de patos y gallinas es de 1 a 4. ¿Qué tanto por ciento de gallinas deben venderse para que el tanto por ciento de patos aumente en 5%?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 40% E) 45%

Resolución

Sean: P: el número de patos
G: el número de gallinas

Inicialmente se tiene: $P+G=\text{total}$

$\downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$K+4K=5K$

Donde se observa que el número de patos es el 20% del total. Luego, para que el tanto por ciento aumente en 5%, es decir, sea el 25% del total, sin que cambie el número de patos, tenemos:

$P+G'=\text{nuevo total}$

$\downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$K+3K=4K$

$\rightarrow \quad G-G'=K$

Observamos que el número de gallinas disminuye en la cuarta parte.

Por lo tanto, se debe vender el 25% de gallinas.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 31

Si el perímetro de una región circular aumenta en 30%, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

A) 50% B) 60% C) 69% D) 72% E) 80%

Resolución

Si el perímetro inicial es $P_1=100$, al aumentar su 30% será $P_2=130$. La relación de perímetros es

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{100}{130} \rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{10}{13}$$

De la circunferencia:

	Perímetro	DP	Radio		Área
	$2\pi \cdot r$		r		$\pi \cdot r^2$
Inicio		<>	10	<>	$\pi \cdot 10^2=100\pi$
	Aumenta 30%				
Final		<>	13	<>	$\pi \cdot 13^2=169\pi$

El área aumenta 69π <> 69%

Por lo tanto, el área aumenta en 69%.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

Los dueños de una fábrica prometieron aumentar mensualmente el sueldo de sus obreros en 40%, y luego de un mes los obreros recibieron lo prometido. Al mes siguiente recibieron S/.192 menos de lo acordado, debido a que los dueños aplicaron el tanto por ciento de aumento correspondiente a este sobre el sueldo del mes antepasado. ¿Cuánto debieron recibir los obreros?

A) S/.2250 B) S/.2352 C) S/.2420
D) S/.2460 E) S/.2550

Resolución

Sea S/.N el sueldo inicial de los obreros.

Al cabo de 2 meses debieron recibir

$$140\% \times 140\% \times N = 196\% N$$

Recibieron

$$140\% N + 40\% N = 180\% N$$

Además, se sabe que recibieron S/.192 menos de lo acordado, entonces

$$196\% N - 180\% N = 16\% N = 192 \rightarrow 196\% N = 2352$$

Por lo tanto, debieron recibir S/.2352.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

En la venta de un televisor gané tanto como rebajé, que es el 20% de lo que me costó. ¿Cuánto pensaba ganar inicialmente, si el televisor me costó S/.60 más de lo que gané?

A) S/.15 B) S/.30 C) S/.40
D) S/.45 E) S/.60

Resolución

Por dato:

G: ganancia
D: descuento

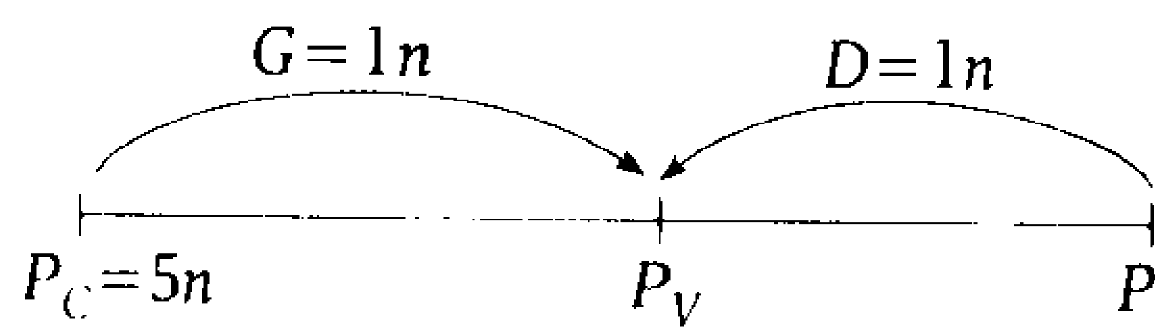
$$G = D = 20\% P_C$$
$$G = D = \frac{1}{5} P_C$$

P_C: Costo

$$\frac{G}{1} = \frac{D}{1} = \frac{P_C}{5} = n$$

$G = n$; $D = n$; $P_C = 5n$

En el esquema



- $P_V = P_C + G \rightarrow P_V = 5n + n = 6n$
- $P_f = P_V + D \rightarrow P_f = 6n + n = 7n$

Dato:

$$P_C - G = 60$$
$$5n - n = 60 \rightarrow n = 15$$

Sin el descuento pensaba ganar

$$G + D = 2n = 2 \times 15 = 30$$

Por lo tanto, inicialmente pensaba ganar S/.30

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

En un paseo de excursión se encuentra que el 40% de los asistentes lo representan los varones, el 28% es menor de edad y las mujeres mayores de edad representan el 42% del total. Si asistieron 35 varones menores de edad, ¿cuántas personas fueron de paseo?

A) 250 B) 275 C) 300
D) 325 E) 350

Resolución

Sea $100K$ el total de personas
Luego

	V ($40K$)	M ($60K$)
Menores de edad ($28K$)	$10K$ ←	$18K$ ↑
Mayores de edad		$42K$

Además

$10K=35$

$\rightarrow\ 100K=350$

Por lo tanto, 350 personas fueron de paseo.

Clave **E**

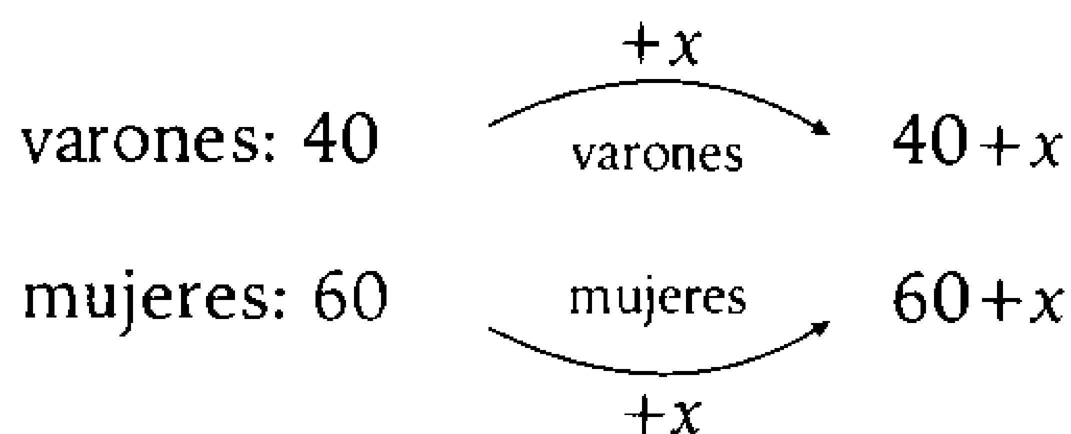
PROBLEMA N.° 35

En una reunión de 100 personas, el 40% son varones. ¿Cuántas parejas deben llegar a la reunión para que el número de varones sea el 75% del número de mujeres?

A) 10 B) 20
C) 30
D) 40 E) 50

Resolución

De las 100 personas iniciales aumentan en x parejas, aumenta x varones y x mujeres.



Por dato:

varones son el 75% de mujeres

$40-x=75\%\ (60+x)$

$\rightarrow\ x=20$

Por lo tanto, llegan 20 parejas.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

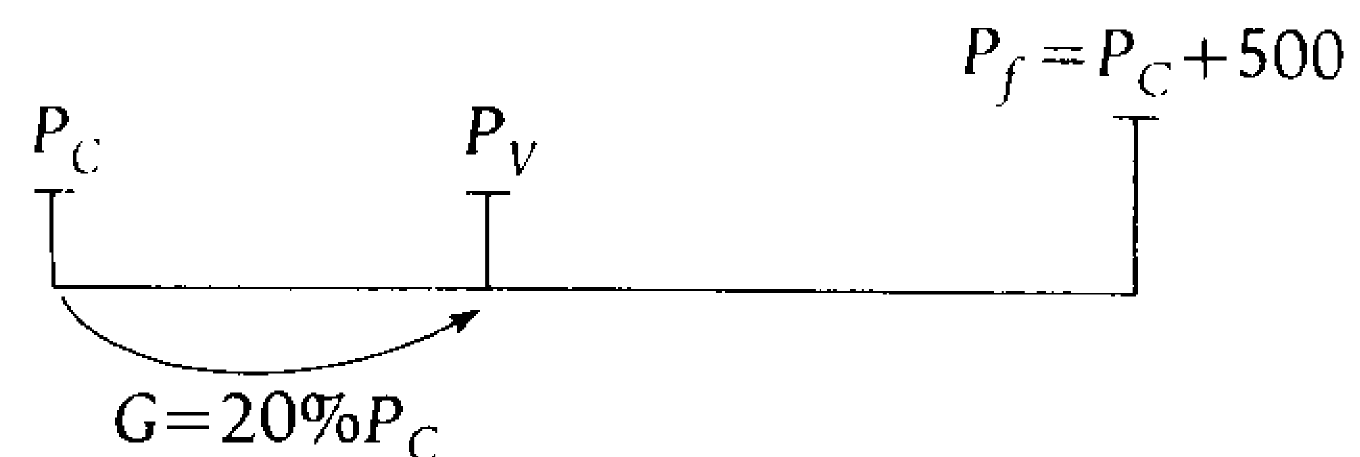
Al vender una refrigeradora se efectúan dos descuentos sucesivos del 10% y 20%, pero aun así se gana el 20%. Halle el costo de dicha refrigeradora, si se sabe que, cuando se fijó inicialmente su precio, el costo se incrementó en S/.500.

A) S/.600 B) S/.650 C) S/.700
D) S/.750 E) S/.810

Resolución

Recuerda

Cuando no se indica, la ganancia se toma respecto al P_C.



P_V

$P_C+20\%P_C=80\%90\%P_f$

$120\%P_C=80\%90\%(P_C+500)$

$P_C=S/.750$

Por lo tanto, el costo de la refrigeradora es S/.750

Clave **D**

PROBLEMA N.° 37

Se vende una mercadería en $10K$ soles ganando el $a\%$ de su costo. ¿Qué tanto por ciento se hubiera ganado, si la mercadería se hubiera vendido en $11K$ soles?

A) $\left(\dfrac{100+11a}{10}\right)\%$ B) $\left(\dfrac{100+10a}{11}\right)\%$

C) $\left(\dfrac{100+11a}{11}\right)\%$

D) $\left(\dfrac{100-11a}{11}\right)\%$ E) $\left(\dfrac{100-10a}{11}\right)\%$

Resolución

En ambos casos es el mismo costo (P_C)

$$P_V = P_C + G$$

1.^{er} caso: $10K=P_C+a\%P_C$ (I)

2.^{o} caso: $11K=P_C+x\%P_C$ (II)

(I) ÷ (II)

$$\frac{10}{11}=\frac{1+a\%}{1+x\%}$$

Resolviendo, tenemos $x=\dfrac{100+11a}{10}$

Por lo tanto, en la segunda venta gana el $\left(\dfrac{100+11a}{10}\right)\%$ del costo.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

¿En qué tanto por ciento debe incrementarse el precio de un artefacto para que aun haciendo un descuento del 20% se gane el 25% del precio de costo?

A) 50% B) 56,25% C) 54,25%
D) 40,25% E) 100%

Resolución

Recuerda

Cuando no se indica, el descuento se toma respecto al P_f.

$$\overbrace{P_C+G}^{P_V}=\overbrace{P_f-\text{Descuento}}^{P_V}$$

$G = 25\%P_C$, Descuento $= 20\%P_f$

$125\%P_C = 80\%P_f$

$P_f=156{,}25\%P_C$

$\rightarrow P_f-P_C=56{,}25\%P_C$

Por lo tanto, el costo se debe incrementar en 56,25%.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 39

En una fiesta, el número de varones que fuman es el 150% de los varones que no fuman; y las mujeres que no fuman son el $33,\widehat{3}\%$ de los varones que sí lo hacen. Determine qué tanto por ciento del total representa a los fumadores, si las mujeres son el 60% de los varones.

A) 20% B) 35,5% C) 44%
D) 50% E) 62,5%

Resolución

De los varones (V) y mujeres (M), sabemos:

- $V_{\text{fuman}}=150\%V_{\text{no fuman}}$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{fuman}}}{V_{\text{no fuman}}} \rightarrow \frac{150n}{100n} \qquad \text{(I)}$$

- $M_{\text{no fuman}}=\underbrace{33,\widehat{3}\%}_{1/3}V_{\text{fuman}}$ (II)

- $M=60\%V$ (III)

En (I): Sean los varones que no fuman: $100n$, entonces, varones que fuman: $150n$ y el total de varones será $250n$.

En (II): Mujeres que no fuman: $\frac{1}{3}(150n)=50n$

En (III): Mujeres: $60\%\ (100n+150n)=150n$

En un cuadro, tenemos

	varones	mujeres
fuman	$150n$	$100n$
no fumar	$100n$	$50n$

total: $400n$ (mujeres: $150n$)

total: $400n$ —— 100%
fuman: $250n$ —— $x\%$

$$\rightarrow \frac{x\%}{250n}=\frac{100\%}{400n} \rightarrow x=62{,}5$$

Por lo tanto, fuman el 62,5%.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 40

En una encuesta a los alumnos de la Academia, se obtuvo:

- El 55% aprobó Física.
- El 30% aprobó Química.
- El 50% aprobó Aritmética.
- El 40% de los que aprobaron Física no aprobaron ningún otro curso, y el 20% de los que aprobaron Física también aprobaron Química pero no Aritmética.
- El 14% no aprobó ningún curso.
- 48 alumnos aprobaron Química y Aritmética.
- El 5% aprobó los tres cursos.

¿Cuántos aprobaron al menos dos cursos?

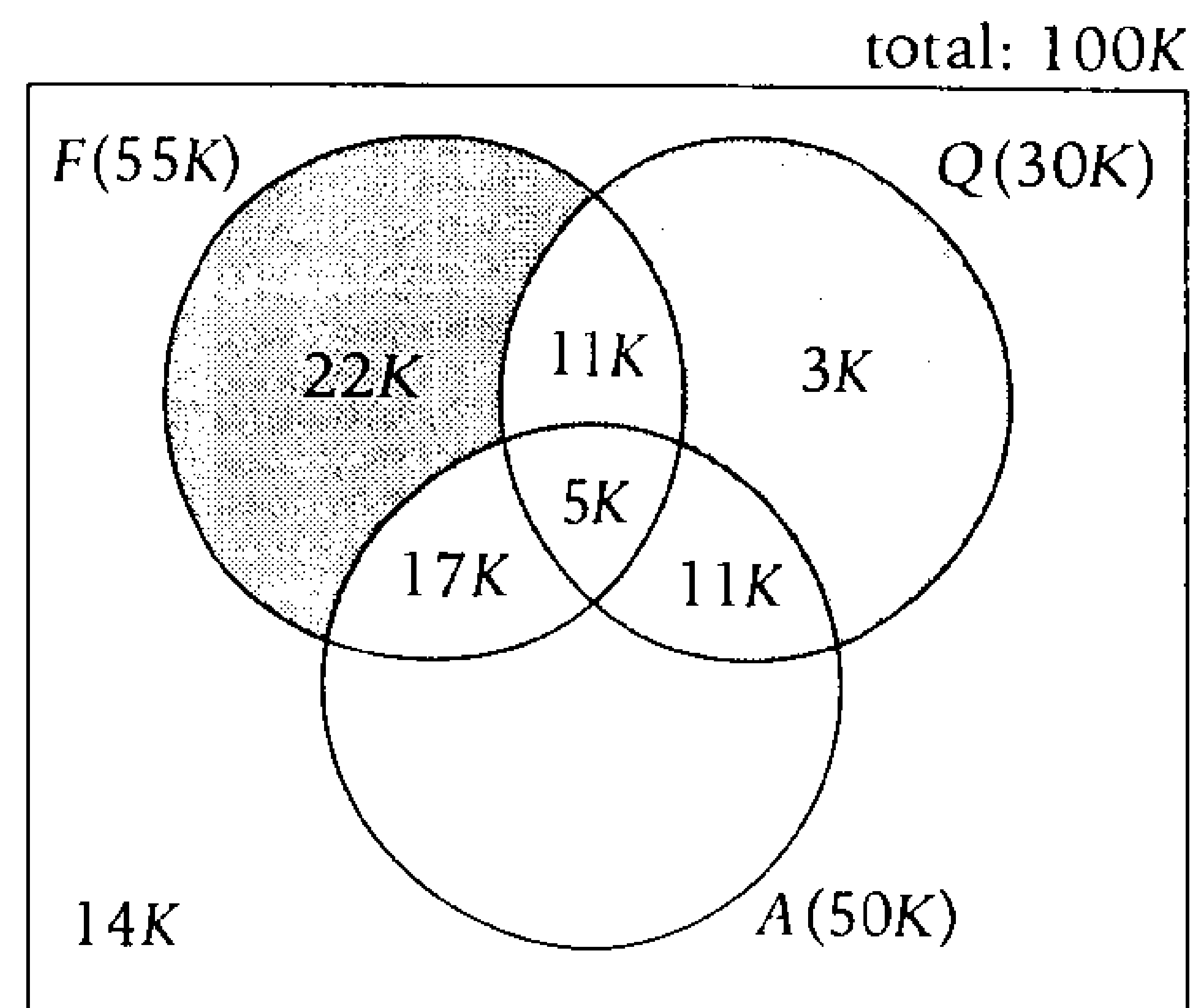
A) 130 B) 132 C) 134
D) 136 E) 144

Resolución

Si el total de alumnos es $100K$, entonces:

- Los que aprobaron solo Física son $40\%(55K)=22K$
- Los que aprobaron solo Física y Química son $20\%(55K)=11K$

Luego



$\square+14K+22K+11K+n(A)=100K$

$\square=3K$

Luego, la cantidad de alumnos que aprobaron Química y Aritmética es

$16K=48;\quad K=3$

Piden la cantidad de alumnos que aprobaron al menos dos cursos

$\square=44K=132$

Por lo tanto, 132 alumnos aprobaron al menos dos cursos.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 41

En lo que el dinero de A excede al de B equivale al 20% del dinero de C, y el exceso de B a C equivale al 10% del dinero de A. Si A tiene S/.200, ¿cuánto tiene B?

A) S/.140 B) S/.150 C) S/.170
D) S/.190 E) S/.210

Resolución

De los datos:

- $A-B=20\%C$ (I)
- $B-C=10\%A$ (II)
- $A=200$

En (II)

$B-C=10\%(200)$

$B-20=C$

Reemplazamos A y C en (I)

$A-B=20\%C$

$200-B=20\%(B-20)$

$200-100\%B=20\%B-4$

$204=120\%B$

$\therefore$ $B=170$

Clave C

PROBLEMA N.° 42

Pedro tiene una casa que vale S/.100 000 y se la vende a Beto con una ganancia del 10%. Si Beto revende la casa a Pedro con una pérdida del 10%, ¿cuánto ganó o perdió Pedro?

A) Ganó S/.990.
B) Perdió S/.1000.
C) Ganó S/.11 000.
D) Perdió S/.11 000.
E) Ganó S/.1000.

Resolución

- Para Pedro

P_C=S/.100 000

$P_V=P_C+G$=S/.110 000

↓

$10\%P_C$=S/.10 000

- Para Beto

P_C=S/.110 000

$P_V=P_C-P$=S/.99 000

↓

$10\%P_C$=S/.11 000

Entonces, la ganancia de Pedro es

10 000+(100 000−99 000)=S/.11 000

Por lo tanto, Pedro ganó S/.11 000.

Clave C

PROBLEMA N.° 43

El precio de un artículo es de 15 nuevos soles en una fábrica. Un comerciante adquiere 5 de tales artículos, por lo que le hacen el 20% de descuento y luego los vende obteniendo por ellos 80 nuevos soles. ¿Qué tanto por ciento del precio de venta de cada artículo está ganando?

A) 10%
B) 18%
C) 20%
D) 25%
E) 30%

Resolución

En un artículo, sabemos:

Costo en la fábrica: S/.15

Le descuentan: 20%(S/.15)=S/.3

Entonces, lo compra a S/.15−S/.3=S/.12

Luego

$$P_V=P_C+G \begin{cases} P_C=12 \\ P_V=\dfrac{80}{5}=16 \\ \text{Gana el } x\% \text{ de la venta} \end{cases}$$

Reemplazando

$$16=12+x\%(16)$$

$$4=\frac{x}{100}\times 16 \rightarrow 25=x$$

Por lo tanto, gana el 25% de la venta.

Clave D

PROBLEMA N.° 44

Una persona pregunta en una tienda qué descuento le pueden realizar sobre el precio de un repuesto, y le responden que el 20%. Va a otra tienda y compra el mismo repuesto con un descuento del 25%. Si se ahorró S/.35, ¿cuánto costaba el repuesto?

A) S/.720 B) S/.640 C) S/.700
D) S/.760 E) S/.600

Resolución

Considerando que en ambas tiendas el repuesto se vende al mismo precio (S/.N), la persona tendrá un ahorro de 5%N, luego:

$$5\%N=S/.35 \ ; \quad N=S/.700$$

Por lo tanto, el repuesto costaba S/.700.

Clave C

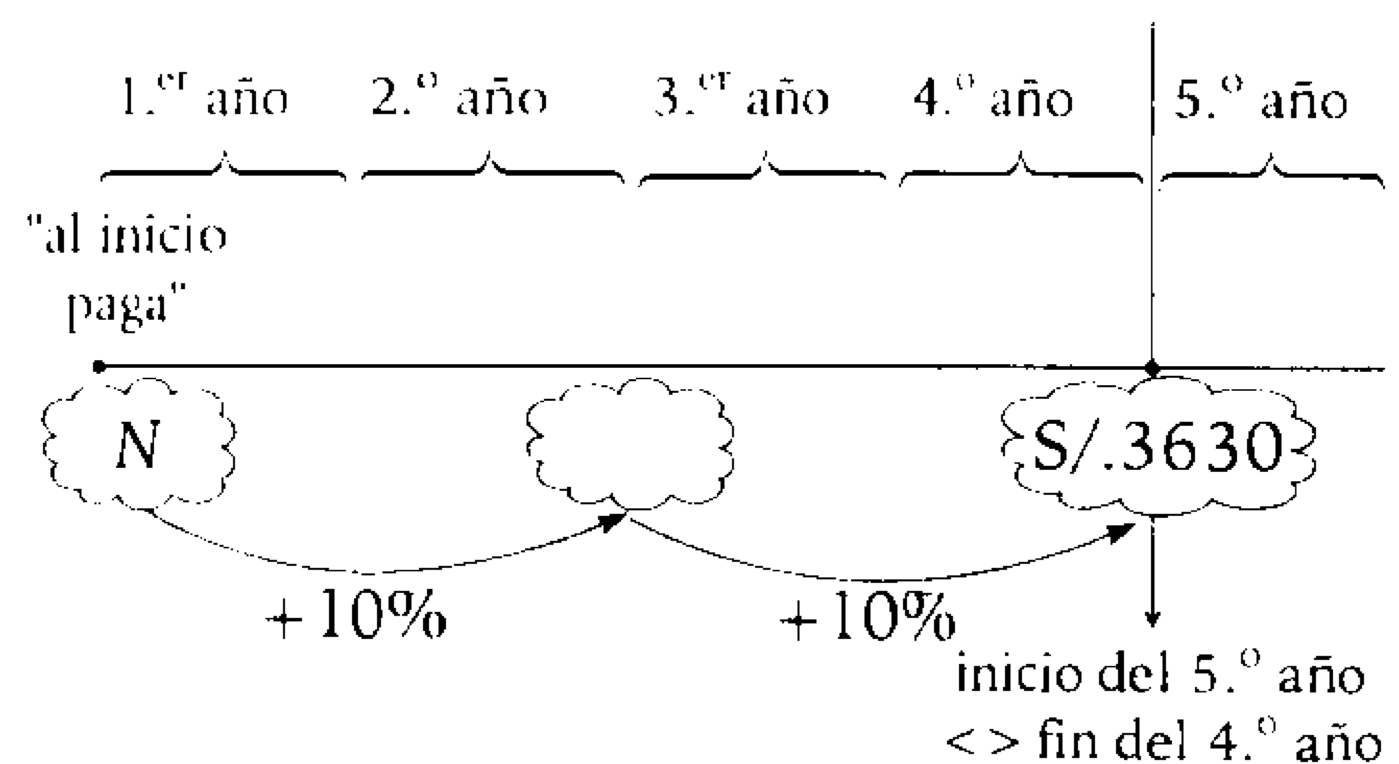
PROBLEMA N.° 45

Cada dos años aumenta el alquiler de una casa en 10%. Si al comienzo del quinto año debe pagarse S/.3630, ¿cuál fue el alquiler inicial?

A) S/.3200
B) S/.3000
C) S/.2800
D) S/.3300
E) S/.3100

Resolución

Del dato:
Cada dos años aumenta el alquiler en 10%.



Luego, de los dos aumentos sucesivos paga

$$N\cdot 110\%\cdot 110\%=3630 \rightarrow N=3000$$

Por lo tanto, el alquiler inicial era S/.3000.

Clave B

PROBLEMA N.° 46

Un comerciante compra mercadería en Lima y aborda una movilidad hacia su negocio ubicado en Chincha. Para su venta, fija su precio en S/.480, pero al venderla aumenta su precio en 10%, con lo cual gana el 60%. ¿Cuánto le cobró la movilidad, si esa cantidad representa el 10% de su ganancia neta?

A) S/.15
B) S/.16
C) S/.17
D) S/.18
E) S/.19

Resolución

$$\overbrace{P_C+G}^{P_V}=\overbrace{P_f+\text{aumento}}^{P_V}\ ;\ P_f=S/.480$$

$$\underset{60\%P_C}{\underbrace{G}}\qquad \underset{10\%P_f}{\underbrace{\text{aumento}}}$$

$160\%P_C=110\%\times P_f=110\%\times 480$

$P_C=S/.330 \rightarrow G=60\%P_C=S/.198$

Además, el gasto en la movilidad representa el 10% de su ganancia neta.

$$\underset{11K}{G}-\underset{K}{\begin{bmatrix}\text{gasto en}\\ \text{movilidad}\end{bmatrix}}=\underset{10K}{G_{neta}}$$

$\rightarrow\ 11K=198$

Por lo tanto, la movilidad cobró

$$K=\frac{198}{11}=S/.18$$

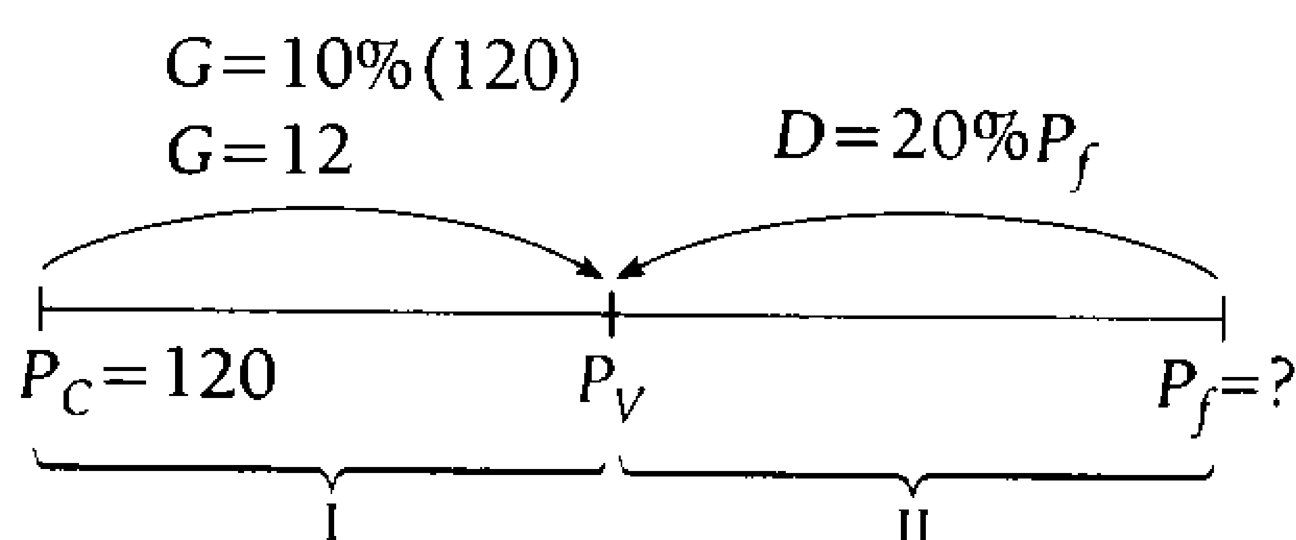
Clave **D**

PROBLEMA N.° 47

El precio de costo de un artículo es S/.120. ¿A cuánto debe fijarse su venta, de modo que al hacerse un descuento del 20% aún se gane el 10% del precio de costo?

A) S/.150 B) S/.155 C) S/.160
D) S/.165 E) S/.170

Resolución



De (I):

$P_V=P_C+G$

$P_V=120+12=132$

De (II)

$P_V=P_f-D$

$132=P_f-20\%P_f$

$132=80\%P_f$

$P_f=S/.165$

Por lo tanto, el precio fijado es S/.165.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 48

Un comerciante vende dos televisores al mismo precio: en uno gana el 25% y en el otro pierde el 25%. ¿Cuánto ganó o perdió?

A) Ganó el 10%
B) Ganó el 6,25%
C) Perdió el 6,25%
D) Ganó el 12%
E) Perdió el 12%

Resolución

Recuerda

Cuando no se indica, la ganancia y la pérdida se toman respecto al P_C.

Ten presente que el P_V es el mismo en ambos casos.

Entonces:

$$\underset{5}{P_V}=\underset{4}{P_{C(1)}}+\underset{1}{G}\ \}\times 3K \qquad \underset{3}{P_V}=\underset{4}{P_{C(2)}}-\underset{1}{P}\ \}\times 5K$$

$$15K\quad 12K\quad 3K \qquad\qquad 15K\quad 20K\quad 5K$$

De donde

$$P_{C(\text{total})}=P_{C(1)}+P_{C(2)}=32K$$

Luego, en la venta total tenemos

$$\text{Pérdida}=5K-3K=2K$$

$$\rightarrow \frac{2K}{32K}\times 100\% = 6,25\%$$

Por lo tanto, perdió el 6,25% del costo total.

Clave C

PROBLEMA N.° 49

Un libro se vende recargándose el r por ciento del precio de costo, pero al venderlo a un estudiante le rebajan el p por ciento. Si el vendedor no ganó ni perdió, calcule p.

A) $100/(100+r)$
B) $100r/(100+r)$
C) $(r+100)/100r$
D) $(100+r)/r$
E) $(0,01+1)/r$

Resolución

Efectuamos

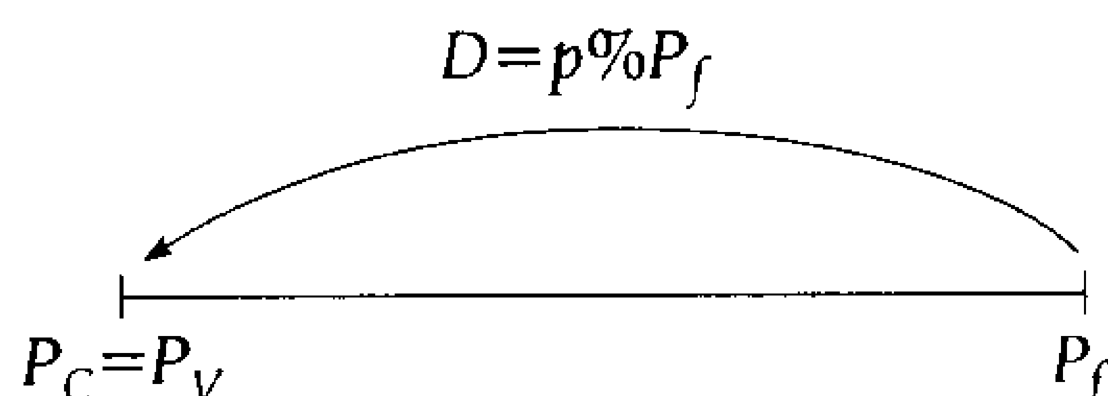
$$P_f=P_C+(\text{recarga})$$

$$P_f=P_C+r\%P_C$$

$$P_f=(100+r)\%P_C$$

Luego de rebajar el $p\%$ no gana ni pierde, entonces, la ganancia es cero.

$$P_V=P_C+\underbrace{G}_{0}$$



Se observa

$$P_C=P_f-D$$

$$P_C=P_f-p\%P_f$$

$$P_C=(100-p)\%\times P_f$$

$$\downarrow$$

$$P_C=(100-p)\%\times(100+r)\%P_C$$

Por lo tanto, despejando p tenemos

$100r/(100+r)$

Clave B

PROBLEMA N.° 50

Una persona compra cierto producto con un aumento del 10% y luego lo vende a otra persona con un descuento del 10%.
¿Qué tanto por ciento gana o pierde la primera persona, respecto al precio inicial del producto?

A) Pierde 10%
B) Gana 10%
C) No pierde ni gana
D) Gana 11%
E) Pierde 11%

Resolución

Sea $100K$ el precio inicial del producto, entonces, la primera persona:

- Lo compra a $110K$
- Luego lo vende al $90\%(110K)=99K$

De lo que se deduce que pierde $11K$.

Piden $\frac{11K}{100K} <> 11\%$

Por lo tanto, la primera persona pierde el 11% del precio inicial del producto.

Clave E

Capítulo

15

Introducción a la Matemática financiera

Cuando se dispone de una cantidad de dinero (capital), uno puede destinar, o bien a gastarlo (satisfaciendo alguna necesidad), o bien a invertirlo para recuperarlo en un futuro más o menos próximo.

Otro aspecto importante es el interés, que se puede definir como la retribución por el aplazamiento en el tiempo del consumo, esto es, el precio, beneficio, utilidad, renta o ganancia por el alquiler o uso del dinero durante un tiempo, y nosotros podemos notarlo cuando depositamos nuestro dinero en el banco.

El banco acumula una gran cantidad de dinero por los depósitos de sus ahorristas, que le permiten disponerlo y trabajarlo, haciendo inversiones que le producirán ganancias; y ellos, luego de un tiempo, nos devuelven el capital depositado más un adicional (interés). También notamos que al comprar haciendo uso de las tarjetas de crédito, en cada cuota que se paga están presentes los intereses por el servicio que nos brindan, ya que así siempre se paga más que si se pagara al contado. En este capítulo se dan los elementos básicos que nos permiten realizar los cálculos de algunos tipos de interés: simple, compuesto y continuo.

Capítulo 15

Introducción a la Matemática financiera

REGLA DE INTERÉS

PROBLEMA N.° 1

Se prestó un capital al 53%, pero si se hubiera impuesto dos años más, al mismo tanto por ciento, el interés hubiera sido el 125% del anterior. ¿Cuál fue el tiempo de imposición inicial?

A) 6 años B) 7 años C) 8 años
D) 9 años E) 10 años

Resolución

$$\underbrace{\begin{matrix} C \\ 53\% \\ t \text{ años} \end{matrix}}_{I_1} \qquad \underbrace{\begin{matrix} C \\ 53\% \\ (t+2) \text{ años} \end{matrix}}_{I_2}$$

Por dato: $\dfrac{I_1}{100\%} = \dfrac{I_2}{125\%}$

$$\frac{C \times 53\%\ t}{100\%} = \frac{C \times 53\%\ (t+2)}{125}$$

$$t=8$$

Observemos otra manera

Interés	DP	Tiempo (C=cte.; $r\%$=cte.)
100%		t años
125%		$(t+2)$ años

$$\frac{t}{100\%} = \frac{t+2}{125\%}$$

$\therefore\ t=8$ años

Clave C

PROBLEMA N.° 2

Teresa compró un televisor en S/.1270, dando S/.278 como cuota inicial. Si el resto lo paga en nueve meses con un recargo de S/.186, ¿qué tasa de interés pagó?

A) 18,75% B) 32,5% C) 30%
D) 20% E) 25%

Resolución

La deuda fue

$1270-278=$S/.992

$t=9$ meses

$r\%=$mensual

Observación

Recargo < > interés (I)

$$I=9\times(r\%\times 992)=186$$

$$r\% = \frac{186}{9\times 992}\times 100\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés anual que se pagó fue

$$12\times\left(\frac{186}{9\times 992}\times 100\%\right) = 25\%$$

Clave E

PROBLEMA N.° 3

Si a un capital se le suman los intereses producidos en 26 meses, se obtiene un número que es al capital prestado como 63 es a 50. ¿A qué tasa fue colocado?

A) 10% B) 11% C) 12%
D) 13% E) 14%

Resolución

Sea el interés de 1 mes: I

Sea el interés de 26 meses: $26I$

Sea la tasa anual $r\%$ <> $\frac{r\%}{12}$ mensual

Por dato:

$$\frac{C+26I}{C}=\frac{63}{50}$$

Obtenemos

$$C=100\times I$$

$$C=100\times\left(C\times\frac{r\%}{12}\times 1\right)$$

$$r=12$$

Por lo tanto, la tasa fue del 12%.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

Juan coloca el 60% de su capital en un banco con una tasa del 24% anual. Si al cabo de 15 meses retira un monto de S/.780, halle el capital de Juan.

A) S/.1000 B) S/.1200
C) S/.1300
D) S/.1400 E) S/.1500

Resolución

Sean:

Capital total: N

$r\%=24\%$ anual <> 2% mensual.

$t=15$ meses

$$\underset{(60\%N)}{C} + \underset{15\times 2\%(60\%N)}{I} = M = S/.780$$

$$130\%\times 60\%N=S/.780$$

$$N=S/.1000$$

Por lo tanto, el capital de Juan es S/.1000

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

Enrique posee cuatro capitales de S/.1250; S/.2500; S/.3000 y S/.6000 impuestos, respectivamente, al $6a\%$; $3a\%$; $9a\%$ y $3a\%$. Si al cabo de 2 meses se ha obtenido una ganancia de S/.2000, calcule a.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 20 E) 6

Resolución

Según los datos:

	1.°		2.°		3.°		4.°	
C:	1250		2500		3000		6000	
r%:	6a%		3a%		9a%		3a%	
t:	$\frac{1}{6}$ año		$\frac{1}{6}$ año		$\frac{1}{6}$ año		$\frac{1}{6}$ año	
	↓		↓		↓		↓	
I:	I_1		I_2		I_3		I_4	
Total	I_1	+	I_2	+	I_3	+	I_4	=2000

$$1250\times 6a\%\times \frac{1}{6}+2500\times 3a\%\times \frac{1}{6}+3000\times 9a\%\times \frac{1}{6}+6000\times 3a\%\times \frac{1}{6}=2000$$

Efectuando: $a=20$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Un capital de S/.1000 se deposita al 10% durante 3 años. ¿Cuál es la diferencia de montos al usar interés simple y compuesto con capitalización anual?

A) S/.28 B) S/.29 C) S/.30 D) S/.31 E) S/.32

Resolución

- Cálculo del monto a interés simple

  C=S/.1000

  $r\%=10\%$ anual;

  $t=3$ años

  $M_1=C+I=130\%C$, donde $I=3\times 10\%C$

- Cálculo del monto a interés compuesto: Como el periodo de capitalización es anual, en 3 años hay 3 periodos

  $M_2=C(1+10\%)^3=133{,}1\%C$

  Luego

  $M_2-M_1=3{,}1\%C=3{,}1\%(1000)$

  $\therefore\ M_2-M_1=$S/.31

Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

Al depositar un capital durante un año, se obtiene un monto de S/.5200. Pero si se impone durante un año y medio, se consigue un monto de S/.6800. Calcule el capital si la tasa de interés es la misma en ambos casos.

A) S/.2000
B) S/.3200
C) S/.3500
D) S/.3600
E) S/.3800

Resolución

Por dato:

$M_{1\text{ año}} = C + I_{1\text{ año}} = S/.5200$ (I)

$M_{1\frac{1}{2}\text{ año}} = C + I_{1\frac{1}{2}\text{ año}} = S/.6800$ (II)

En (II−I)

$I_{1\frac{1}{2}\text{ año}} - I_{1\text{ año}} = S/.1600$ (I DP t)

cada ½ año gana 1600 $\left(\begin{array}{l} I_{1/2\text{ año}} = S/.1600 \\ I_{1\text{ año}} = S/.3200 \end{array} \right) \times 2$

En (I)

$C + 3200 = S/.5200$

$C = S/.2000$

Clave A

PROBLEMA N.° 8

Determine qué tiempo debería estar impuesto S/.1250 al 10%, si se quiere adquirir una computadora que cuesta S/.1500, pero que en dicho tiempo se devalúa en 10%.

A) 280 días
B) 288 días
C) 320 días
D) 240 días
E) 292 días

Resolución

La computadora se comprará con el monto que se obtendrá dentro de t años.

$r\% = 10\%$anual

Monto = Precio devaluado de la computadora

$1250 + t \times 10\% \times 1250 = 90\% \times 1500$

$t = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}$ año

Por lo tanto,

$\frac{4}{5}$ año$\times \frac{360 \text{ días}}{1 \text{ año}} = 288$ días

Clave B

PROBLEMA N.° 9

Si en 16 meses el interés producido por un capital es el 20% del monto, ¿qué tanto por ciento del capital se genera en 28 meses?

A) 31,28%
B) 25,5%
C) 30%
D) 43,75%
E) 37,5%

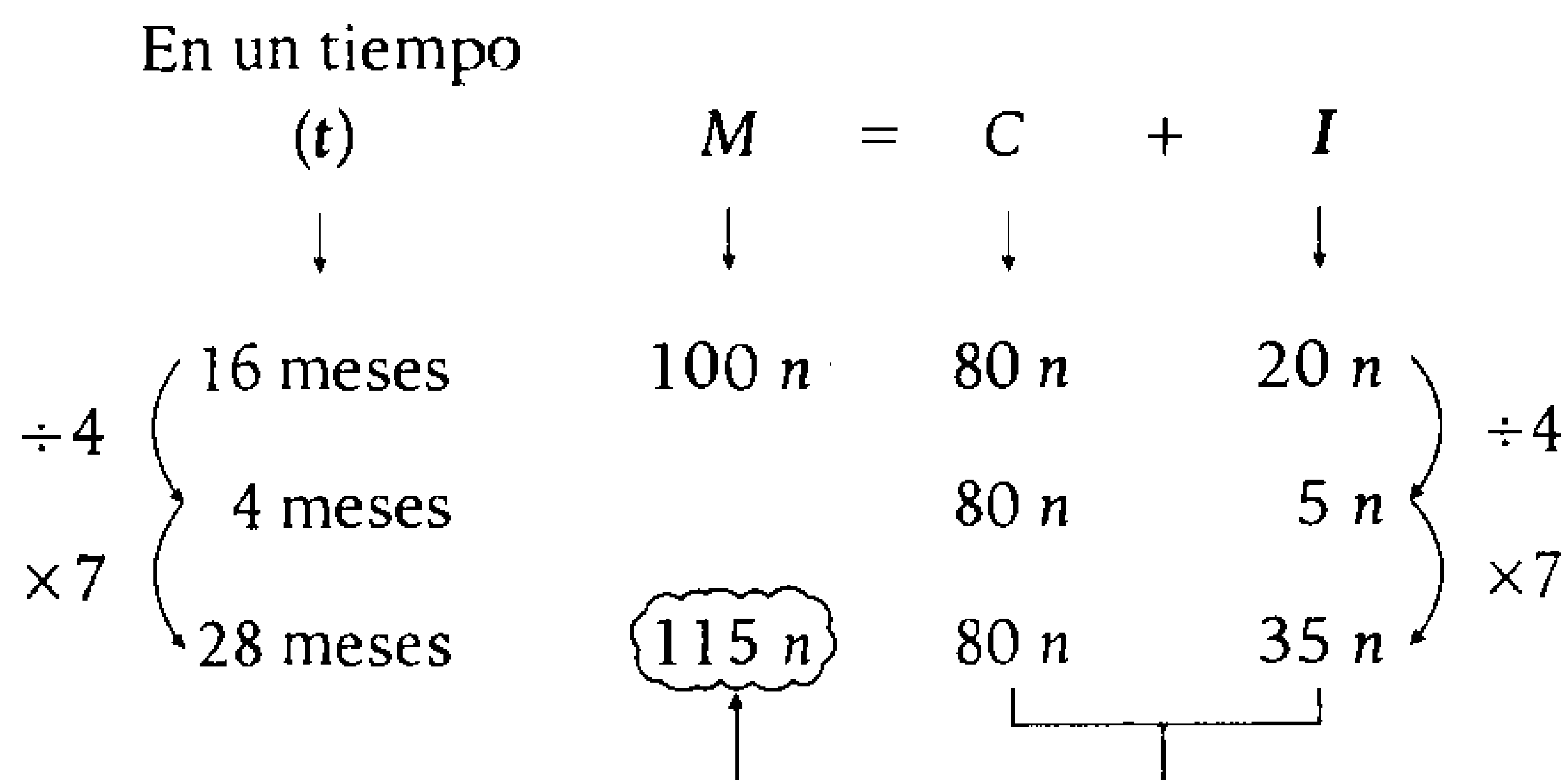
Resolución

Para facilitar la comparación, consideramos:

$M_{16\text{ meses}} = 100\,n$

I DP t (por ser interés simple)

El capital es constante siempre.



En 28 meses:

$$\left.\begin{array}{l} C=80\,n \text{ ——— } 100\% \\ I=35\,n \text{ ——— } x\% \end{array}\right\} \frac{x\,\%}{35\,n}=\frac{100\,\%}{80\,n} \rightarrow x=\frac{35\times 100}{80} \rightarrow x=43{,}75$$

$\therefore\ x\%=43{,}75\%$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Si los 5/8 de un capital se imponen al 30% y el resto al 20%, se producirá anualmente S/.1800 más que si los 5/8 del capital se imponen al 20% y el resto al 30%. ¿Cuál es dicho capital?

A) S/.72 500 B) S/.72 000 C) S/.70 000
D) S/.85 000 E) S/.77 000

Resolución

Calculamos el interés anual

- $C=8a$ → $5a$ y $3a$

  30% 20% anual

  $I_1=30\%(5a)+20\%(3a)=210\%a$

- $C=8a$ → $5a$ y $3a$

  20% 30% anual

  $I_2=20\%(5a)+30\%(3a)=190\%a$

Además

$I_1-I_2=$S/.1800

$20\%a=$S/.1800

$a=$S/.9000

Por lo tanto, el capital es

$8a=$S/.72 000

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Se tiene un capital que es prestado al 5% trimestral y que se capitaliza semestralmente. Si, además, dicho capital genera durante dos años S/.2541 más que si se prestara solo por un año, halle dicho capital.

A) S/.12 000 B) S/.10 000
C) S/.5000
D) S/.8000 E) S/.9000

Resolución

- Capitaliza semestralmente (es interés compuesto)
- 5% trimestral <> 10% semestral
- 1 periodo <> 6 meses
- $C=?$
- $M=C+I$

$\rightarrow \boxed{I=M-C} \wedge \boxed{M=C(1+r\%)^t}$

Por dato:

$I_{2\text{ años}}-I_{1\text{ año}}=2541$

$\underbrace{I_{4\text{ periodos}}}-\underbrace{I_{2\text{ periodos}}}=S/.2541$

$(M_{4\text{ periodos}}-\not{C})-(M_{2\text{ periodos}}-\not{C})=2541$

$M_{4\text{ periodos}}-M_{2\text{ periodos}}=2541$

$C(1+10\%)^4-C(1+10\%)^2=2541$

$C(1{,}21)^2-C\times(1{,}21)=2541$

$C(1{,}21)(0{,}21)=2541$

$C=S/.10\,000$

Por lo tanto, el capital es S/.10 000.

Clave B

PROBLEMA N.° 12

La suma de tres capitales es S/.42 100. Colocados a interés simple durante cuatro años a una tasa de interés común se convierten, respectivamente, en S/.22 200; S/.10 800 y S/.17 520. Halle el primer capital.

A) S/.15 600 B) S/.16 800
C) S/.18 500
D) S/.21 000 E) S/.23 000

Resolución

Sean los capitales C_1; C_2 y C_3, colocados al $r\%$ anual durante cuatro años, tenemos:

- $C_1+C_2+C_3=S/.42\,100$
- $\left.\begin{array}{l} C_1+4\times r\%C_1=S/.22\,200 \\ C_2+4\times r\%C_2=S/.10\,800 \\ C_3+4\times r\%C_3=S/.17\,520 \end{array}\right\}(+)$

$42\,100+4r\%\times 42\,100=50\,520$

$4r\%=0{,}2$

Luego

$C_1+4r\%C_1=S/.22\,200$

$1{,}2\times C_1=S/.22\,200$

$C_1=S/.18\,500$

Por lo tanto, el primer capital es S/.18 500

Clave C

PROBLEMA N.° 13

Un capital genera en un año un monto de S/.7200. Si en medio año más el monto será S/.8400, entonces, ¿cuál es la tasa?

A) 25% B) 40% C) 50%
D) 55% E) 60%

Resolución

Por ser interés simple: I DP t

$M_{1\text{ año}}=C+I_{1\text{ año}}=7200$ (I)

$M_{1\frac{1}{2}\text{ año}}=C+I_{1\frac{1}{2}\text{ año}}=8400$ (II)

En (II) - (I)

$$\times 2\left(\begin{array}{l} I_{\frac{1}{2}\text{ año}}=1200 \\ I_{1\text{ año}}=2400 \end{array}\right)\times 2$$

En (I)

$C+2400=7200$

$C=4800$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} C=4800 \\ r\%=? \\ t=1\text{ año} \\ I=2400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I \;=\; C \;\cdot\; r\% \;\cdot\; t \\ 2400=4800\times\dfrac{r}{100}\times 1 \end{array}$$

$\rightarrow\; r=50$

Por lo tanto, la tasa es 50% anual.

Clave C

PROBLEMA N.° 14

Juan quiere comprar un televisor de S/.200. Pero como solo tiene S/.150, decide colocar ese monto en un banco al 4% mensual. Si el costo del televisor aumenta 1% mensual, determine después de qué tiempo, en meses, puede retirar su dinero para comprar el televisor.

A) 10,5 B) 11,5 C) 12,5
D) 13,5 E) 14,5

Resolución

Dentro de t meses se cumplirá

monto=nuevo precio del televisor

$150+t\times 4\%\times 150=200+t\times 1\%\times 200$

$400\%t=50$

$t=12,5$

Por lo tanto, puede retirar su dinero después de 12,5 meses.

Clave C

PROBLEMA N.° 15

Si S/.400 producen un monto de S/.464 durante 8 meses con una tasa mensual, ¿cuánto de interés producirá ese monto impuesto a una tasa mensual doble que la anterior durante 25 meses?

A) S/.400 B) S/.454
C) S/.464
D) S/.540 E) S/.580

Resolución

De los datos:

$$\left.\begin{array}{l} C=400 \\ M=464 \end{array}\right\} I=464-400=64$$

$t=8$ meses

$r\%=$mensual

$$I \;=\; C \;\cdot\; r\% \;\cdot\; t$$

$$64=400\times\frac{r}{100}\times 8$$

$r=2$

$r\%=2\%$ mensual

Ahora el capital es

$$\left.\begin{array}{l} C=464 \\ 2r\%=4\% \text{ mensual} \\ t=25 \text{ meses} \end{array}\right\} \begin{array}{l} I=C\cdot r\%\cdot t \\ I=464\times 4\%\times 25 \\ I=464 \end{array}$$

Por lo tanto, el interés es S/.464

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

Si el 62,5% de un capital se impone al 30% anual y el resto al 20% anual, produciría anualmente S/.180 más de interés que si el 62,5% de dicho capital se prestara al 20% y el resto al 30%. ¿Cuál es dicho capital?

A) S/.6400 B) S/.7000
C) S/.6500
D) S/.7500 E) S/.7200

Resolución

Calculamos el interés anual

- C se divide en 62,5%C (30%) y 37,5%C (20% anual)

$I_1=30\%(62,5\%C)+20\%(37,5\%C)=26,25\%C$

- C se divide en 62,5%C (20%) y 37,5%C (30% anual)

$I_2=20\%(62,5\%C)+30\%(37,5\%C)=23,75\%C$

Además

$I_1-I_2=S/.180$

$2,5\%C=S/.180$

$C=S/.7200$

Por lo tanto, dicho capital es S/.7200.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 17

Cierto capital se deposita al 20% bianual capitalizable anualmente durante tres años. Del monto obtenido, se deposita solo el 60% en un banco al 50% semestral durante tres meses, para obtener como nuevo monto S/.199 650. Halle el interés generado en el segundo periodo en la imposición inicial.

A) S/.20 000 B) S/.22 000
C) S/.24 000
D) S/.30 000 E) S/.32 000

Resolución

Es interés compuesto

- Capitaliza anualmente, entonces, al finalizar cada año el interés se suma al capital.
- $t=3$ años <> 3 periodos.
- 20% bianual <> 10% anual (cada año gana el $10\%=1/10$).

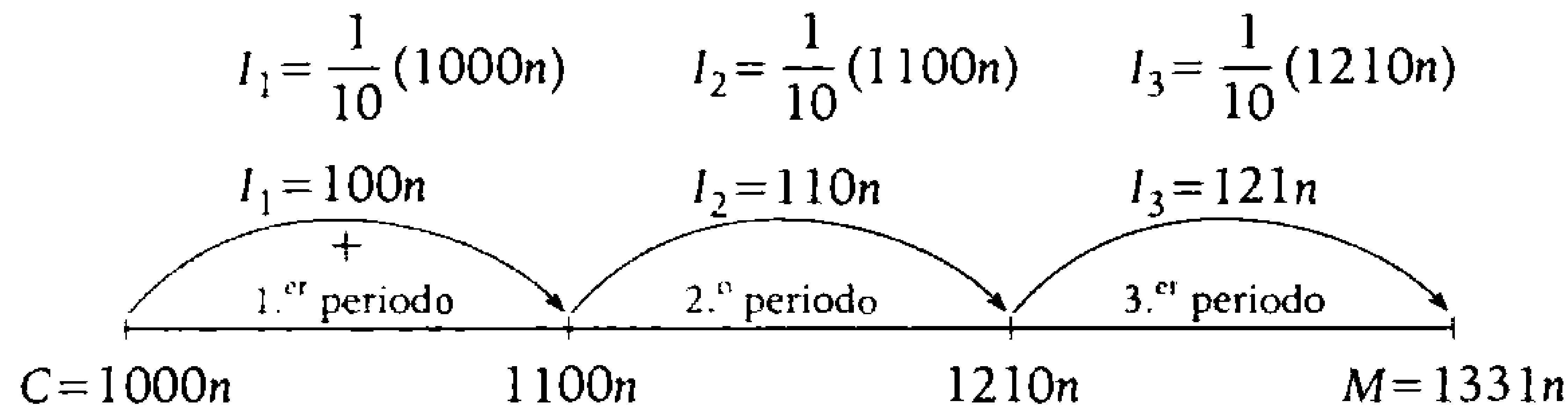
Para facilitar el cálculo, consideramos un capital que tenga 10% tres veces.

Sea:

$C=10\times 10\times 10\times n$

$C=1000\,n$

Nos piden $I_{2.^{\circ}\ periodo}=110\,n$ (I)



Se deposita

$C_2=60\%(1331\ n)$

50% semestral

3 meses < > $\frac{1}{2}$ semestre

Reemplazamos

$$M \quad = \quad C_2 \quad + \quad I$$

$$199\ 650= \quad C_2 \quad +\left(C_2\times 50\%\ \frac{1}{2}\right)$$

Efectuando, tenemos

$199\ 650=125\%\times C_2$

$199\ 650=125\%\times(60\%\ 1331n)$

$n=200$

En (I)

$I_{2.^{\circ}\ periodo}=110n \ \rightarrow\ I_{2.^{\circ}\ periodo}=110\times(200)$

Por lo tanto, el interés generado en el segundo periodo en la imposición inicial es de S/.22 000

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Tres capitales impuestos separadamente al 12,5% semestral; al 4% bimestral y al 5% trimestral, respectivamente, generan la misma renta. Calcule el mayor capital si se sabe que el menor de los montos producidos en un año es S/.30 000.

A) S/.20 000 B) S/.24 000 C) S/.26 625 D) S/.28 500 E) S/.30 000

Resolución

Sean los capitales C_1; C_2 y C_3.
Por condición del problema, los intereses son iguales al cabo de un mismo tiempo, entonces asumimos un año.

$$\text{Un año} <> \begin{cases} 2 \text{ semestres} \\ 6 \text{ bimestres} \\ 4 \text{ trimestres} \end{cases}$$

$I_1=I_2=I_3$

$2\times(12{,}5\%C_1)=6\times(4\%C_2)=4\times(5\%C_3)$

$$\underset{24K}{25\%C_1}=\underset{25K}{24\%C_2}=\underset{30K}{20\%C_3}$$

Luego, como producen el mismo interés, el menor monto se obtendrá con el menor capital:

$M_1=24K+25\%(24K)=S/.30\ 000$

$30K=S/.30\ 000$

Por lo tanto, el mayor capital es S/.30 000

Nota

Decir que los capitales generan la misma renta equivale a decir que producen el mismo interés.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Un capital fue impuesto al 5% trimestral con capitalización anual. Calcule dicho capital, si el interés producido en el tercer periodo excede en S/.88 al interés producido en el primer periodo.

A) S/.800 B) S/.900 C) S/.1000 D) S/.1100 E) S/.1200

Resolución

Interés compuesto con capitalización anual (periodos de 1 año)

- Tasa: 5% trimestral <> 20% anual (cada año gana el 20% <> 1/5).
- Pasan 3 periodos <> 3 años.

Entonces, consideramos un capital que tenga quinta parte tres veces.

Sea: $C=5\times5\times5n \rightarrow C=125n$

Dato:

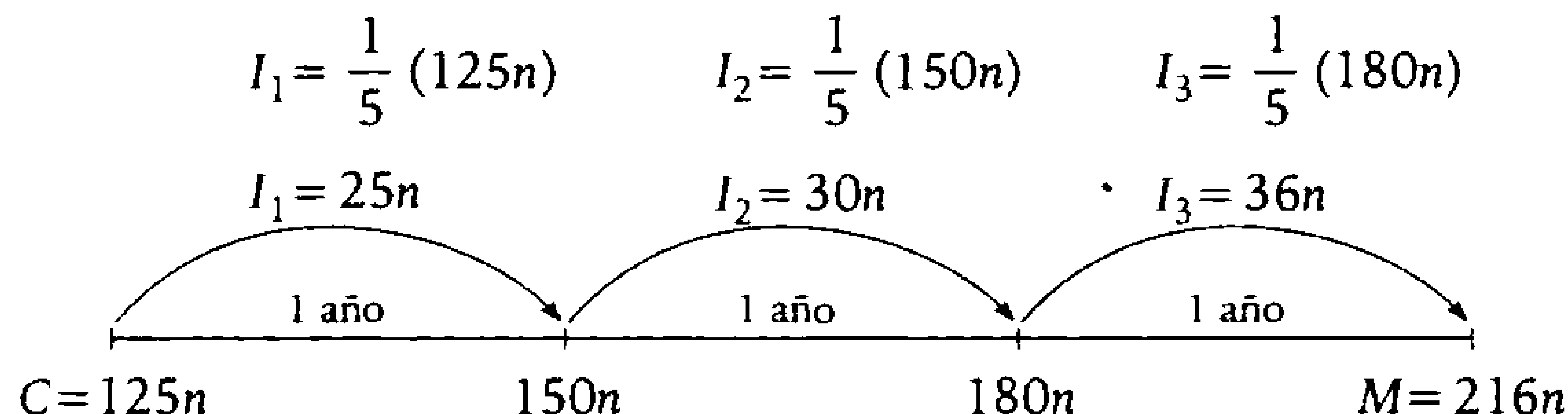
$I_3-I_1=88$

$36n-25n=88$

$n=8$

$\rightarrow C=125\times8$

$C=1000$



Por lo tanto, el capital es S/.1000

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Un capital impuesto durante 10 meses se convierte en S/.1430; pero si estuviese siete meses más, se convertiría en S/.1507. Halle dicho capital.

A) S/.1280 B) S/.1320 C) S/.1340 D) S/.1380 E) S/.1390

Resolución

Sea I, el interés mensual.

Luego

en 10 meses: $C+10I=S/.1430$

en 17 meses: $C+17I=S/.1507$ (–)

$7I=S/.77$

$I=S/.11$

Reemplazamos

$C+10(11)=1430$

$C=S/.1320$

Por lo tanto, dicho capital es S/.1320

Clave **B**

PROBLEMA N.° 21

Rosario quiere comprar una computadora, pero no dispone del total para comprarla; entonces, por ello deposita lo que tiene en una entidad financiera que paga el 6% trimestral. Luego de ocho meses, todavía le faltan S/.72 para comprarla. Pero si deja su dinero siete meses más, podría comprarla y le sobrarían S/.110, debido a que el precio nunca varió. ¿Cuánto cuesta dicha computadora?

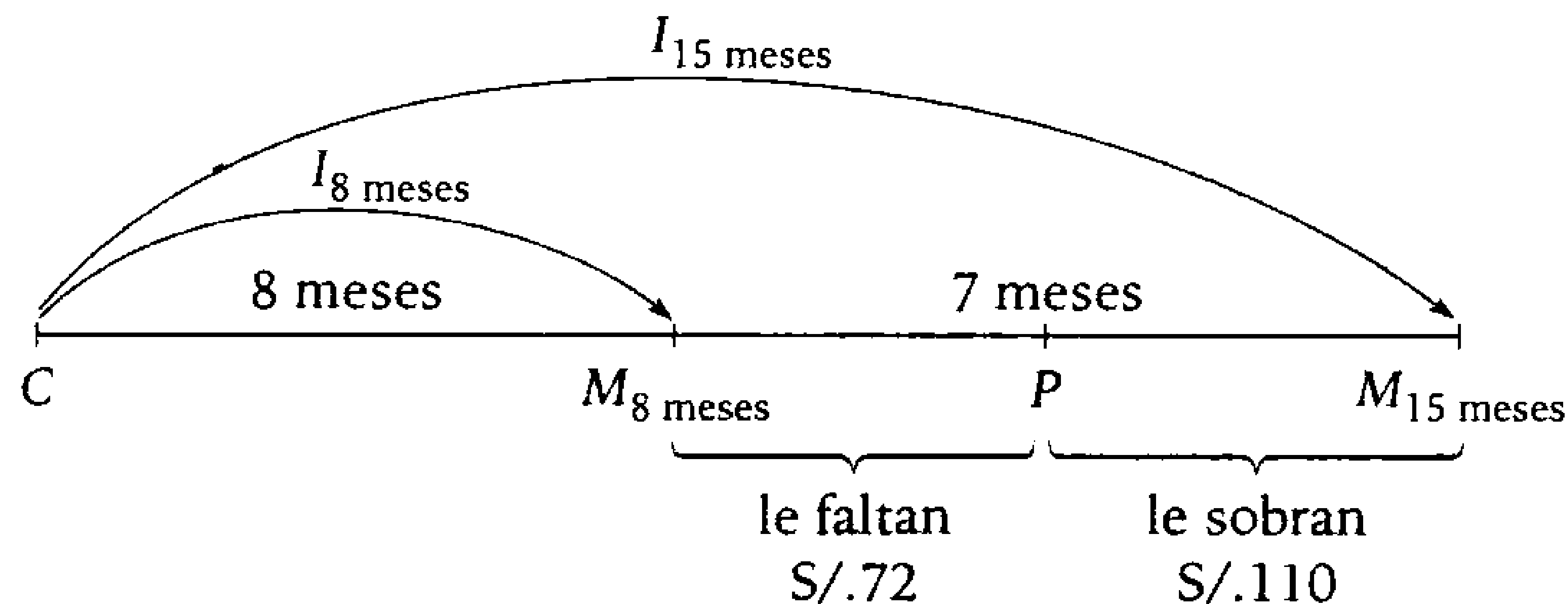
A) S/.1380 B) S/.1620 C) S/.1580
D) S/.1760 E) S/.1460

Resolución

Si tiene un capital: C

- 6% trimestral <> 2% mensual.
- Precio de la computadora: P

Por dato:



Se observa

$$I_{15 \text{ meses}}=I_{8 \text{ meses}}+72+110$$

$$I_{15 \text{ meses}}=I_{8 \text{ meses}}+182$$

$$I_{7 \text{ meses}}=182$$

$$\rightarrow \quad I_{1 \text{ mes}}=\frac{182}{7}=26$$

Por cada mes gana S/.26

Cálculo del capital

$$\boxed{I=C\cdot r\%\cdot t}$$

Despejando el capital

$$26=C\times 2\%\times 1$$

$$\rightarrow \quad C=1300$$

El precio de la computadora es

$$P=\underbrace{M_{15 \text{ meses}}}-110$$

$$P=C+I_{15 \text{ meses}}-110$$

$$P=1300+15(26)-110$$

$$P=1580$$

Por lo tanto, la computadora cuesta S/.1580

Clave C

PROBLEMA N.° 22

Al imponer un capital al $n\%$ trimestral, se reciben S/.1600 menos que si se impusiera al $n\%$ mensual durante un año. ¿Qué interés se recibiría si se impone el mismo capital durante 1 año y medio al $n\%$ semestral?

A) S/.600 B) S/.900 C) S/.500
D) S/.300 E) S/.700

Resolución

Sabemos que

$$\text{Un año} <> \begin{cases} 12 \text{ meses} \\ 4 \text{ trimestres} \\ 2 \text{ semestres} \end{cases}$$

Sea C el capital, al cabo de un año tenemos:

- $12\times(n\%C)-4\times(n\%C)=1600$

  $8\times n\%C=S/.1600$

  $n\%C=S/.200$

- Piden el interés producido durante un año y medio, impuesto al $n\%$ semestral

  Un año y medio <> 3 semestres.

$\therefore\ I=3\times(n\%C)=S/.600$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Un capital se impuso en un banco al 50% anual capitalizable semestralmente. Halle este capital si en el segundo periodo de capitalización el interés fue de S/.55.

A) S/.165 B) S/.176
C) S/.180
D) S/.189 E) S/.204

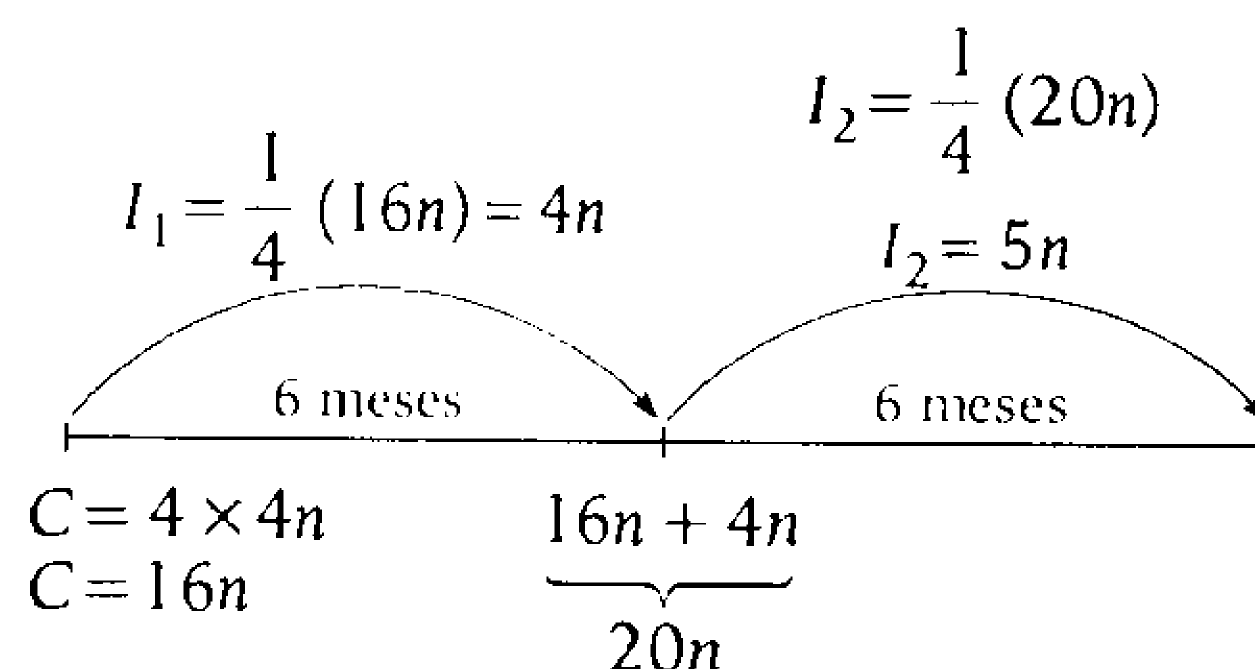
Resolución

Capitaliza semestralmente

$$\underset{\text{anual}}{50\%} <> \underbrace{\underset{\text{semestral}}{25\%}}_{(\text{gana } 25\%=1/4)}$$

Pasan dos periodos <> 2 semestres.
Para facilitar las operaciones, asumimos un capital que tenga cuarta parte entera dos veces:

$C=4\times4\times n \ \rightarrow\ C=16n$



Por dato:

$I_2=55$

$5n=55 \ \rightarrow\ n=11$

Se halla el capital

$C=16\times11$

$\therefore\ C=S/.176$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

Un capital de S/.40 000 estuvo impuesto durante cierto tiempo. Por los años de imposición se cobró el 5%; por los meses, el 4%; y por los días, el 3%. Calcule la utilidad producida si se sabe que impuesto durante el mismo tiempo al 5% produciría S/.3840 más que impuesto al 3%.

A) S/.9600 B) S/.8200 C) S/.8600
D) S/.9620 E) S/.9260

Resolución

Al imponer el capital al 5% en lugar del 3% durante el mismo tiempo, produciría 2% más. Entonces, en t años:

$$t\times(2\%\times 40\,000)=3840$$

$$t=\frac{24}{5}\text{año}=4\text{ años}\frac{4}{5}\text{año}$$

$$\frac{4}{5}\text{año}\times\frac{12\text{ meses}}{1\text{ año}}=\frac{48}{5}\text{meses}=9\text{ meses}\frac{3}{5}\text{mes}$$

$$\frac{3}{5}\text{mes}\times\frac{30\text{ días}}{1\text{ mes}}=18\text{ días}$$

$\rightarrow\quad t=4$ años, 9 meses, 18 días

Luego

$$I_{(4\text{ años})}=4\times(5\%\times 40\,000)=\text{S/.}8000$$

$$I_{(9\text{ meses})}=9\left(\frac{4\%\times 40\,000}{12}\right)=\text{S/.}1200$$

$$I_{(18\text{ días})}=18\left(\frac{3\%\times 40\,000}{360}\right)=\text{S/.}60$$

Por lo tanto, la utilidad total producida es

$8000+1200+60=\text{S/.}9260$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 25

La relación entre el capital y el monto que produce un capital en 15 meses es de 5 a 6. Halle la relación entre dicho capital y el interés generado en 5 años.

A) 3 a 2 B) 4 a 3

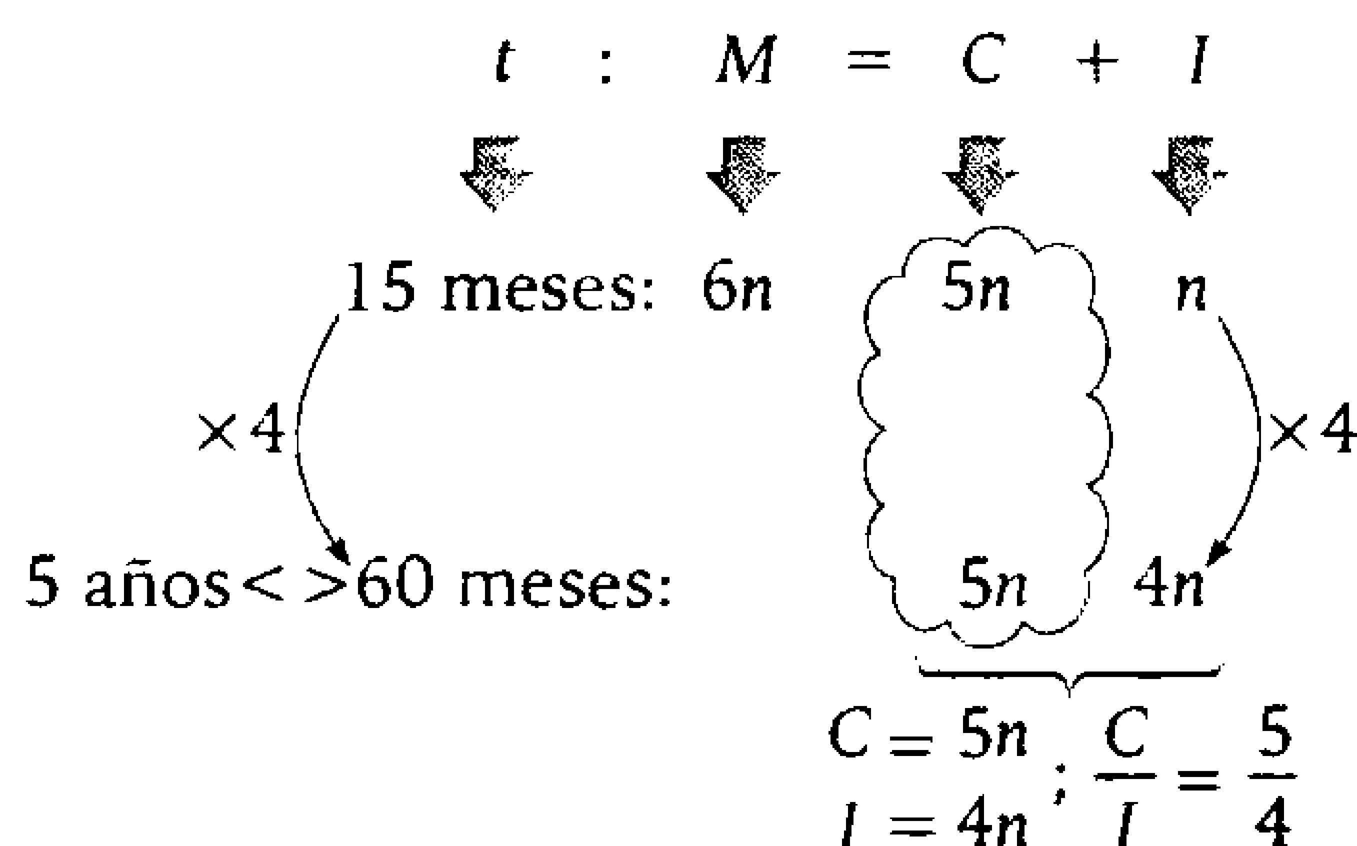
C) 5 a 4

D) 5 a 3 E) 2 a 1

Resolución

Es interés simple, entonces:

- El capital es constante.
- I DP t
- 5 años <> 60 meses.



Por lo tanto, la relación entre el capital y el interés generado en 5 años es de 5 a 4.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

El monto que produce un capital en nueve meses es S/.$\overline{(2a)a00}$, pero si se dejara seis meses más, el monto sería S/.$\overline{(2a)(2a)(2a)0}$. ¿Cuál es la tasa de interés que se está pagando?

A) 15% B) 12,5%

C) 17,5%

D) 25% E) 20%

Resolución

Del enunciado, tenemos:

$$I_{(6\text{ meses})}=M_{(15\text{ meses})}-M_{(9\text{ meses})}$$

$$I_{(6\text{ meses})}=\overline{(2a)(2a)(2a)0}-\overline{(2a)a00}$$

$$=\overline{a(2a)0}=120\times a$$

$$I_{(\text{un mes})}=20\times a$$

$$I_{(9\text{ meses})}=180\times a$$

$$I_{(\text{un año})}=240\times a$$

En nueve meses:

$$C+I_{(9\text{ meses})}=M_{(9\text{ meses})}$$

$$C+180\times a=\overline{(2a)a00}$$

$$\rightarrow\ C=1920\times a$$

Piden la tasa de interés anual ($r\%$).

$$r\%=\frac{I_{(\text{un año})}}{C}\times 100\%$$

$$\therefore\ r\%=\frac{240\times a}{1920\times a}\times 100\%=12{,}5\%$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Un capital es impuesto al 3% anual y un segundo capital al 5%. El interés anual que produce el primero es al interés cuatrianual que produce el segundo como 5 es a 4. Calcule el menor capital, si la suma de dichos capitales es S/.28 000.

A) S/.3000 B) S/.8000
C) S/.10 000
D) S/.7000 E) S/.6500

Resolución

C_1	C_2
3%	5%
1 año	4 años
I_1	I_2

Por dato: $\dfrac{I_1}{5}=\dfrac{I_2}{4}$

$$\frac{C_1\times 3\%\times 1}{5}=\frac{C_2\times 5\%\times 4}{4}$$

$$\rightarrow\ \frac{C_1}{25}=\frac{C_2}{3}=\frac{\overbrace{C_1+C_2}^{28\,000}}{25+3}=1000$$

Por lo tanto, el menor capital es:

$$C_2=3000$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

Un capital es impuesto al 25% capitalizable semestralmente. Si al cabo de 1 año y 40 días genera un interés de S/.10 164, calcule dicho capital.

A) S/.20 486 B) S/.20 725
C) S/.19 765
D) S/.27 234 E) S/.33 792

Resolución

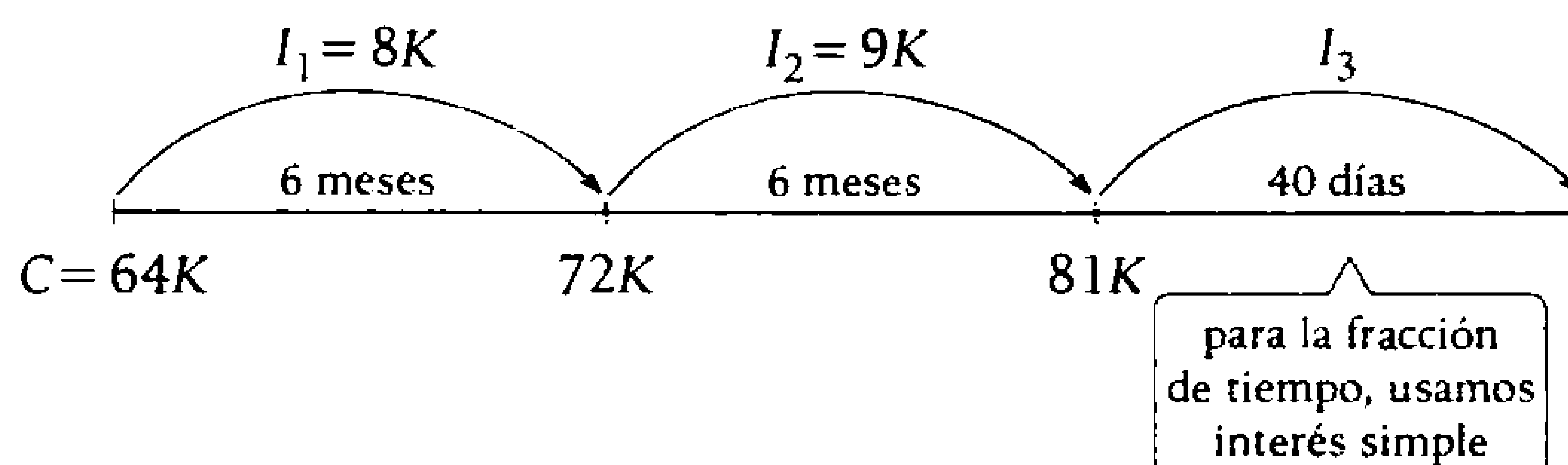
Periodo de capitalización: semestral

Tasa de interés

25% anual <> 12,5% semestral <> $\dfrac{1}{8}$

Tiempo: un año <> 2 periodos (semestres)

Convenientemente asumimos un capital $C=64\ K$.



Calculamos I_3, tomando como capital $81K$

$$I_3=40\times\left(\frac{25\%\times 81\ K}{360}\right)=\frac{9}{4}K$$

$$\rightarrow\ I_{total}=I_1+I_2+I_3=\frac{77}{4}K\quad\rightarrow\quad\frac{77}{4}K=\text{S/.}10\ 164$$

$$K=\text{S/.}528$$

$$\therefore\ C=64\ K=\text{S/.}33\ 792$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 29

Un banco ofrece pagar una tasa $r\%$, entonces, un ahorrista deposita C nuevos soles durante t meses. No obstante, se da cuenta de que los intereses ganados representan un $n\%$ del monto obtenido. Determine r.

A) $\dfrac{1200n}{t(100-n)}$ B) $\dfrac{600n}{t(100-n)}$

C) $\dfrac{600n}{t(100+n)}$

D) $\dfrac{1200n}{t(100+n)}$ E) $\dfrac{1800n}{t(100-n)}$

Resolución

Capital: C

Tasa: $r\%$ anual

Tiempo: t meses <> $\dfrac{t}{12}$ año

Dato:

$$I=n\%\cdot M$$

$$\downarrow$$

$$I=\frac{n}{100}(C+I)$$

$$100I=nC+nI$$

$$\frac{I}{n}=\frac{C}{100-n}\qquad\text{(I)}$$

Reemplazamos

$$I=C\cdot r\%\cdot\frac{t}{12} \qquad \text{(II)}$$

De (II) en (I)

$$\frac{C\cdot\frac{r}{100}\cdot\frac{t}{12}}{n}=\frac{C}{100-n}$$

$$\therefore\quad r=\frac{1200n}{t(100-n)}$$

Clave A

PROBLEMA N.° 30

Se prestó un capital por tres años y el monto fue de S/.51 000; pero si el tiempo hubiese sido de cinco años, se ganaría S/.24 000 más. ¿Cuál es la tasa trimestral?

A) 40% B) 20% C) 15%
D) 10% E) 30%

Resolución

Del enunciado, se tiene:

$I_{(2\text{ años})}=$S/.24 000

$I_{(\text{un año})}=$S/.12 000

$I_{(3\text{ años})}=$S/.36 000

Como

$M_{(3\text{ años})}=$S/.51 000

$C+I_{(3\text{ años})}=M_{(3\text{ años})}$

$\rightarrow\quad C=$S/.15 000

Piden la tasa de interés trimestral

$$r\%=\frac{I_{(\text{un trimestre})}}{C}\times 100\%$$

Además

$$I_{(\text{un trimestre})}=\frac{1}{4}\times I_{(\text{un año})}=3000$$

Luego

$$r\%=\frac{3000}{15\,000}\times 100\%=20\%$$

Por lo tanto, la tasa trimestral es de 20%.

Clave B

PROBLEMA N.° 31

Una persona impone un cierto capital por dos años a una determinada tasa y se da cuenta de que el monto, el capital y el interés forman una proporción aritmética continua. Si el monto es de 3000, halle la tasa.

A) 20% B) 22% C) 25%
D) 23% E) 30%

Resolución

Datos: $C=?$

$t=2$ años

Del enunciado, M, C e I forma una proporción aritmética continua.

$$M-C=C-I$$

Reemplazamos

$$M=C+I$$

$$C+I-C=C-I$$

$$\rightarrow\quad I=\frac{C}{2} \qquad \text{(I)}$$

Reemplazando $I=C\cdot r\%\cdot t$ en (I) tenemos

$$C\cdot r\%\cdot 2=\frac{C}{2}$$

$$\frac{r}{100}\times 2=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad r=25$$

Por lo tanto, la tasa es 25%.

Clave C

PROBLEMA N.° 32

Un banco paga el 40% anual capitalizable trimestralmente y otro banco paga el 38% anual a interés simple. Si se deposita la misma cantidad de dinero en ambos bancos por seis meses, se observa que la diferencia de los intereses generados es S/.2400. Indique cuánto se depositó en cada banco.

A) S/.200 000
B) S/.150 000
C) S/.180 000
D) S/.120 000
E) S/.240 000

Resolución

- Calculamos el interés compuesto:
  Periodo de capitalización: **trimestral**
  $r\%=40\%$ anual <> 10% trimestral
  $t=6$ meses <> 2 periodos(trimestres)
  $M=110\%110\%C=121\%C$
  $M=C+I_{compuesto}$
  $\rightarrow\ I_{compuesto}=21\%C$
- Calculamos el interés simple:
  $r\%=38\%$ anual
  $I_{simple}=\frac{1}{2}(38\%C)=19\%C$

Se sabe que:

$I_{compuesto}-I_{simple}=S/.2400$

$2\%C=S/.2400$

$C=S/.120\ 000$

Por lo tanto, en cada banco se depositó S/.120 000.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 33

El interés ganado por un capital en *a* meses representa el 10% del monto producido, y el interés ganado por dicho capital en *b* meses representa el 25% de su monto generado. Halle *a/b*.

A) 1/3 B) 2/5 C) 1/4
D) 3/7 E) 1/5

Resolución

En *a* meses:

$I_{a\ meses}=10\%\cdot M_{a\ meses}$

$$\rightarrow\ \left.\frac{I_{a\ meses}}{C+I_{a\ meses}}=\frac{1K}{10K}\right\}\ C=9K$$

En *b* meses:

$I_{b\ meses}=25\%\cdot M_{b\ meses}$

$$\rightarrow\ \left.\frac{I_{b\ meses}}{C+I_{b\ meses}}=\frac{1n}{4n}\right\}\ C=3n$$

Igualando el capital

$9K=3n\ \rightarrow\ n=3K$

Tenemos

t :	M =	C +	I
a meses	$10(K)$	$9(K)$	$1(K)$
b meses	$4\times3K$	$3\times3K$	$1\times3K$

t DP I

Como el tiempo es proporcional al interés

$$\frac{a}{b}=\frac{K}{3K}$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{1}{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Una persona deposita en un banco los 3/7 de su dinero al 5% y el resto lo divide en dos partes, colocando la primera al 6% y la segunda al 3%. Si ambos producen el mismo interés y la persona puede obtener una renta anual de S/.1860, ¿cuánto dinero depositó?

A) S/.4220 B) S/.3220
C) S/.4320
D) S/.42 000 E) S/.32 000

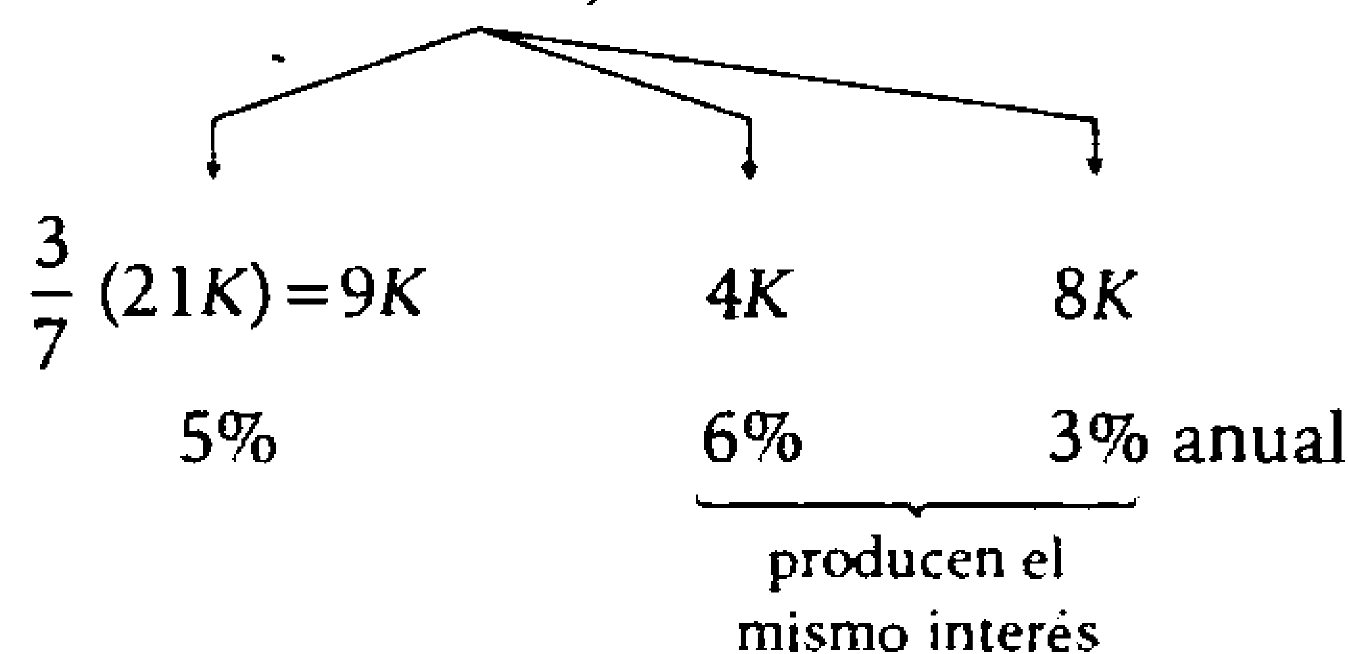
Resolución

Observación

Si dos capitales producen el mismo interés al cabo de un mismo tiempo, estando sus tasas en la relación de 2 a 1, entonces dichos capitales estarán en la relación de 1 a 2 respectivamente.

$$C_1 t\times r_1 = C_2\times t\times r_2 \rightarrow \frac{C_1}{C_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

Tomamos $C=21K$, convenientemente



Además

renta anual <> interés anual

$5\%(9K)+6\%(4K)+3\%(8K)=S/.1860$

$93\%K=S/.1860$

$3K=S/.6000$

$\rightarrow\ C=21K=S/.42\,000$

Por lo tanto, depositó S/.42 000

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Se dividen S/.7800 en dos partes, de tal manera que depositados durante dos años, uno al 20% y el otro al 40% de capitalización anual, producen el mismo monto. Calcule la diferencia de los montos si se hubiera depositado ambas partes al 20% de interés simple durante el mismo tiempo.

A) S/.3600 B) S/.4900 C) S/.1820
D) S/.1940 E) S/.2000

Resolución

Del enunciado

$C_1+C_2=7800$

Efectuamos

C_1		C_2
20%		40%
2 años		2 años
Int. simple		Int. compuesto
M_{I}	=	M_{II}
$C+I$	=	$C(1+r\%)^n$
$C_1+C_1\times 20\%\times 2$	=	$C_2(1+40\%)^2$
$140\%C_1$	=	$(140\%)^2C_2$

Se obtiene

$$\frac{C_1}{7}=\frac{C_2}{5}=\frac{\overbrace{C_1+C_2}^{7800}}{7+5}=650$$

$C_1=7\times 650;\ C_2=5\times 650$

Nos piden

$$M_{I}=C_1+C_1\cdot 20\%\cdot 2=140\%C_1$$
$$M_{II}=C_2+C_2\cdot 20\%\cdot 2=140\%C_2$$

$$M_{I}-M_{II}=140\%\underbrace{(C_1-C_2)}$$
$$=140\%\times 1300$$

$\therefore\ M_{I}-M_{II}=S/.1820$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 36

Dos capitales que se diferencian en S/.1665 se colocan a distintas tasas de interés, el mayor de ellos al 10% semestral y el otro al 25%. Si en un año los montos obtenidos estarán en la relación de 3 a 2, respectivamente, calcule el menor de dichos capitales.

A) S/.2570 B) S/.2880
C) S/.2960
D) S/.3120 E) S/.2760

Resolución

Sean los capitales $5a$ y $4b$, tal que $5a > 4b$.
Entonces

$5a$ al 10% semestral < > 20% anual

$4b$ al 25% anual.

Luego, la relación de montos al cabo de un año es

$$\frac{5a+a}{4b+b}=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{5}{4}\left\}\begin{array}{l} a=5K \\ b=4K \end{array}\right.$$

Además

$5a-4b=S/.1665$

$9K=S/.1665$

$K=S/.185$

Por lo tanto, el menor capital es

$4b=16K=S/.2960$

Clave C

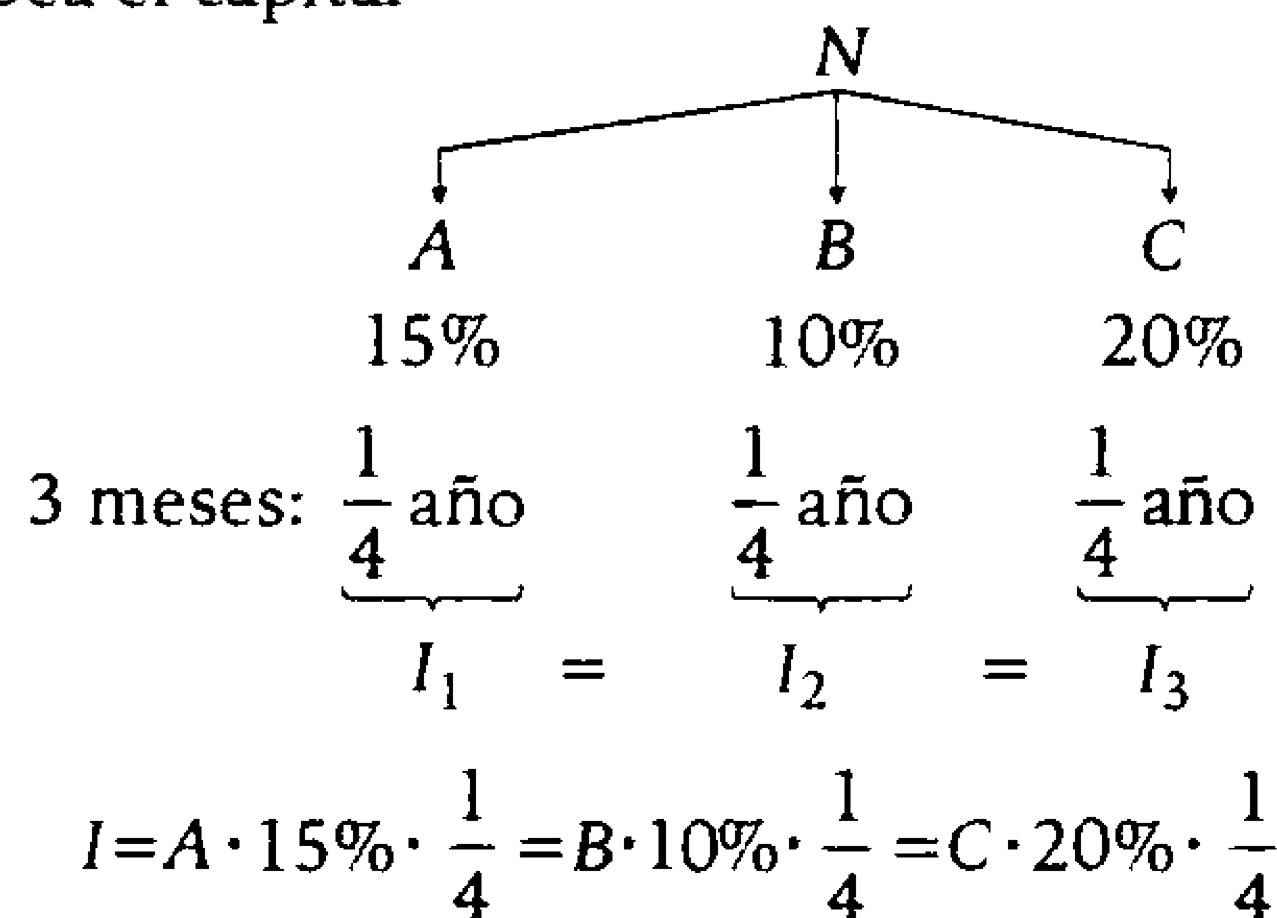
PROBLEMA N.° 37

Una persona divide su capital en tres partes y las deposita en tres bancos diferentes que pagan el 15%, 10% y 20%. Sin embargo, luego de 3 meses generan el mismo interés. Si luego de dicho tiempo se retiran las partes más los intereses y se depositan en una entidad financiera que le paga el 2% trimestral, calcule el capital inicial. Considere que se obtiene como renta anual S/.2690.

A) S/.25 000 B) S/.36 000
C) S/.30 000
D) S/.32 500 E) S/.42 000

Resolución

Sea el capital



$$I=A\cdot 15\%\cdot\frac{1}{4}=B\cdot 10\%\cdot\frac{1}{4}=C\cdot 20\%\cdot\frac{1}{4}$$

Se obtiene la relación

$$\rightarrow \quad \frac{A}{4}=\frac{B}{6}=\frac{C}{3}=K$$

Capital total:	Interés de cada parte:
$A=4K$	$I=4K\cdot 15\%\cdot\frac{1}{4}$
$B=6K$	
$C=3K$	$I=15\%K$
$N=13K$	

El monto total es

$M=C_{total}+I_{total}$

$M=13K+3\times 15\%K$

$M=1345\%K$

El monto: $1345\%K$ depositado al 2% trimestral (equivalente al 8% anual)

Renta < > $I_{1\text{ año}}=2690$

$I=C\cdot r\%\cdot t$

$2690=1345\%K\cdot 8\%\cdot 1$

$K=2500$

Por lo tanto, el capital inicial es

$N=13(2500) \rightarrow N=S/.32\ 500$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 38

Hace dos años, Ana pidió prestado a un banco cierta cantidad de dinero al 10% de interés compuesto capitalizable anualmente. Para obtener un beneficio, el mismo día que recibió el préstamo, Ana lo depositó en Lima en una cooperativa que le pagaba el 15% de interés compuesto acumulable anualmente.
Si al devolver el dinero hoy al banco ha obtenido una ganancia de S/.14 625, determine el préstamo que le hizo el banco.

A) S/.150 000 B) S/.125 000
C) S/.130 000
D) S/.225 000 E) S/.180 000

Resolución

Observa que en ambos casos el periodo de capitalización es anual, las tasas son anuales y hay dos periodos.

Sea C el préstamo que le hizo el banco.

- Calculamos el monto que debe pagar al banco:

  $M_B=110\%110\%C=121\%C$

- Calculamos el monto que obtiene en la cooperativa:

  $M_C=115\%115\%C=132{,}25\%C$

Luego de pagar al banco, su ganancia es

$M_C-M_B=S/.14\ 625$

$11{,}25\%C=S/.14\ 625$

$C=S/.130\ 000$

Por lo tanto, el préstamo que le hizo el banco fue de S/.130 000.

Nota

Decir acumulable anualmente equivale a decir capitalizable anualmente.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Se depositó un capital al 7% anual y el monto obtenido fue S/.6470. Si se hubiese depositado al 3% trimestral, el monto sería S/.7890. Señale el capital correspondiente.

A) S/.4482 B) S/.4582
C) S/.4682
D) S/.4782 E) S/.4882

Resolución

El capital al 7% anual en t años genera el monto

$M_1=C+7\%Ct=6470$ (I)

El capital al 3% trimestral (equivalente al 12% anual) en t años genera el monto

$M_2=C+12\%Ct=7890$ (II)

En (II) – (I)

$5\%Ct=1420$

$\%Ct=284$

En (I)

$C+7(\%Ct)=6470$, donde $\%Ct = 284$

$C+1988=6470$

$\therefore\ C=S/.4482$

Clave **A**

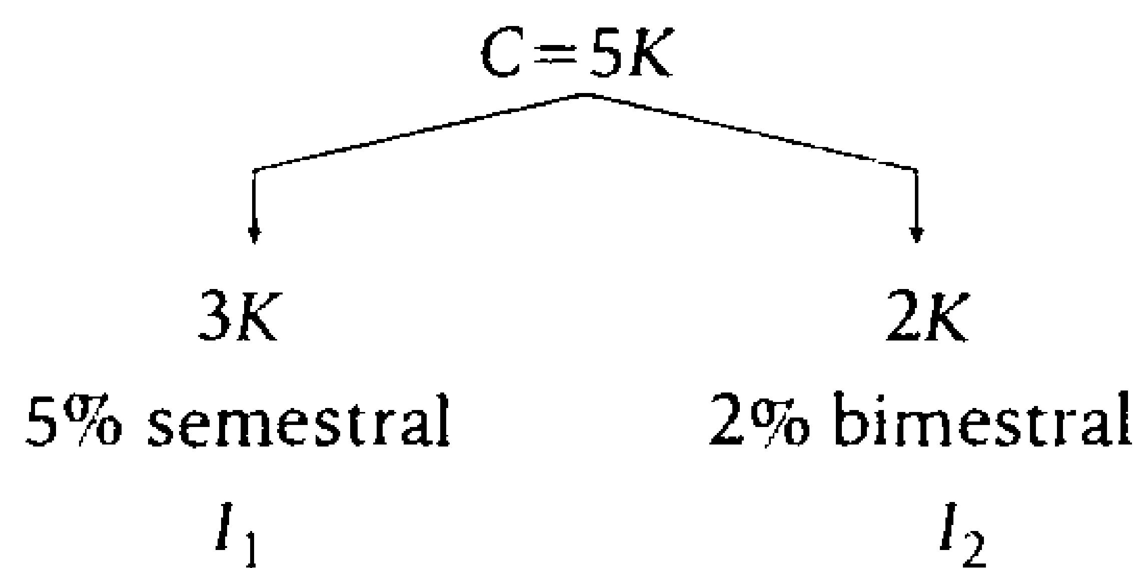
PROBLEMA N.° 40

Jimena deposita los 3/5 de su capital al 5% semestral y el resto al 2% bimestral. Si al cabo de 2 años el interés total generado es de S/.648, ¿cuál era el capital que tenía Jimena?

A) S/.2400 B) S/.3000
C) S/.2800
D) S/.3600 E) S/.3200

Resolución

Sea



Calculamos el interés total en 2 años:

$$2 \text{ años} <> \begin{cases} 4 \text{ semestres} \\ 12 \text{ bimestres} \end{cases}$$

$$I_1+I_2=S/.648$$

$$4\times(5\%\times 3K)+12\times(2\%\times 2K)=S/.648$$

$$108\%K=S/.648$$

$$K=S/.600$$

$$C=S/.3000$$

Por lo tanto, el capital que tenía Jimena era S/.3000.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 41

La suma de S/.10 000 se divide en dos partes, de tal modo que al ser impuesta una de las partes al 42% y la otra al 54% anual, producen igual interés en el mismo tiempo. Calcule las partes e indique la mayor.

A) S/.5625 B) S/.4375 C) S/.3745
D) S/.3665 E) S/.6675

Resolución

Tenemos

S/.10 000

C_1 — 42% — t → I_1

C_2 — 54% — t → I_2

$$I_1 = I_2$$

$$C_1\times 42\%t = C_2\times 54\%t$$

$$\frac{C_1}{9}=\frac{C_2}{7}=\frac{C_1+C_2}{9+7}=625$$

(C_1+C_2 = 10 000)

La mayor parte es

$$C_1=9\times 625$$

$$\therefore\ C_1=5625$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 42

Haydeé coloca su dinero al 5% trimestral con capitalización anual, pero observa que los intereses generados hasta el segundo periodo exceden en S/.380 al interés que se genera en el tercer periodo. ¿Cuál es la cantidad que poseía al inicio?

A) S/.2400 B) S/.2000
C) S/.2200
D) S/.1800 E) S/.2500

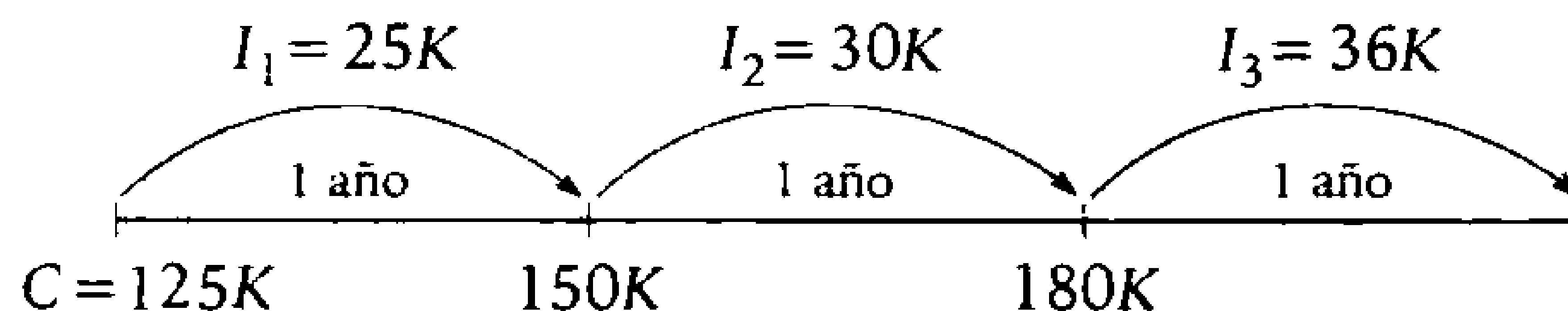
Resolución

Periodo de capitalización: anual

$$r\%=5\% \text{ trimestral} <> 20\% \text{ anual} <> \frac{1}{5}$$

Como son 3 periodos, asumimos un capital de 125K, entonces

$$I_1=\frac{1}{5}(125K);\quad I_2=\frac{1}{5}(150K);\quad I_3=\frac{1}{5}(180K)=36K$$



Además, $(I_1+I_2)-I_3=$S/.380

$19K=$S/.380 $\rightarrow$ $K=$S/.20

Por lo tanto, el capital inicial es

$C=125K=$S/.2500

Clave **E**

PROBLEMA N.° 43

Kelly y Verónica cuentan con S/.1000 cada una y los depositan al 10% durante tres años, con la diferencia de que Kelly deposita a interés simple y Verónica a interés compuesto capitalizable anualmente. Calcule la suma de los montos obtenidos por Kelly y Verónica.

A) S/.1600 B) S/.1631 C) S/.1630 D) S/.2631 E) S/.2600

Resolución

Kèlly

S/.1000
10%
3 años
Int. simple

$M_1=C_1+I_1$
$M_1=1000+1000\times10\%\times3$
$M_1=1300$

Verónica

S/.1000
10%
3 años
Int. compuesto

$M_2=C(1+r\%)t$
$M_2=1000(1+10\%)^3$
$M_2=1331$

$\rightarrow$ $M_1+M_2=2631$

Por lo tanto, la suma de los montos obtenidos es S/.2631.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

Juan impone su capital al 40% semestral, capitalizable trimestralmente durante un año. Halle el capital de Juan si la diferencia de los intereses entre el cuarto periodo y el segundo periodo es S/.1584.

A) S/.15 000 B) S/.7500 C) S/.6500 D) S/.1500 E) S/.30 000

Resolución

Periodo de capitalización: trimestral.

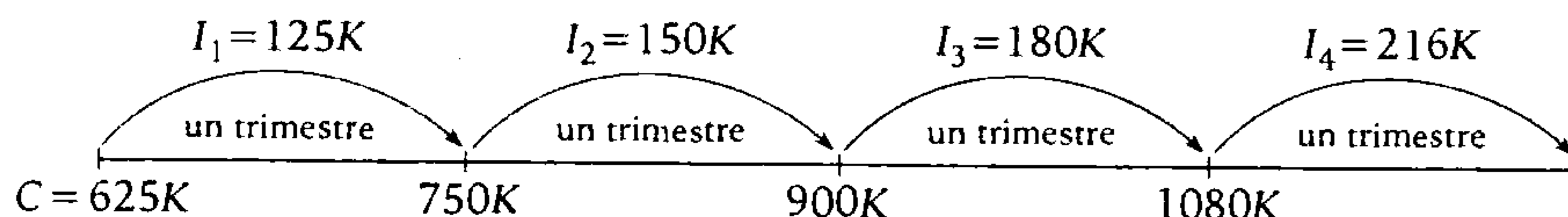
$r\%=40\%$ semestral <> 20% trimestral <> $\frac{1}{5}$

$t=$ un año <>4 periodos (trimestres)

Entonces, asumimos $C=625K$

$I_1=\frac{1}{5}(625K)=125K;\quad I_2=\frac{1}{5}(750K)=150K;\quad I_3=\frac{1}{5}(900K)=180K;\quad I_4=\frac{1}{5}(1080K)=216K$

$$D_c-D_r=\frac{V_n\cdot(r\%\cdot t)^2}{1+r\%\cdot t}$$



Además:

$I_4-I_2=$S/.1584 $\rightarrow$ $66K=$S/.1584

$K=$S/.24 $\rightarrow$ $C=625K=$S/.15 000

Por lo tanto, el capital de Juan es S/.15 000

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

¿Cuál es el capital que impuesto al $8,\hat{3}\%$ mensual capitalizable trimestralmente genera un interés de S/.250 en el último periodo? Considere que dicho capital estuvo impuesto durante 315 días.

A) S/.1200 B) S/.1024 C) S/.1080 D) S/.1100 E) S/.1020

Resolución

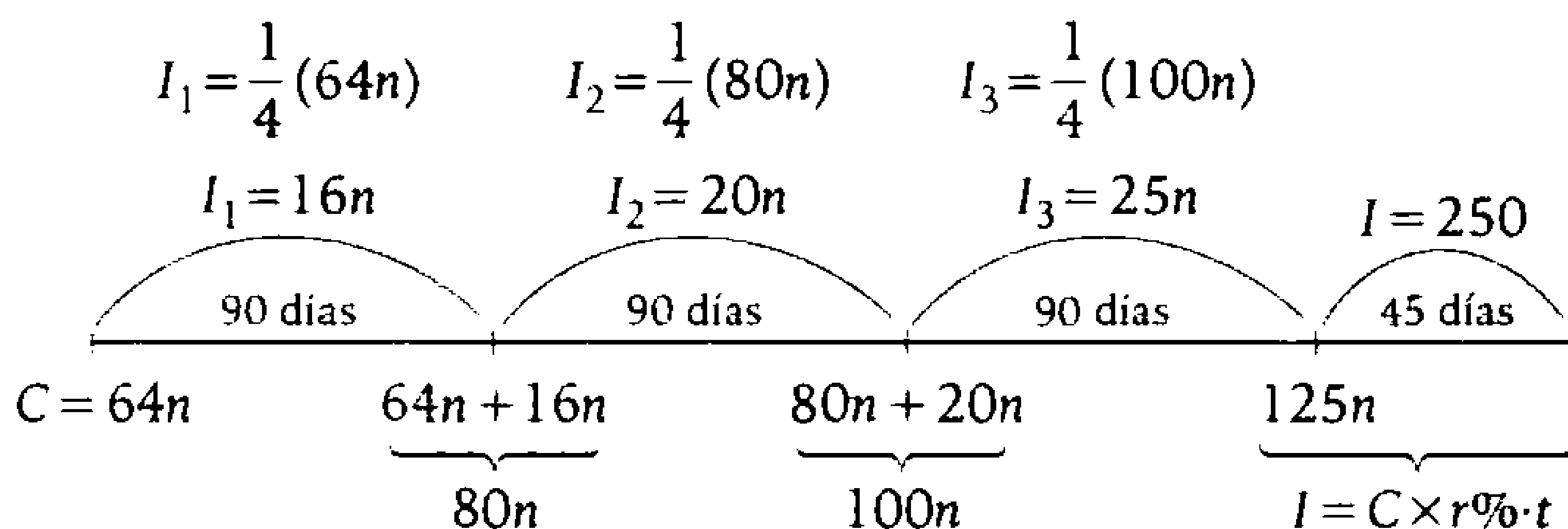
Capitaliza trimestralmente, cada periodo es de 3 meses.

- $8,\hat{3}\%$ mensual <> 25% trimestral
  $\frac{25\%}{3}$ <> gana cada 3 meses el $25\%=\frac{1}{4}$

- 315 días$=\underbrace{90\text{ días}+90\text{ días}+90\text{ días}}_{3\text{ periodos}}+45$ días

Sea el capital

$C=4\times4\times4n \rightarrow C=64n$



De los últimos 45 días, tenemos

$$250=125n\cdot\frac{25\%}{90}\cdot 45$$

$n=16$

El capital es

$C=64\times 16$

$\therefore\ C=1024$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 46

Alexandra deposita un capital al 40%, pero al cabo de seis meses retira el 30% del mismo, obteniendo al finalizar el año un interés total de S/.3145. Calcule dicho capital.

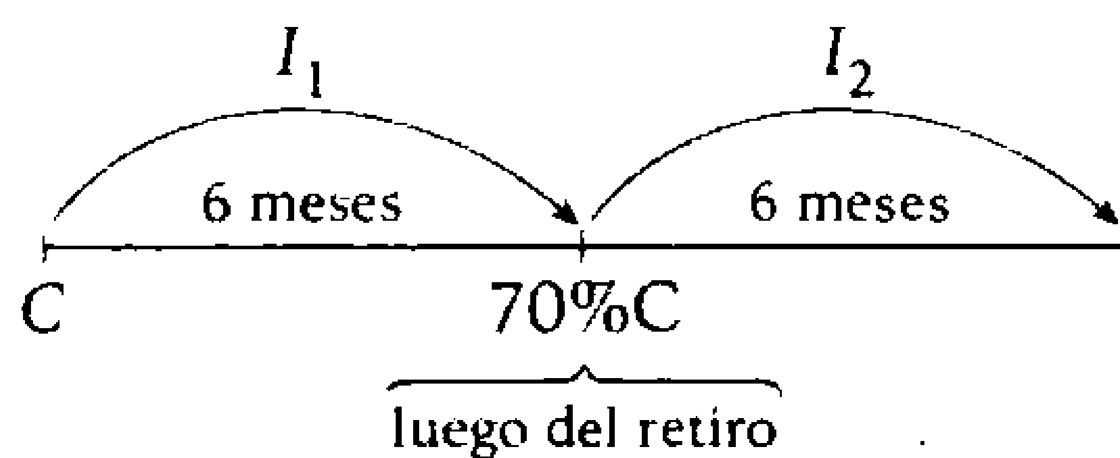
A) S/.8850 B) S/.8750
C) S/.6290
D) S/.9250 E) S/.9460

Resolución

Del dato:

40% anual <> 20% semestral

Sea C el capital de Alexandra.



Sabemos que:

$I_1+I_2=S/.3145$

$20\%C+20\%(70\%C)=S/.3145$

$34\%C=S/.3145$

$\therefore\ C=S/.9250$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 47

Tres capitales impuestos separadamente al 12,5% semestral; 4% bimestral y al 5% trimestral, respectivamente, generan la misma renta anual. Calcule la suma de dichos capitales si el menor de los montos producidos en un año es S/.3000.

A) S/.2500 B) S/.7200
C) S/.7900
D) S/.9200 E) S/.3600

Resolución

Las tasas son:

12,5% semestral <> 25% anual
4% bimestral <> 24% anual
5% trimestral <> 20% anual

C :	A	B	C
$r\%$:	25%	24%	20%
t :	1 año	1 año	1 año
$I=$	$25\%A$ =	$24\%B$ =	$20\%C$

Se obtiene la relación

$$\frac{A}{24}=\frac{B}{25}=\frac{C}{30}=K$$

$A=24K;\ B=25K;\ C=30K$

El menor monto es el del menor capital; el monto de A es:

$M=C+I \rightarrow 3000=24K+25\%(24K)$

$3000=24K+6K \rightarrow K=100$

La suma de los capitales es:

$A+B+C= 79K$

↓

$A+B+C=79\times 100$

$A+B+C=7900$

Por lo tanto, la suma de los capitales es S/.7900.

Clave **C**

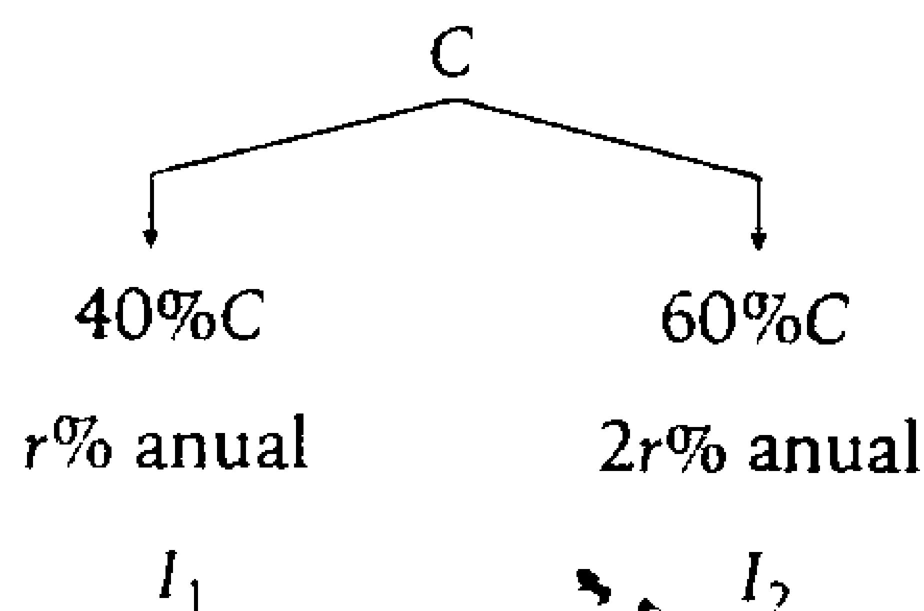
PROBLEMA N.° 48

Paola deposita el 40% de su capital en un banco que paga el $r\%$ y el resto lo invierte en un negocio cuya rentabilidad es de $2r\%$. Al cabo de t años, observa que la diferencia de sus intereses es de S/.60. ¿Cuál sería el interés que generaría dicho capital, si se impusiera al $3r\%/2$ durante $(2t)$ años?

A) S/.250 B) S/.125
C) S/.225
D) S/.180 E) S/.175

Resolución

Sea C el capital de Paola



Al cabo de t años, se tiene:

$I_2-I_1=S/.60$

Entonces

$t\cdot 2r\%\cdot 60\%C-t\cdot r\%\cdot 40\%C=S/.60$

$80\%t\cdot r\%C=S/.60$

$t\cdot r\%C=S/.75$

Piden el interés que generaría C, impuesto al $\frac{3r\%}{2}$ anual durante $(2t)$ años:

$$I=2t\cdot\left(\frac{3r\%}{2}\cdot C\right)$$

$I=3\cdot t\cdot r\%\cdot C=3(75)=S/.225$

Por lo tanto, generaría un interés de S/.225.

Clave **C**

REGLA DE DESCUENTO

PROBLEMA N.° 49

Una letra vence dentro de un año, pero al cabo de cuatro meses el mayor valor actual que adquiere, descontada al 18%, es S/.6875. Halle el descuento que se obtendría al ser cancelada cuatro meses antes de su vencimiento, si es descontada a la misma tasa.

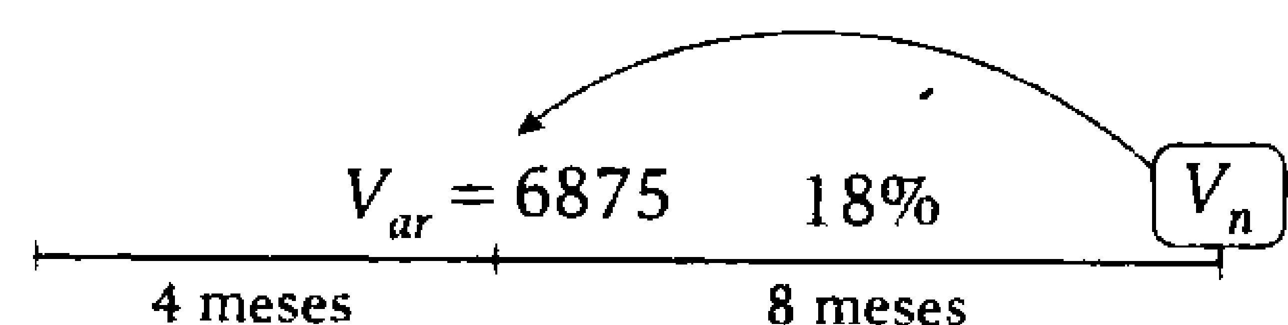
A) S/.462 B) S/.524 C) S/.649
D) S/.720 E) S/.724

Resolución

Por teoría: $V_{ar} > V_{ac}$

El mayor es

$$\boxed{V_{ar}=\frac{V_n}{1+r\%t}} \qquad \text{(I)}$$



En (I)

$$6875=\frac{V_n}{1+18\%\left(\frac{8}{12}\right)}$$

$\rightarrow\ V_n=7700$

Nos piden D_c

$$\left.\begin{array}{c}V_n=7700\\ 18\%\\ 4\text{ meses}\end{array}\right\}\begin{array}{l}D_c=V_n\cdot r\%\cdot t\\ D_c=7700\cdot 18\%\cdot\dfrac{4}{12}\end{array}$$

$\therefore\ D_c=462$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 50

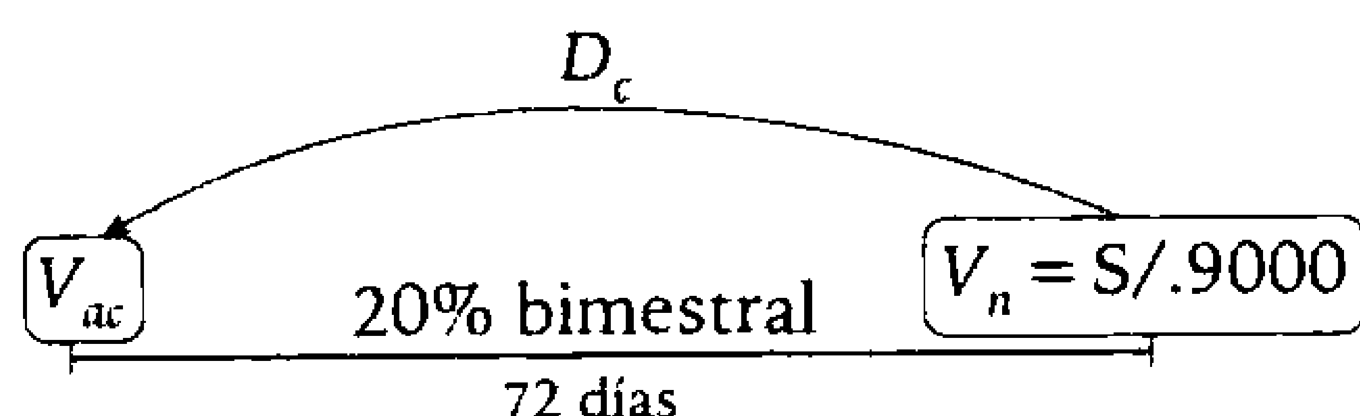
Se tiene una letra con un valor nominal de S/.9000. Faltando 72 días para su vencimiento, ¿cuánto se recibiría por ella, si se descuenta al 20% bimestral?

A) S/.7600 B) S/.7950
C) S/.8000
D) S/.8200 E) S/.6840

Resolución

Recuerda

Cuando no se indica la clase de descuento, se asume que es el descuento comercial.



$V_{ac}=V_n-D_c$

Luego

$$V_{ac}=9000-72\times\left(\frac{20\%\cdot 9000}{60}\right)=\text{S/.}6840$$

Por lo tanto, se recibirá S/.6840 por dicha letra.

Clave **E**

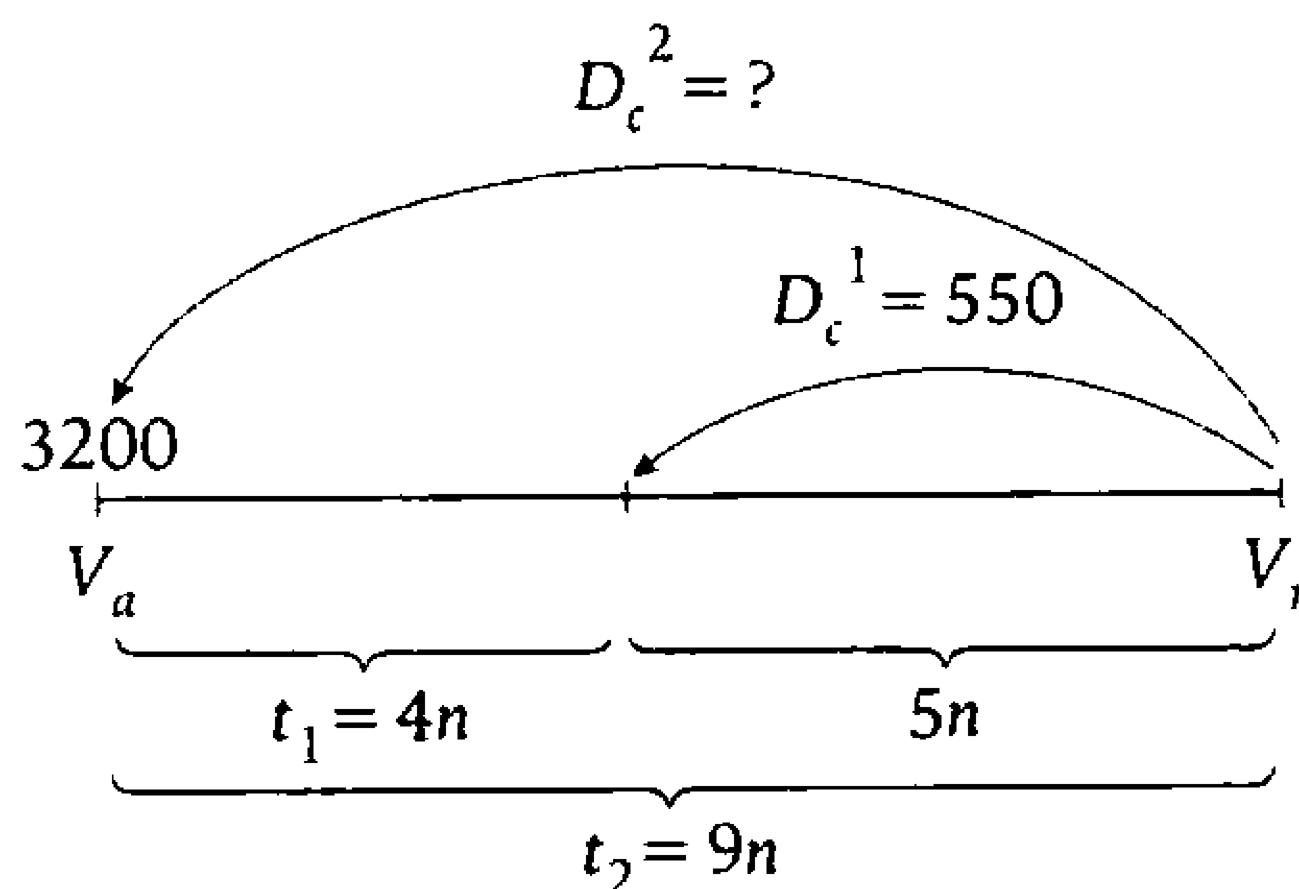
PROBLEMA N.° 51

El valor actual de una letra es de S/.3200, y si se descontara dentro de los 4/9 del tiempo que falta para su vencimiento, se obtendría un descuento de S/.550. Calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/.7550 B) S/.5390
C) S/.4490
D) S/.4190 E) S/.3725

Resolución

De los datos, tenemos: $\frac{t_1}{t_2}=\frac{4}{9}$



Por ser descuento comercial, el descuento es proporcional al tiempo.

$$D_c\text{ DP }t\ \rightarrow\ \frac{D_c^2}{9n}=\frac{D_c^1}{5n}$$

$$\frac{D_c^2}{9}=\frac{550}{5}\ \rightarrow\ D_c^2=990$$

Nos piden V_n

$V_n = V_a + D_c$

$V_n = 3200 + 990$

$\therefore\ V_n = 4190$

Clave D

PROBLEMA N.° 52

El valor actual de una letra es de S/.455 000. ¿Dentro de cuánto tiempo vencerá si es descontada al 2,5% trimestral? Considere que el descuento es al valor nominal como 1 es a 8.

A) 15 meses B) 18 meses
C) 12 meses
D) 9 meses E) 23 meses

Resolución

Como la tasa de descuento es trimestral, asumimos que la letra vence dentro de t trimestres.
Sabemos que:

$$\frac{D_c}{V_n} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{V_n \cdot t \cdot 2{,}5\%}{V_n} = \frac{1}{8}$$

$t = 5$

Por lo tanto, la letra vence dentro de 15 meses.

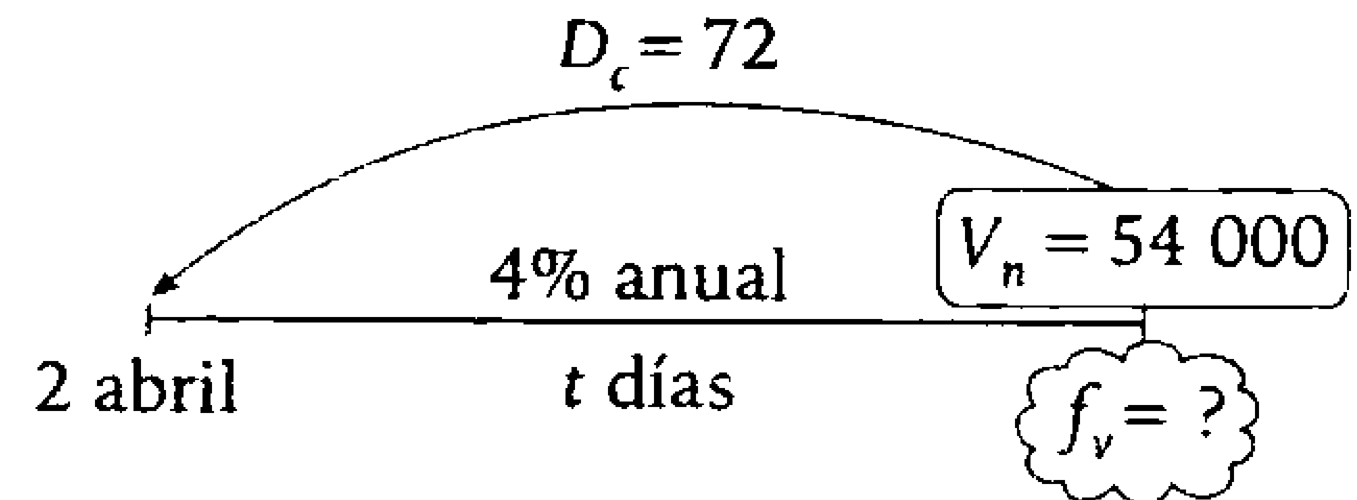
Clave A

PROBLMA N.° 53

¿En qué fecha vencerá una letra, si al pagarla el 2 de abril se obtiene un descuento de S/.72? Además, se sabe que la letra tiene un valor de S/.54 000, descontable al 4% anual.

A) 5 abril B) 8 abril C) 14 abril
D) 20 abril E) 28 abril

Resolución



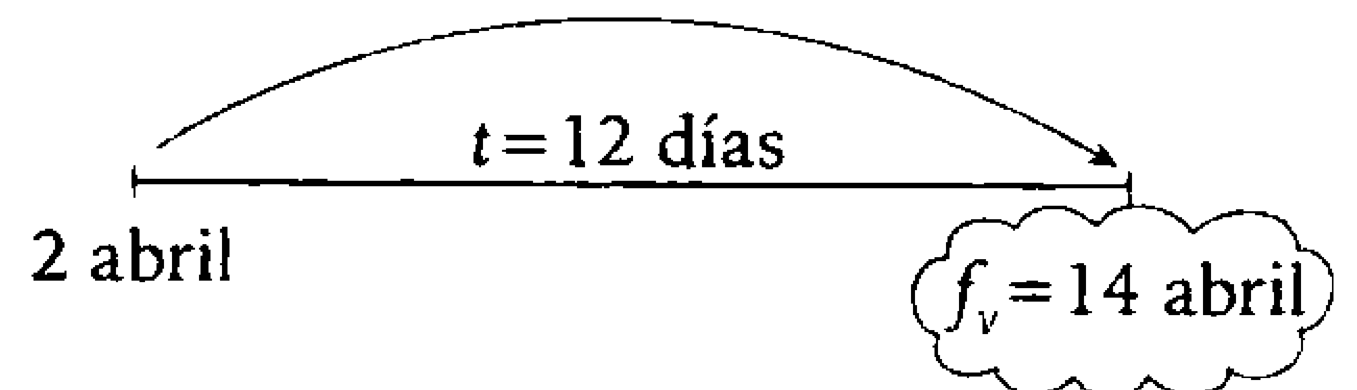
$D_c = V_n \cdot r\% \cdot t$

$$72 = 54000\left(\frac{4\%}{360}\right)t$$

Resolviendo

$t = 12$ días

La fecha de vencimiento (f_v) será:



Por lo tanto, la letra vencerá el 14 de abril.

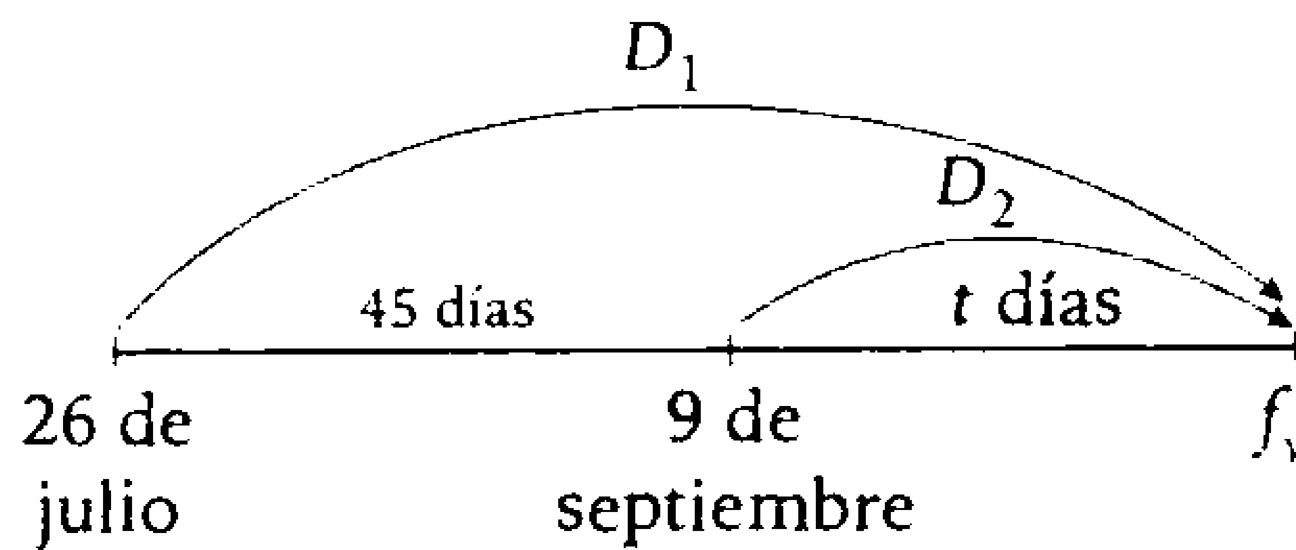
Clave C

PROBLEMA N.° 54

Los descuentos de una letra, si se descontara el 26 de julio y el 9 de septiembre del mismo año, son entre sí como 51 es a 24. ¿En qué fecha vencía la letra?

A) 19 de octubre
B) 18 de noviembre
C) 13 de diciembre
D) 11 de septiembre
E) 19 de diciembre

Resolución



Sabemos que si una letra se descuenta comercialmente, se cumple:

D_c DP t_v

Entonces

$$\frac{D_1}{45+t}=\frac{D_2}{t} \rightarrow \frac{51}{45+t}=\frac{24}{t}$$

$t=40$

Luego, hallamos la fecha de vencimiento (f_v)

Septiembre	Octubre
21	19

Por lo tanto, la letra vencía el 19 de octubre.

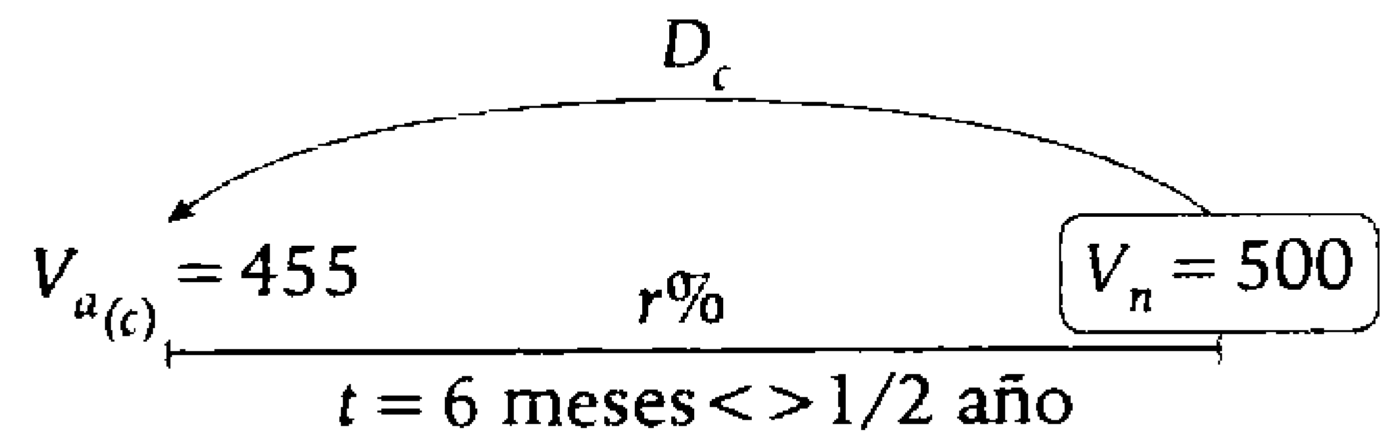
Clave **A**

PROBLEMA N.° 55

El valor actual de un pagaré que vence dentro de seis meses es de S/.455. Calcule la tasa de descuento anual si su valor nominal es de S/.500.

A) 10%
B) 12%
C) 14%
D) 18%
E) 16%

Resolución



- $D_c=V_n-V_{a_c}$

  $D_c=500-455$

  $D_c=45$
- $D_c=V_n\cdot r\%\cdot t$

  $$45=500\times\frac{r}{100}\times\frac{1}{2}$$

  $r=18$

Por lo tanto, la tasa es 18% anual.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 56

Para una letra se cumple que el valor actual racional es 112,5% del valor actual comercial y el descuento comercial exceden al descuento racional en 80 soles. Calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/.980 B) S/.960
C) S/.970
D) S/.950 E) S/.940

Resolución

Por dato: $V_{ar}=112{,}5\%V_{ac}$

Sabemos que

$$\boxed{\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-(r\%\cdot t)^2}$$

$$\frac{100}{112{,}5}=1-(r\%\cdot t)^2$$

Luego

$$r\%\cdot t=\frac{1}{3}$$

También

$$\boxed{\frac{D_c}{D_r}=1+r\%\cdot t}$$

Entonces

$$\left.\frac{D_c}{D_r}=\frac{4}{3}\right\}\begin{array}{l}D_c=4K\\ Dr=3K\end{array}$$

Como $D_c-D_r=S/.80 \rightarrow K=S/.80$

Piden el V_n

$$\boxed{V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}}$$

$$V_n=\frac{4K\cdot 3K}{K}=12K$$

$\therefore\ V_n=S/.960$

Clave B

PROBLEMA N.° 57

Dada una letra de cambio, se observa que la relación de sus valores actuales es de 99 a 100. Determine la nueva relación entre los valores actuales si la tasa se duplica y el tiempo se reduce a su tercera parte para un mismo valor nominal.

A) $\frac{99}{100}$ B) $\frac{224}{225}$ C) $\frac{12}{13}$

D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{1}{2}$

Resolución

Para una misma letra de cambio, se cumple

- $V_{ac}<V_{ar}$
- $V_{ac}=V_n(1-r\%t)$ (I)

$$V_{ar}=\frac{V_n}{1+r\%t} \quad \text{(II)}$$

Dividimos (I)÷(II)

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-(r\%t)^2$$

Por dato:

$$\frac{99}{100}=1-(r\%t)^2$$

Despejando

$$(r\%t)^2=\frac{1}{100} \quad \text{(III)}$$

La nueva tasa es: $r_2\%=2r\%$

El nuevo tiempo es: $t_2=\frac{t}{3}$

La nueva relación será

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-(r_2\%t_2)^2$$

Efectuando

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-\left(2r\%\cdot\frac{t}{3}\right)^2$$

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-\frac{4}{9}\underbrace{(r\%t)^2}_{\frac{1}{100}}$$

Reemplazando

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=\frac{224}{225}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 58

Los descuentos externo e interno de una letra que vence dentro de ocho meses están en la relación de 9 a 5. Si el valor nominal y los descuentos mencionados suman S/.3030, determine cuál será su valor actual dentro de cinco meses.

A) S/.930 B) S/.945
C) S/.975
D) S/.990 E) S/.1050

Resolución

Del enunciado

$$\left.\frac{D_c}{D_r}=\frac{9}{5}\right\} \quad \begin{matrix} D_c=9K \\ D_r=5K \end{matrix}$$

Además

$$V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}=\frac{45}{4}K$$

Como

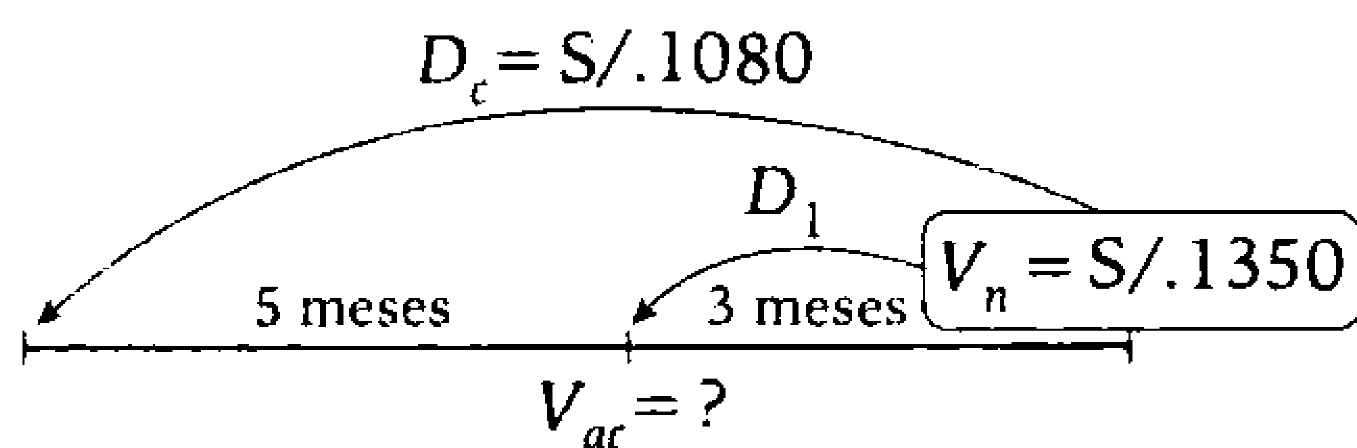
$$V_n+D_c+D_r=\text{S/.}3030$$

$$\frac{101K}{4}=\text{S/.}3030$$

$$K=\text{S/.}120$$

Entonces $D_c=\text{S/.}1080$; $V_n=\text{S/.}1350$

Luego



Sabemos que D_c DP t_v

$$\frac{1080}{8}=\frac{D_1}{3}$$

Entonces

$D_1=\text{S/.}405$

$V_{ac}=V_n-D_1$

$\therefore\ V_{ac}=\text{S/.}945$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 59

Halle el valor actual de una letra de S/.1500 si la relación entre el descuento comercial y el descuento racional es de 5 a 3.

A) S/.600 B) S/.800
C) S/.500
D) S/.1100 E) S/.300

Resolución

Datos:

$V_n=1500$

$D_c=5K$

$D_r=3K$

Nos piden V_{ac}:

$V_{ac}=V_n-D_c$ (I)

Propiedad

$$V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}$$

$$1500=\frac{5K\cdot 3K}{5K-3K}$$

Resolvemos

$K=200 \rightarrow D_c=5(200)=1000$

En (I)

$V_{ac}=1500-1000$

$\therefore\ V_{ac}=500$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 60

Calcule el valor nominal de una letra si se sabe que el descuento racional es igual al 85% del descuento comercial, además, el valor nominal excede al descuento comercial en S/.2100. Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 12 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

Resolución

Del enunciado $D_r=85\%D_c$

Sabemos que:

$$\frac{D_c}{D_r}=1+r\%\cdot t$$

$$\frac{100}{85}=1+r\%\cdot t \quad \rightarrow \quad r\%\cdot t=\frac{3}{17}$$

Además

$V_n-D_c=S/.2100$

$V_n-V_n\cdot t\cdot r\%=S/.2100$

$V_n\left(1-\frac{3}{17}\right)=S/.2100$

$\rightarrow \quad V_n=S/.2550$

Por lo tanto, la suma de sus cifras es 12.

Clave **A**

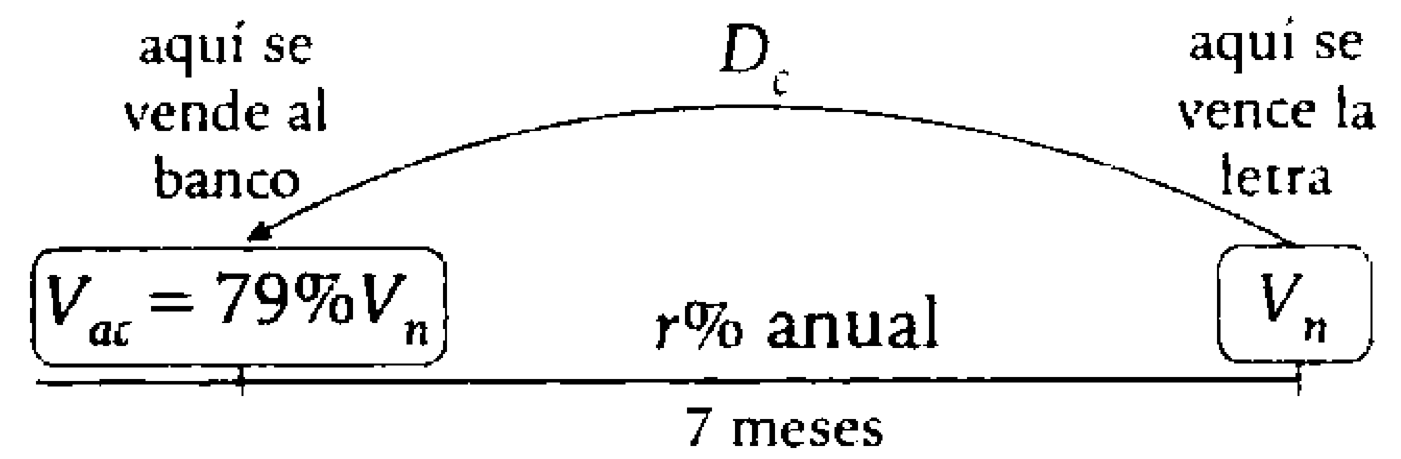
PROBLEMA N.° 61

Andrés vendió una letra a un banco siete meses antes de su vencimiento y recibió el 79% de lo que recibiría en la fecha de vencimiento. Halle la tasa de descuento anual.

A) 3% B) 12% C) 15%
D) 24% E) 36%

Resolución

Graficando



Sabemos:

$D_c=V_n\cdot r\%\cdot t$ (I)

$D_c=V_n-V_{ar}$ (II)

Igualando (I) y (II)

$\rightarrow \quad V_n-V_{ac}=V_n\cdot r\%\cdot t$

$V_n-79\%V_n=V_n\cdot r\%\cdot\frac{7}{12}$

$21\%V_n=V_n\cdot r\%\cdot\frac{7}{12}$

$36=r$

Por lo tanto, la tasa es 36%

Clave **E**

PROBLEMA N.° 62

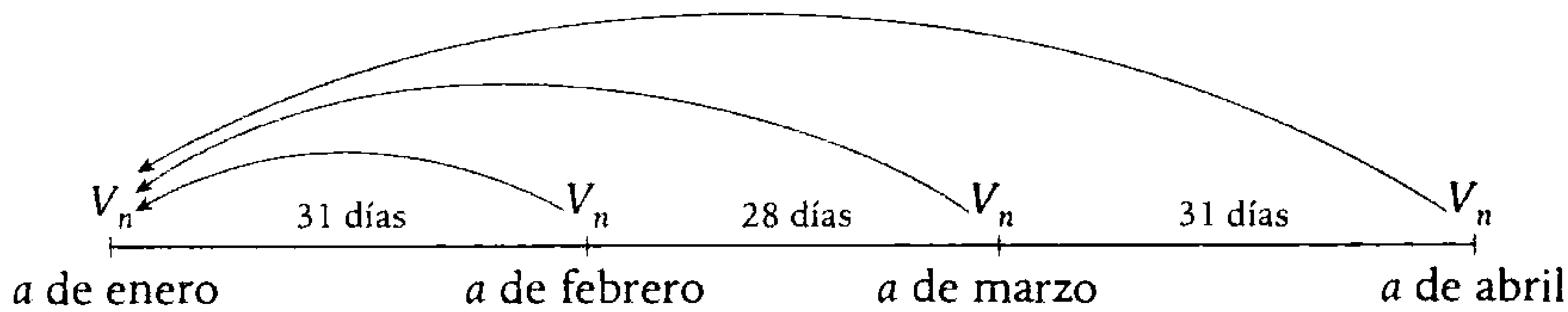
Se firman cuatro letras de igual valor nominal, que vencen en los meses de enero, febrero, marzo y abril, respectivamente, en el mismo día del mes. ¿Cuántos días después del vencimiento de la primera letra se pueden pagar las cuatro juntas, si todas se descuentan a la misma tasa? Considere el año común.

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

Resolución

Se observa que es un caso de vencimiento común, ya que las cuatro letras se reemplazan por una sola, cuyo valor nominal es la suma de los valores nominales de las letras a reemplazar y todas son descontadas a la misma tasa.

Luego



Suponiendo que dichas letras se reemplazan el *a* de enero, se tiene:

V_n(S/.):	V_n	V_n	V_n	V_n
t_v(días)	0	31	59	90

Calculamos el tiempo de vencimiento común (t_{vc})

$$t_{vc}=\frac{V_n\cdot 0+V_n\cdot 31+V_n\cdot 59+V_n\cdot 90}{4V_n}=45$$

Por lo tanto, se pueden pagar las cuatro letras juntas después de 45 días.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 63

Indique a qué tasa única han sido descontadas dos letras, una de S/.3420 por 40 días y la otra de S/.3500 por 60 días, si se sabe que se ha recibido por la segunda letra S/.67,8 más que por la primera.

A) 2%
B) 6%
C) 10%
D) 12%
E) 20%

Resolución

Tenemos

$$\underbrace{\begin{matrix}V_{n(1)}=3420\\ 40\text{ días}\\ r\%\end{matrix}}\qquad\underbrace{\begin{matrix}V_{n(2)}=3500\\ 60\text{ días}\\ r\%\end{matrix}}$$

Por dato:

$$V_{ac(1)}+67,8 \quad = \quad V_{ac(2)}$$

Como $V_a=V_n-D$, reemplazamos

$$V_{n(1)}-D_{c(1)}+67,8=V_{n(2)}-D_{c(2)}$$

$$\left(3420-3420\cdot r\%\cdot\frac{40}{360}\right)+67,8=$$

$$=3500-3500\cdot r\%\cdot\frac{60}{360}$$

$$\frac{610}{3}\cdot r\%=12,2$$

$$r=6$$

Por lo tanto, la tasa es 6%.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 64

Leandro tiene dos letras por S/.600 y S/.1400 que vencen dentro de 3 y 6 meses, respectivamente. Debido a que tuvo un asalto en su casa, prefiere negociar las letras para tener más plazo y las cambia por otras tres cuyos valores nominales son proporcionales a 2; 4 y 7, además, sus vencimientos son de 9; 12 y 16 meses, respectivamente. Si en ambos casos la tasa de descuento es de 36%, ¿cuál sería el valor nominal de la segunda de las letras reemplazantes?

A) S/.672 B) S/.885 C) S/.936 D) S/.944 E) S/.965

Resolución

Tasa de descuento

36% anual <> 3% mensual

V_n (S/.) :	600	1400	$2K$	$4K$	$7K$
t_v (meses) :	3	6	9	12	16

se cumple : suma de valores actuales de las letras reemplazadas = suma de valores actuales de las letras reemplazantes

Además: $V_{ac}=V_n-D_c$

Ejemplo: para la letra de S/.600

$V_{ac}=600-300\times3\times3\%=91\%\times600$

Entonces

$91\%\times600+82\%\times1400=73\%\times2K+64\%4K+52\%\times7K \rightarrow 1694=766\%K$

$K=221{,}15 \rightarrow 4K=884{,}6$

Por lo tanto, el valor de la segunda letra reemplazante es, aproximadamente, S/.885.

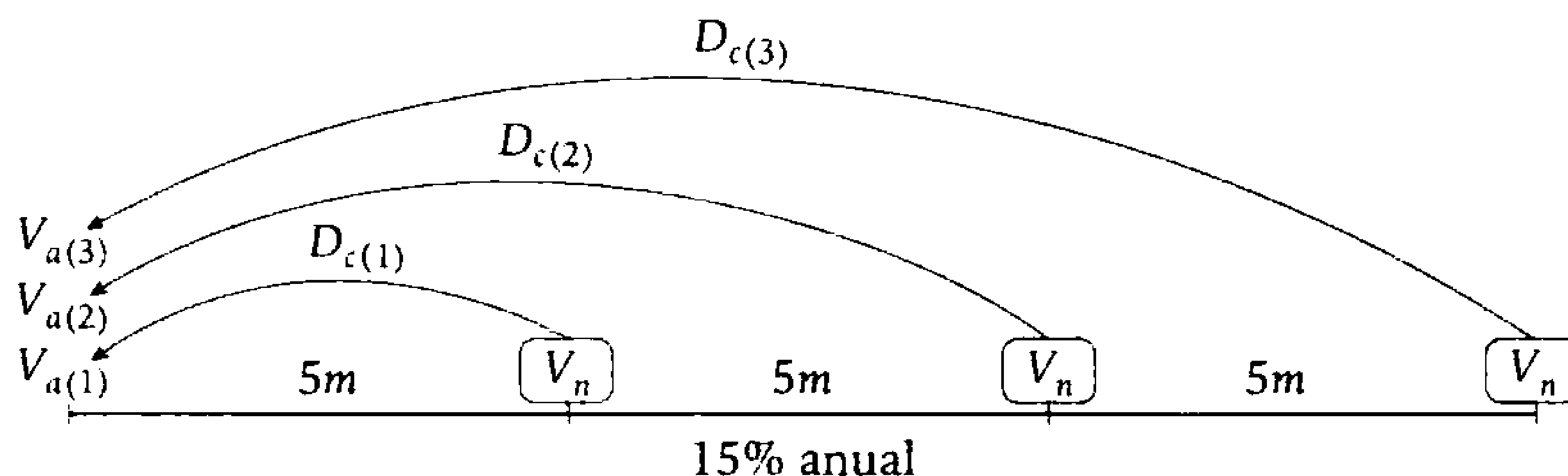
Clave B

PROBLEMA N.° 65

Se debe pagar S/.525 con tres letras de igual valor nominal, cada cinco meses y a una tasa del 15% anual. Halle el valor nominal de las letras.

A) S/.100 B) S/.150 C) S/.200 D) S/.250 E) S/.300

Resolución



Se observa que:

$$(\text{Deuda}) = V_{a(1)} + V_{a(2)} + V_{a(3)}$$

$$525 = (V_n - D_{c(1)}) + (V_n - D_{c(2)}) + (V_n - D_{c(3)})$$

$$525 = 3V_n - (D_{c(1)} + D_{c(2)} + D_{c(3)})$$

$$525 = 3V_n - \left(V_n \cdot \frac{15\%}{12} \cdot 5 + V_n \cdot \frac{15\%}{12} \cdot 10 + V_n \cdot \frac{15\%}{12} \cdot 15 \right)$$

Resolviendo tenemos

$V_n = 200$

Clave **C**

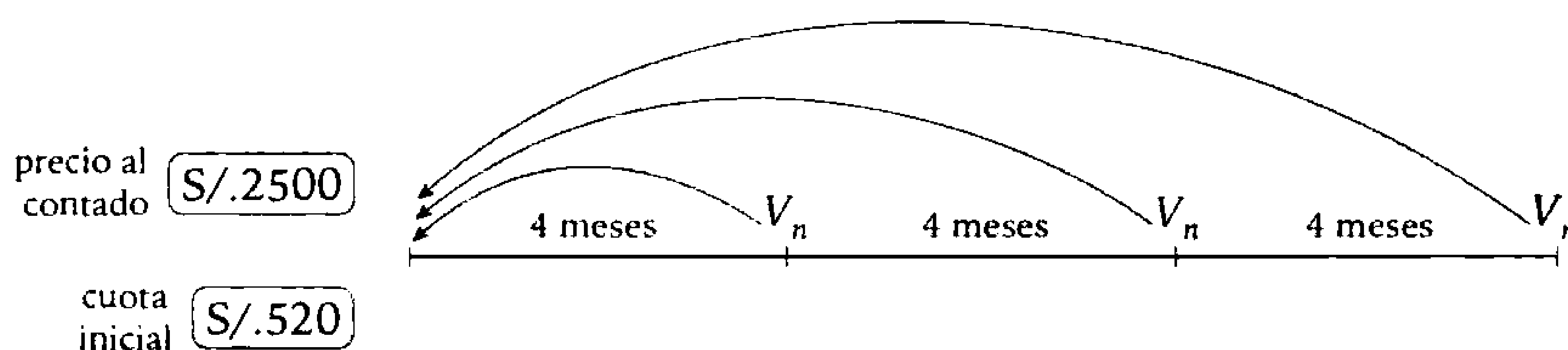
PROBLEMA N.° 66

El precio al contado de un artefacto es S/.2500. Si se decide comprar dicho artefacto a plazos, pagando una cuota inicial de S/.520 y firmando por el saldo tres letras de igual valor, pagaderas cuatrimestralmente y descontables al 9% semestral, halle el valor de cada letra.

A) S/.600 B) S/.750 C) S/.800 D) S/.880 E) S/.940

Resolución

Tasa de descuento: 9% semestral <> 6% cuatrimestral



Se cumple que:

$$\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{cuota}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de valores actuales}\\ \text{de las 3 letras}\end{pmatrix}$$

Además: $V_{ac}=V_n-D_c$

Entonces

$$2500=520+[\underbrace{94\%V_n+88\%V_n+82\%V_n}_{V_n-V_n\times 3\times 6\%}]$$

$$1980=264\%V_n$$

Por lo tanto, el valor de cada letra es S/.750

Clave B

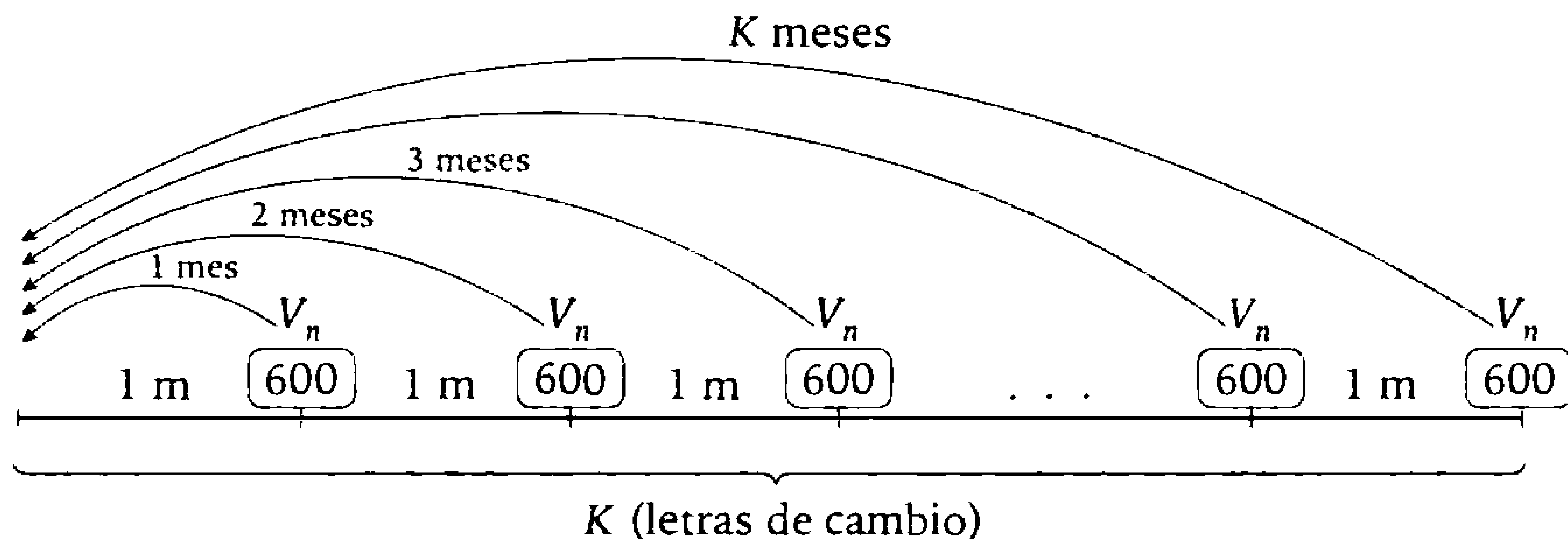
PROBLEMA N.° 67

Para comprar una computadora de S/.8400, se firmaron letras mensuales de S/.600, descontables al 10% (no hubo cuota inicial). ¿Cuántas letras se firmaron, si se terminó de pagar en menos de dos años?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 18 E) 20

Resolución

Precio al contado S/.8400, 10% de descuento.



El tiempo es menor a 2 años, entonces $K\leq 24$.

Como no hay cuota inicial

$$\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\text{suma de los valores}\\ \text{actuales}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ V_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ D_c\end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$8400=600\cdot K-600\cdot\frac{10\%}{12}(1+2+3+...+K)$$

$$800=600K-5\cdot\frac{K(K+1)}{2}$$

$\therefore\ K=15$

Clave C

PROBLEMA N.° 68

José adquiere un televisor cuyo precio al contado es de S/.50 000. Prefirió comprarlo a plazos con una cuota inicial de S/.22 496 y firma cuatro letras trimestrales (el valor nominal de cada una es 3/2 de la anterior). ¿Cuál es el valor nominal de la tercera letra, si la tasa de descuento es del 8%?

A) S/.8100 B) S/.7500 C) S/.7600 D) S/.9700 E) S/.8500

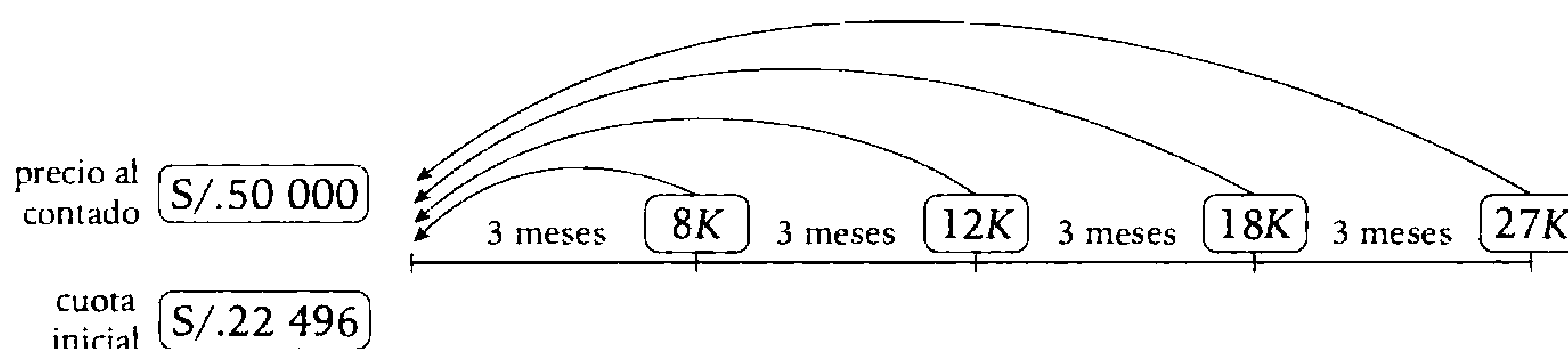
Resolución

Tasa de descuento: 8% anual <>2% trimestral

Asumimos convenientemente

$$V_{n(1)}=8K;\quad V_{n(2)}=\frac{3}{2}(8K)=12K;$$

$$V_{n(3)}=\frac{3}{2}(12K)=18K;\quad V_{n(4)}=\frac{3}{2}(18K)=27K$$



Se cumple que

$$\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{cuota}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de valores actuales}\\ \text{de las 4 letras}\end{pmatrix}$$

Además

$$V_{ac}=V_n-D_c$$

Entonces

$$50000=22496+[98\%\cdot 8K+96\%\cdot 12K+94\%\cdot 18K+\overbrace{92\%\cdot 27K}^{27K-27K\times 4\times 2\%}]$$

$$27504=6112\%K$$

$$K=450$$

$$\therefore\ V_{n(3)}=18K=S/.8100$$

Clave **A**

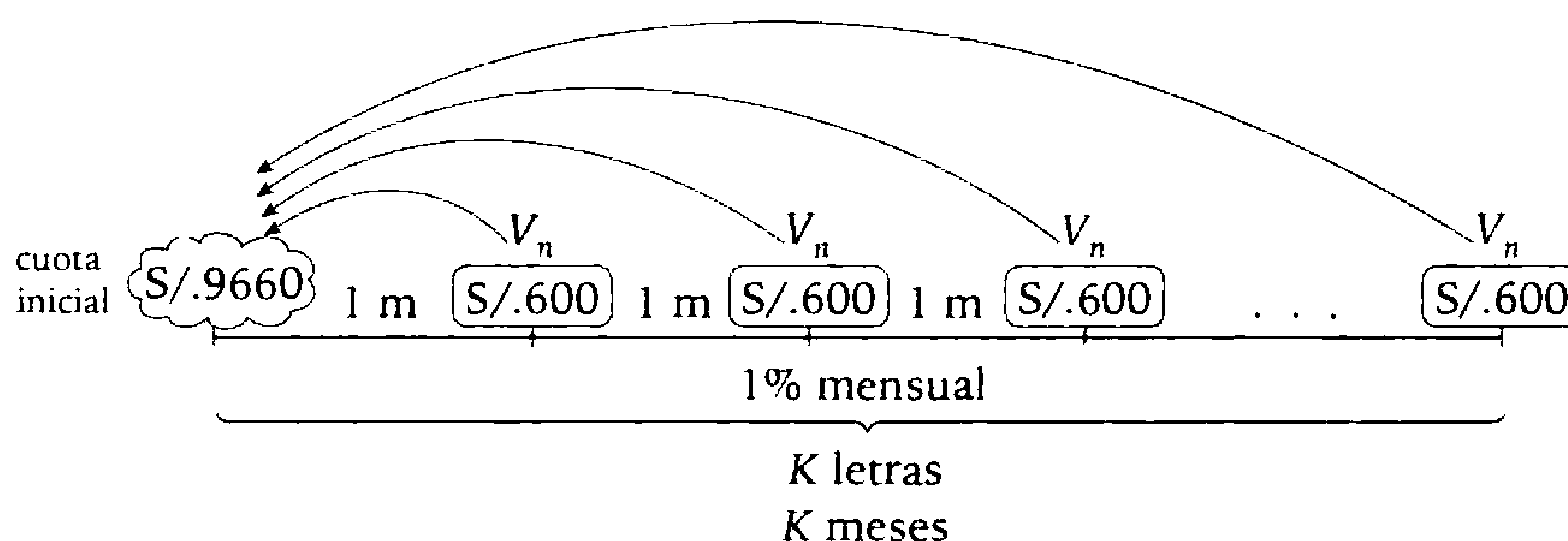
PROBLEMA N.° 69

Erika desea adquirir un auto cuyo precio al contado es S/.15 330, pagando S/.9660 de inicial y, por el saldo, letras mensuales de S/.600 cada una. ¿Cuántas letras firmaría, si la tasa de descuento es 1% mensual?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 20

Resolución

Precio al contado: P_{cont}= S/.15 330



Se cumple

$$\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{cuota}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\text{suma de valores}\\ \text{actuales}\end{pmatrix}}$$

$$P_{cont}=(\text{CI})+(\text{suma de } V_n)-(\text{suma de } D_c)$$

Efectuando tenemos

$$15\,330=9\,660+600\cdot K-600\cdot 1\%(1+2+3+...+K)$$

Despejamos K

$$5670=600K-3\cdot K(K+1)$$

$$1890=K(\underbrace{199-K})$$

✓10 189

×189 10

$\therefore\ K=10$

Clave A

PROBLEMA N.° 70

Al comprar una computadora, Raquel da una cuota inicial de S/.250 y luego firma nueve letras mensuales de S/.120 cada una, a una tasa de descuento del 36% anual. ¿Cuál sería el precio al contado de la computadora?

A) S/.1142 B) S/.1168 C) S/.1230 D) S/.1570 E) S/.1580

Resolución

Tasa de descuento: 36% anual <>3% mensual.

Sabemos que: $\begin{pmatrix}\text{precio al}\\ \text{contado}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{cuota}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de valores}\\ \text{actuales de las 9 letras}\end{pmatrix}$

Como las letras son mensuales, calculamos el descuento mensual:

$D_c=3\%(120)=\text{S/.}3{,}6$

Además

$V_{ac}=V_n-D_c$

Entonces, hallamos la suma de valores actuales de las 9 letras:

$$\left.\begin{array}{l} V_{ac(1)}=120-3{,}6\\ V_{ac(2)}=120-2(3{,}6)\\ V_{ac(3)}=120-3(3{,}6)\\ \quad\vdots\\ V_{ac(9)}=120-9(3{,}6)\end{array}\right\}(+)$$

$$V_{ac(1)}+V_{ac(2)}+V_{ac(3)}+\ldots+V_{ac(9)}=9\times120-3{,}6(1+2+3+\ldots+9)=\text{S/.}918$$

Por lo tanto, el precio al contado es

$250+918=\text{S/.}1168$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 71

Una persona firma tres letras mensuales, cuyos valores nominales están en la relación de 3; 2 y 1. Si se desea reemplazar por una sola, ¿en qué tiempo vencería? Considere que este valor nominal es el doble del primero.

A) 1 mes
B) 1 mes y 15 días
C) 1 mes y 10 días
D) 1 mes y 20 días
E) 1 mes y 18 días

Resolución

Tenemos

Letras que sean reemplazadas		Letras reemplazantes
$V_{n(1)}=\boxed{3K}\ t_1=1$ mes		letra única
$V_{n(2)}=\boxed{2K}\ t_2=2$ meses	<>	$V_n\ \boxed{6K}$
$V_{n(3)}=\boxed{1K}\ t_3=3$ meses		$t_V=??$

El tiempo de vencimiento común es

$$t_V = \frac{V_{n(1)} \cdot t_1 + V_{n(2)} \cdot t_2 + V_{n(3)} \cdot t_3}{V_{n(1)} + V_{n(2)} + V_{n(3)}}$$

Reemplazando tenemos

$$t_V = \frac{(3K) \cdot 1 + (2K) \cdot 2 + (K) \cdot 3}{3K + 2K + K}$$

$$t_V = \frac{5}{3} \text{ mes}$$

$$t_V = \frac{5}{3}(30 \text{ días})$$

Entonces

t_V=50 días <> 1 mes 20 días

Por lo tanto, es 1 mes 20 días.

Clave **D**

Resolución

Se observa que es un caso de vencimiento común, ya que las tres letras se reemplazan por una sola, cuyo valor nominal es la suma de los valores nominales de las letras a reemplazar y todas son descontadas a la misma tasa.

V_n(S/.):	400	1000	2000
t_v(días):	30	60	83

Se calcula el tiempo de vencimiento común (t_{vc})

$$t_{vc} = \frac{400 \times 30 + 1000 \times 60 + 2000 \times 83}{400 + 1000 + 2000} = 70$$

Por lo tanto, la letra única debe ser pagada dentro de 70 días.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 72

Un comerciante tiene que pagar tres letras a una financiera de S/.400; S/.1000 y S/.2000, que vencen dentro de 30, 60 y 83 días, respectivamente. ¿Dentro de cuánto tiempo debe ser pagada la única letra de S/.3400 que reemplaza a las anteriores?
Considere que todas las letras son descontadas a una misma tasa.

A) 45 días
B) 56 días
C) 62 días
D) 70 días
E) 78 días

PROBLEMA N.° 73

Un deudor tiene que pagar al banco tres letras. La primera, de S/.80 000, pagadera dentro de 30 días; la segunda, de S/.60 000, pagadera en 60 días, y la tercera, de S/.40 000, con un plazo de 85 días. Calcule en qué tiempo debe ser pagada una letra única, cuyo valor nominal sea la suma de los valores nominales de las letras, si la tasa de descuento es constante.

A) 54 días
B) 50 días
C) 52 días
D) 56 días
E) 53 días

Resolución

En el cambio de letras, cumple las características de vencimiento común.

$V_{n(1)}=$ S/.80 000	<> 4	$t_1=30$ días		letra única
$V_{n(2)}=$ S/.60 000	<> 3	$t_2=60$ días	<>	$V_n=180\,000$
$V_{n(3)}=$ S/.40 000	<> 2	$t_3=85$ días		$t_V=??$

El tiempo de vencimiento común es

$$t_V=\frac{V_{n(1)}\cdot t_1+V_{n(2)}\cdot t_2+V_{n(3)}\cdot t_3}{V_{n(1)}+V_{n(2)}+V_{n(3)}}$$

Utilizando la relación de los valores nominales

$$t_V=\frac{4(30)+3(60)+2(85)}{4+3+2}$$

$\therefore\ t_V=50$ días

Clave **B**

PROBLEMA N.° 74

Calcule la tasa de descuento de una letra si se sabe que falta un año para su vencimiento y que si se hubiera cancelado hace dos meses, se hubiese pagado 25% menos de lo que se paga hoy.

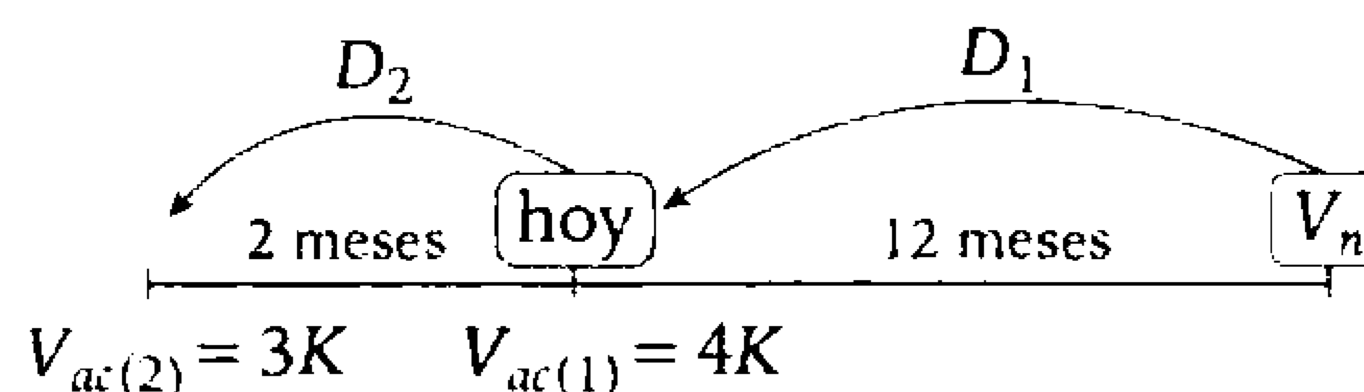
A) 50% B) 60% C) 70%
D) 55% E) 65%

Resolución

Recuerda

D_c DP t_V

Luego, asumimos convenientemente que hoy el valor actual es $4K$, entonces tenemos:



Entonces

$$\frac{D_2}{2}=\frac{D_1}{12};\ \frac{4K-3K}{2}=\frac{D_1}{12}$$

$$\rightarrow\ D_1=6K$$

$$V_n=V_{ac(1)}+D_1=10K$$

Piden la tasa de descuento anual ($r\%$):

$$r\%=\frac{\left(\begin{matrix}\text{descuento obtenido}\\ \text{en un año}\end{matrix}\right)}{\text{valor nominal}}\times 100\%$$

$$r\%=\frac{6K}{10K}\times 100\%$$

$\therefore\ r\%=60\%$

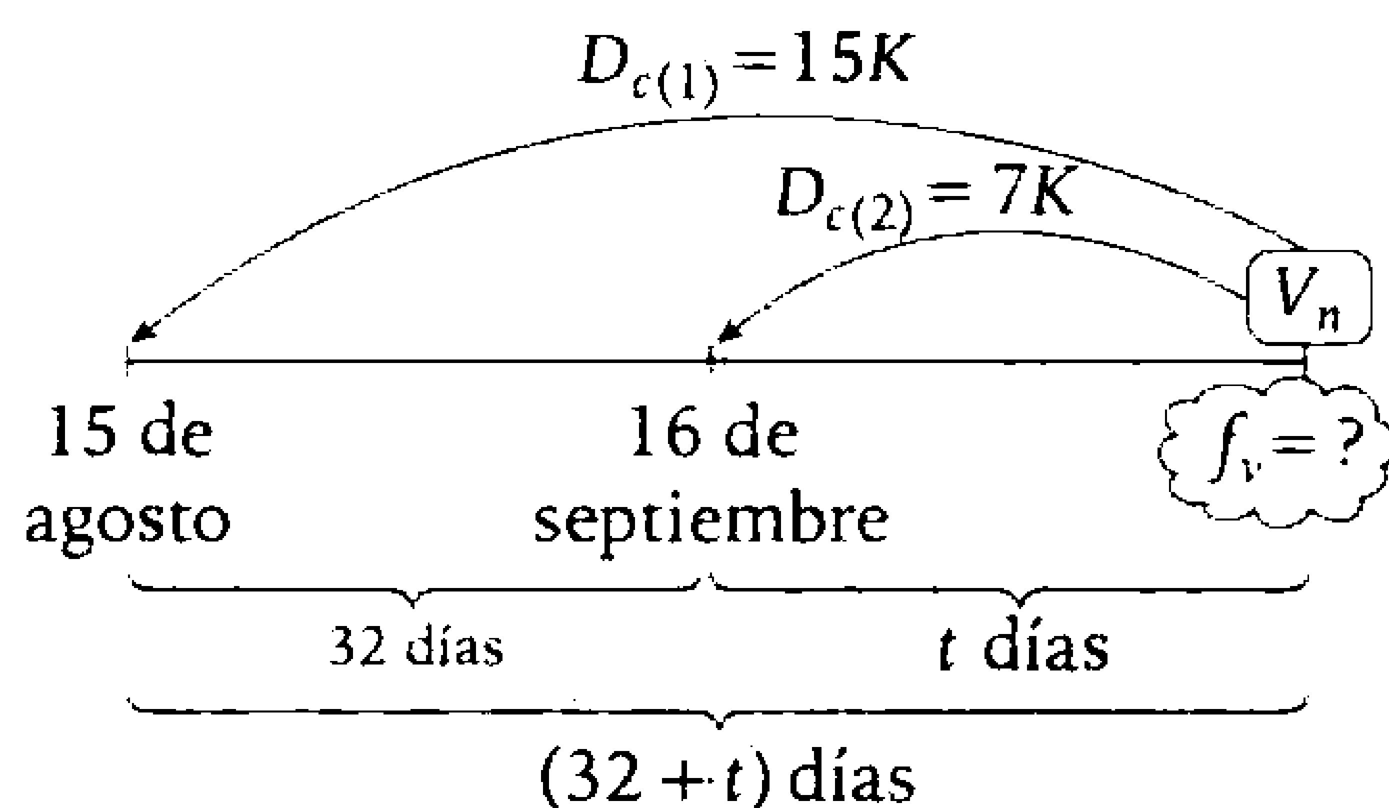
Clave **B**

PROBLEMA N.° 75

¿Cuál es la fecha de vencimiento de una letra, si los descuentos correspondientes al 15 de agosto y el 16 de septiembre son entre sí como 15 es a 7?

A) 14 de octubre
B) 18 de octubre
C) 31 de octubre
D) 4 de noviembre
E) 10 de noviembre

Resolución

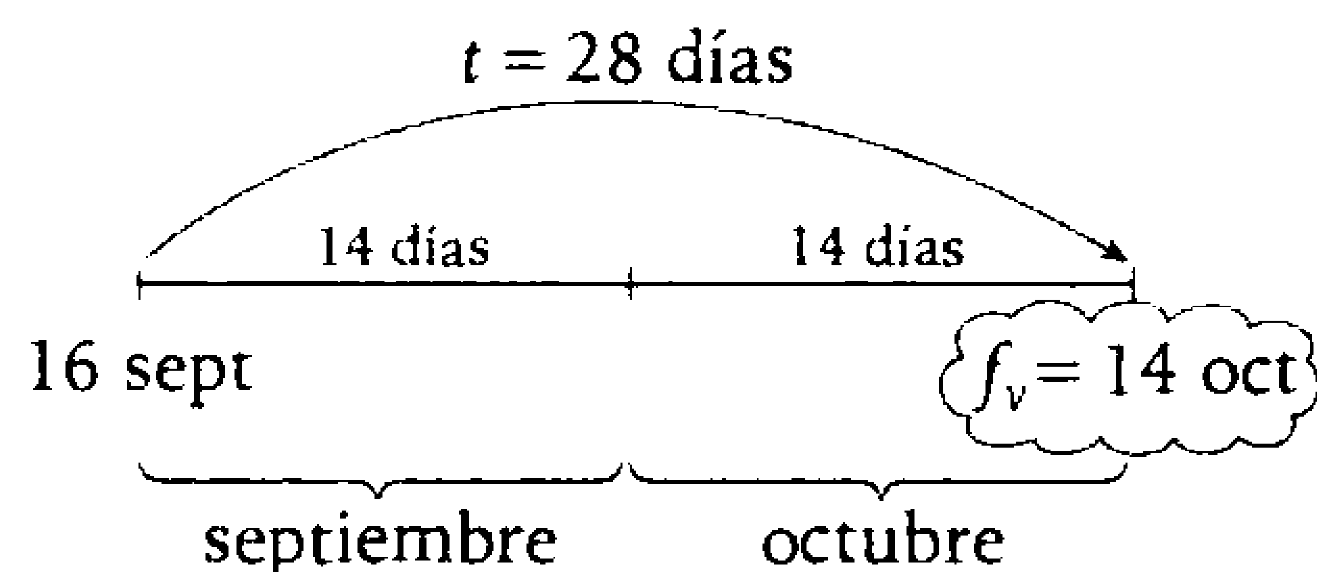


Por ser descuento comercial: D_c DP t

Tenèmos:

$$\underbrace{\frac{D_{c(1)}=15K}{(32+t)\text{días}}}\qquad \underbrace{\frac{D_{c(2)}=7K}{t\text{ días}}}$$

$$\frac{15K}{32+t} = \frac{7K}{t} \rightarrow t=28$$



Por lo tanto, la fecha de vencimiento es 14 de octubre.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 76

Se descuenta una letra de S/.420 y se obtiene S/.390. Si se descuenta racionalmente a la misma tasa, ¿cuánto se recibiría?

A) S/.392 B) S/.329 C) S/.239
D) S/.339 E) S/.393

Resolución

Tenemos:

V_n=S/.420; V_{ac}=S/.390

$\rightarrow$ $D_c=V_n-V_{ac}$=S/.30

Además, sabemos

$$\boxed{V_n = \frac{D_c \cdot D_r}{D_c - D_r}}$$

$$420 = \frac{30 \cdot D_r}{30 - D_r}$$

D_r=S/.28

Luego

$V_{ar}=V_n-D_r$=S/.392

Por lo tanto, se recibiría por ella S/.392.

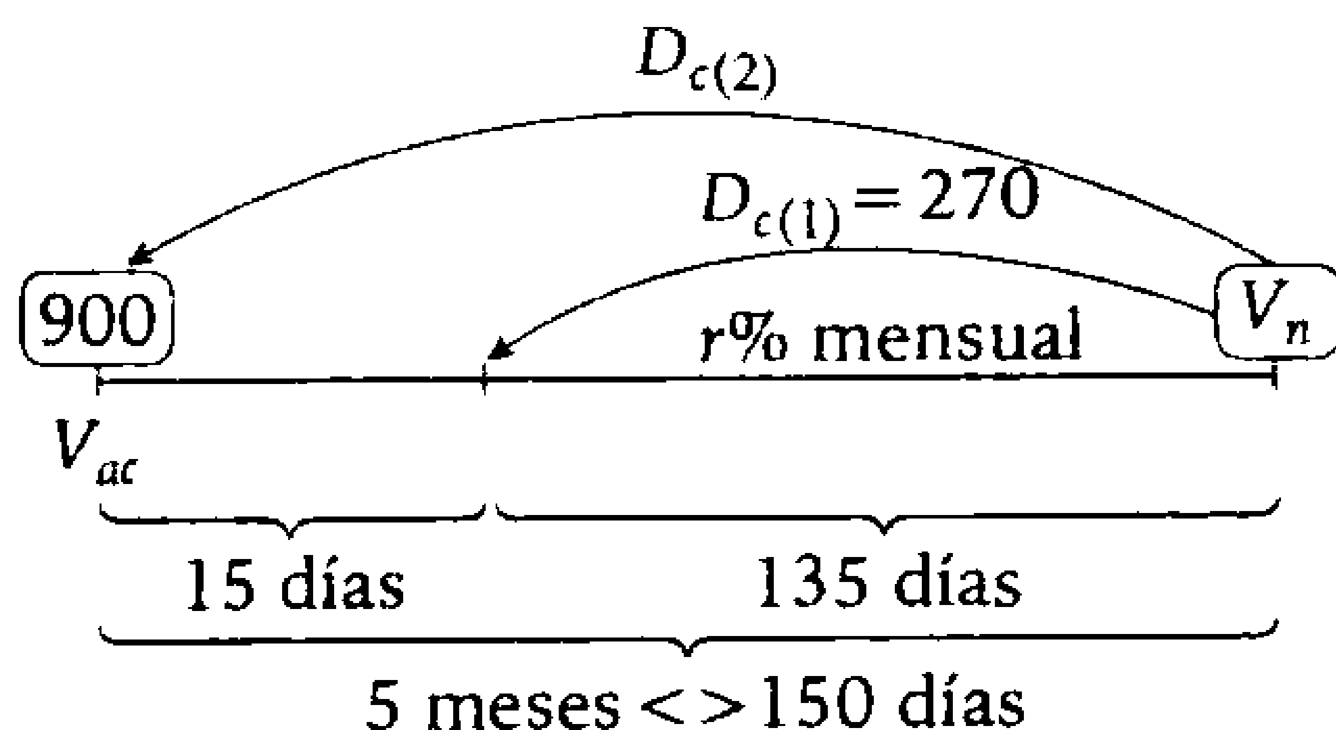
Clave **A**

PROBLEMA N.° 77

El valor actual de una letra de cambio, que vence dentro de cinco meses, es S/.900. Si la descontara dentro de 15 días, su descuento resultaría de S/.270. Calcule cuánto sería el valor actual si la descontara racionalmente a la misma tasa y faltaran siete meses para su vencimiento.

A) S/.788,$\hat{8}$ B) S/.888
C) S/.176,$\hat{8}$
D) S/.568 E) S/.888,$\hat{8}$

Resolución



Por ser descuento comercial

$$\left.\begin{array}{l} D_{c(1)}=270 \text{ en } 135 \text{ días} \\ D_{c(2)} \quad\quad \text{ en } 150 \text{ días} \end{array}\right\} \frac{270}{135}=\frac{D_{c(2)}}{150}$$

$\rightarrow \quad D_{c(2)}=300$

- $V_n=V_{ac}+D_{c(2)}$

$V_n=900+300$

$V_n=1200$

Calculando la tasa: $r\%$

$D_{c(2)}=V_n \cdot r\% \cdot t$

$300=1200 \cdot r\% \cdot 5$

$r=5$

$\rightarrow \quad r\%=5\%$ mensual

Para el cálculo del V_{ar} tenemos

$$\left.\begin{array}{l} V_n=1200 \\ 5\% \text{ mensual} \\ t=7 \text{ meses} \end{array}\right\} V_{ar}=\frac{V_n}{1+r\%t}$$

$$V_{ar}=\frac{1200}{1+5\% \cdot 7}$$

$\therefore \quad V_{ar}=888,\hat{8}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 78

El valor nominal de una letra es S/.3600 y, descontando racionalmente, se obtiene S/.3200 por ella. ¿Cuánto se obtendría, si el descuento fuese comercial a la misma tasa?

A) S/.3000 B) S/.3050
C) S/.3100
D) S/.3150 E) S/.3250

Resolución

Tenemos: V_n=S/.3600; V_{ar}=S/.3200

$\rightarrow \quad D_r=V_n-V_{ar}$=S/.400

Además, sabemos

$$\boxed{V_n=\frac{D_c \cdot D_r}{D_c-D_r}}$$

$$3600=\frac{D_c \cdot 400}{D_c-400}$$

D_c=S/.450

Luego, $V_{ac}=V_n-D_c$=S/.3150

Por lo tanto, se obtendría S/.3150.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 79

Una letra vence dentro de ocho meses, y se observa que dentro de cuatro meses los descuentos comercial y racional están en la relación de 6 a 5. Si hoy la letra tiene un valor de S/.1008, calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/.2520 B) S/.2500
C) S/.1060
D) S/.1680 E) S/.3200

Resolución

La letra vence dentro de 8 meses, y dentro de 4 meses los descuentos comercial y racional están en la relación de 6 a 5.

Por dato: $D_c=6K$; $D_r=5K$

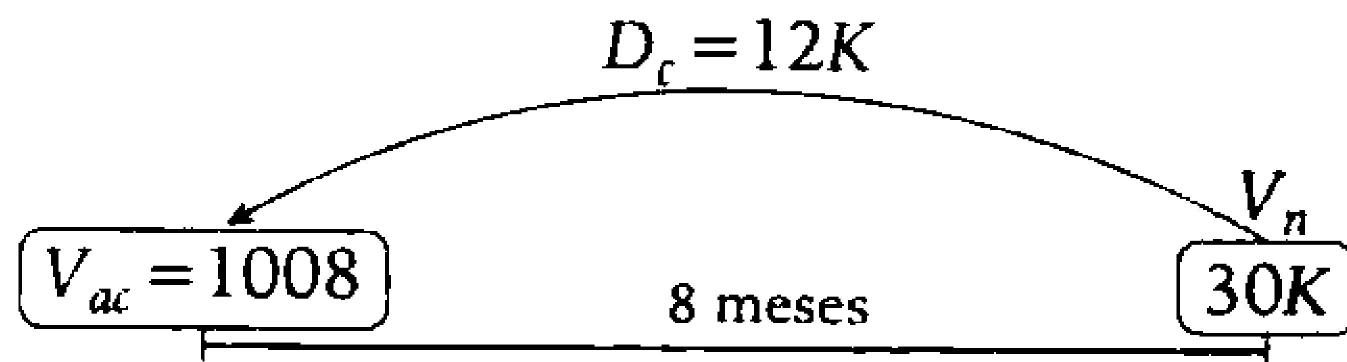
Propiedad

$$V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}$$

Reemplazando tenemos

$$V_n=\frac{6K\cdot 5K}{6K-5K} \rightarrow V_n=30K \qquad \text{(I)}$$

$$D_{c(4\text{ meses})}=6K \rightarrow D_{c(8\text{ meses})}=12K$$



- $V_{ac}=V_n-D_c$

  $V_{ac}=30K-12K=1008 \rightarrow K=56$

  En (I): $V_n=30\times 56$

$\therefore$ $V_n=$S/.1680

Clave **D**

PROBLEMA N.° 80

Andrés firmó una letra pagadera dentro de 11 meses. Luego de tres meses la canceló y se percató de que el descuento comercial que le hicieron fue un séptimo más que el descuento racional. Halle por cuánto firma la letra si se sabe que si esta se hubiera cancelado dos meses antes de su vencimiento, se habrían pagado S/.630 más.

A) S/.4800 B) S/.5200 C) S/.5400
D) S/.5880 E) S/.6120

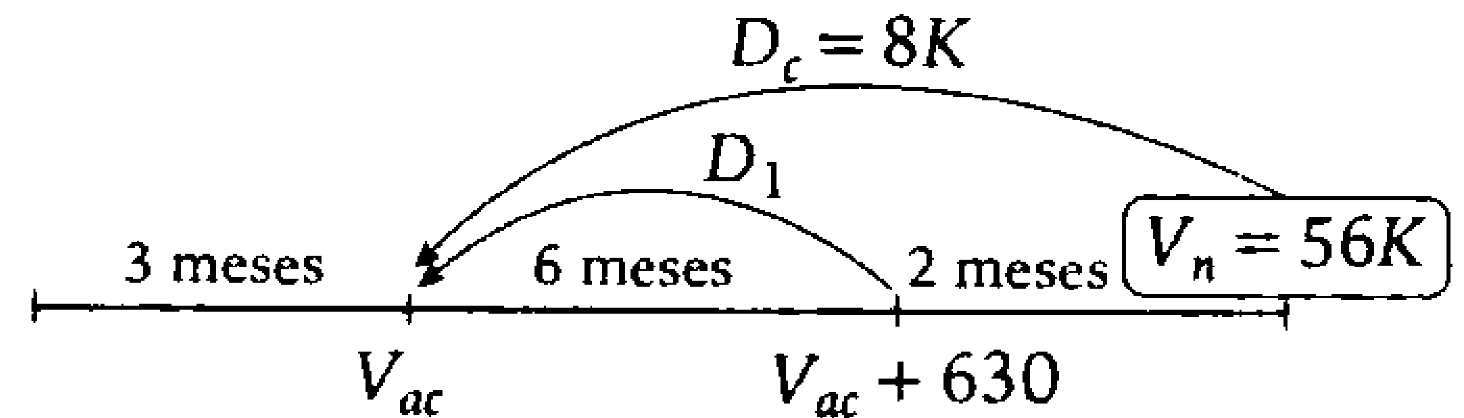
Resolución

Luego de tres meses se tiene:

$$D_r=7K;\ D_c=\frac{8}{7}(7K)=8K$$

$$\rightarrow V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}=56K$$

Además



Sabemos que D_c DP t_V

$$\frac{8K}{8}=\frac{D_1}{6} \rightarrow D_1=6K$$

De donde

$6K=$S/.630

$K=$S/.105

$\rightarrow$ $V_n=56K=$S/.5880

Por lo tanto, Andrés firmó una letra de S/.5880.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 81

Se tiene una letra que vence dentro de nueve meses. Si se descontara al 20% comercialmente y racionalmente, la suma de los valores actuales sería S/.1582. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/.640 B) S/.720 C) S/.840
D) S/.920 E) S/.1120

Resolución

Datos: Se sabe

$V_n=?$

$t=9$ meses

20% anual

- $V_{ac}=V_n-D_c$
- $V_{ar}=\dfrac{V_n}{1+r\%t}$

Por dato:

$$V_{ac} + V_{ar} = 1582$$

$$(V_n-D_c)+\frac{V_n}{1+r\%t}=1582$$

Efectuamos

$$\left(V_n - V_n\cdot 20\%\cdot\frac{9}{12}\right)+\frac{V_n}{1+20\%\cdot\dfrac{9}{12}}=1582$$

Resolvemos

$V_n=S/.920$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 82

El valor actual racional y el valor actual comercial de una letra, que vence dentro de dos meses, se diferencian en S/.50. Calcule el valor nominal de dicha letra si la tasa de descuento en ambos casos es del 10% mensual.

A) S/.1200
B) S/.1400
C) S/.1500
D) S/.2400
E) S/.3000

Resolución

Se tiene

$V_{ar}-V_{ac}=S/.50$

Sabemos que

- $D_c-D_r=V_{ar}-V_{ac}$

$D_c-D_r=S/.50$ (I)

- $\dfrac{D_c}{D_r}=1+t\cdot r\%$

$$\frac{D_c}{D_r}=1+2\cdot 10\%=\frac{6}{5}\ \Big\}\ \begin{matrix} D_c=6K \\ D_r=5K \end{matrix}$$

Reemplazamos en (I)

$K=S/.50$

Luego

$$V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}=30K$$

Por lo tanto, $V_n=S/.1500$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 83

Tres letras han sufrido el mismo descuento, teniendo como valores nominales S/.3600; S/.1500 y S/.1400, siendo sus tasas de descuento 20%; 24% y 30%, respectivamente. Si los tiempos de descuento de las tres letras suman 33 meses, calcule la suma de sus valores actuales.

A) S/.5240
B) S/.7400
C) S/.5400
D) S/.4800
E) S/.6530

Resolución

Dato: $t_1+t_2+t_3=33$ meses

$$\underbrace{\begin{matrix} V_{n(1)}=3600 \\ 20\% \\ t_1 \text{ meses} \end{matrix}}_{D_{c(1)}} = \underbrace{\begin{matrix} V_{n(2)}=1500 \\ 24\% \\ t_2 \text{ meses} \end{matrix}}_{D_{c(2)}} = \underbrace{\begin{matrix} V_{n(3)}=1400 \\ 30\% \\ t_3 \text{ meses} \end{matrix}}_{D_{c(3)}}$$

$$3600\cdot\frac{20\%}{12}\cdot t_1 = 1500\cdot\frac{24\%}{12}\cdot t_2 = 1400\cdot\frac{30\%}{12}\cdot t_3$$

Simplificando: $12t_1=6t_2=7t_3 \rightarrow \frac{t_1}{7}=\frac{t_2}{14}=\frac{t_3}{12}=\frac{\overbrace{t_1+t_2+t_3}^{33}}{7+14+12}=1$

Los tiempos en meses son: $t_1=7$; $t_2=14$; $t_3=12$

Los descuentos son:

$$\rightarrow\ D_{c(1)}=3600\cdot\left(\frac{20\%}{12}\right)\cdot 7$$

$D_{c(1)}=420$; los tres descuentos son iguales a S/.420

Nos piden:

$$V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}=(V_{n(1)}-D_{c(1)})+(V_{n(2)}-D_{c(2)}+(V_{n(3)}-D_{c(3)})$$

$$V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}=(V_{n(1)}+V_{n(2)}+V_{n(3)})-(D_{c(1)}+D_{c(2)}+D_{c(3)})$$

$$V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}=(3600+1500+1400)-(420+420+420)$$

$$\therefore\ V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}=\text{S/.}5240$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 84

Los valores nominales de dos letras están en la relación de 3 a 8. Ambas se descuentan al 1%: la primera por 1 mes y 20 días, y la segunda por 3 meses. Si el descuento de la segunda letra ha sido de S/.22 680, ¿cuál fue el descuento de la primera letra?

A) S/.8450 B) S/.7800 C) S/.9450 D) S/.9540 E) S/.4725

Resolución

Tenemos

	V_n(S/.)	t_v	r% anual
Letra 1	3K	1 mes y 20 días	1%
Letra 2	8K	3 meses	1%

$$D_{c(2)}=3\cdot\left(\frac{1\%\cdot 8K}{12}\right)$$

$$D_{c(2)}=\text{S/.}22\,680$$

$$\rightarrow\ 1\%K=\text{S/.}11\,340$$

Piden

$$D_{c(1)}=\underset{\text{(días)}}{50}\cdot\left(\frac{1\%\cdot 3K}{360}\right)$$

$$D_{c(1)}=\frac{50\cdot 3}{360}\cdot 11\,340$$

$$\therefore\ D_{c(1)}=\text{S/.}4725$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 85

Se tienen dos letras que vencen dentro de 2 y 3 meses, respectivamente, y cuya suma de valores nominales es S/.8400. Calcule el valor nominal de una de las letras, si se sabe que el descuento de la segunda letra es dos veces más que la primera.

A) S/.5625 B) S/.6500
C) S/.7200
D) S/.2800 E) S/.5400

Resolución

Por dato:

$$V_{n(1)}+V_{n(2)}=8400$$

$\boxed{V_{n(1)}}$: $t_{v(1)}=2$ meses, r% mensual $\rightarrow D_{c(1)}$

$\boxed{V_{n(2)}}$: $t_{v(2)}=3$ meses, r% mensual $\rightarrow D_{c(2)}$

Dato:

$$3\cdot D_{c(1)}=D_{c(2)}$$

$$3(V_{n(1)}\cdot r\%\cdot 2)=V_{n(2)}\cdot r\%\cdot 3$$

$$\rightarrow\ V_{n(2)}=2V_{n(1)}$$

Tenemos:

$$V_{n(1)}+V_{n(2)}=8400 \qquad \text{(I)}$$

$$V_{n(2)}=2V_{n(1)} \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo (I) y (II)

$$V_{n(1)}=\text{S/.}2800$$

$$V_{n(2)}=\text{S/.}5600$$

$\therefore$ S/.2800

Clave **D**

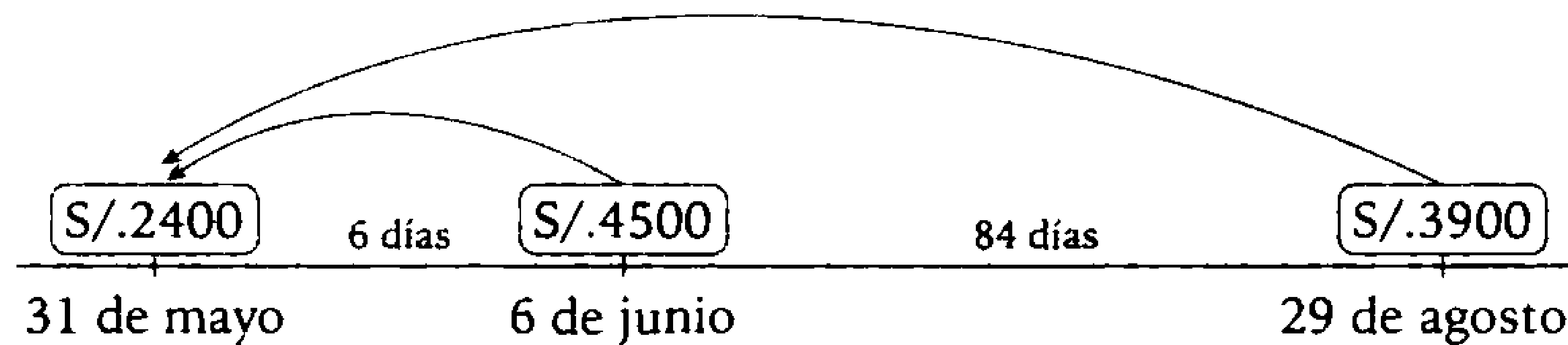
PROBLEMA N.° 86

El día de hoy, 2 de marzo del 2005, se firman tres pagarés: el primero de S/.2400, a pagarse el 31 de mayo; el segundo, de S/.4500, a pagarse el 6 de junio, y el tercero, de S/.3900, a pagarse el 29 de agosto. Si se quiere reemplazar estos tres pagarés por uno solo, ¿cuál será la fecha de vencimiento de dicho pagaré que tiene un valor de S/.10 800?

A) 05 de julio B) 17 de octubre
C) 16 de junio
D) 15 de junio E) 15 de julio

Resolución

Se observa que es un caso de vencimiento común, ya que los tres pagarés se reemplazan por uno solo, cuyo valor nominal es la suma de los valores nominales de los pagarés a reemplazar, y como no se indica, se asume que todos son descontados a la misma tasa.
Luego



Suponiendo que dichas letras se reemplazan el 31 de mayo, se tiene

V_n(S/.):	2400	4500	3900
t_v(días):	0	6	90

Calculando el tiempo de vencimiento común (t_{vc})

$$t_{vc}=\frac{2400\cdot 0+4500\cdot 6+3900\cdot 90}{2400+4500+3900}=35$$

Luego, hallamos la fecha de vencimiento

junio	julio
30	5

Por lo tanto, la fecha de vencimiento de dicho pagaré será el 5 de julio.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 87

Se presentan al banco dos letras: una de S/.1990 y la otra de S/.1970. El banco paga la misma suma por cada una de ellas, descontada la primera por 90 días al 6% y la segunda a la misma tasa. ¿Cuántos días faltarán para el vencimiento de esta última letra?

A) 30 días B) 10 días C) 60 días D) 70 días E) 50 días

Resolución

Si el banco paga la misma suma, sus valores actuales son iguales.

Sea:

$$\underbrace{\begin{matrix} V_{n(1)}=1990 \\ 90 \text{ días} \\ 6\% \text{ anual} \end{matrix}}_{V_{a(1)}} \quad = \quad \underbrace{\begin{matrix} V_{n(2)}=1970 \\ t \text{ días} \\ 6\% \text{ anual} \end{matrix}}_{V_{a(2)}}$$

$$V_{n(1)}-D_{c(1)} = V_{n(2)}-D_{c(2)}$$

$$1990-\left(1990\cdot\frac{6\%}{360}\cdot 90\right)=1970-1990\cdot\frac{6\%}{360}\cdot t$$

Resolviendo

$t=30$ días

Por lo tanto, la última letra vence en 30 días.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 88

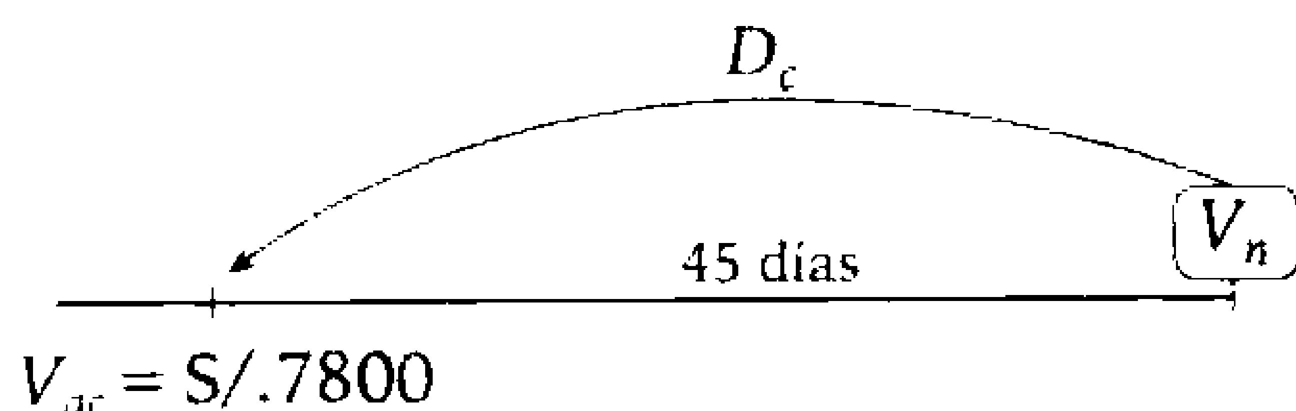
Una persona debe pagar hoy S/.50 000, pero solo abona S/.42 200 en efectivo y gira una letra a 45 días con una tasa de descuento del 20%. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/.8000 B) S/.8620 C) S/.8800
D) S/.9100 E) S/.9200

Resolución

Hoy debe pagar S/.50 000, pero solo paga S/.42 200, entonces debe S/.7800.

Tasa de descuento=20% anual



Sabemos que

$$\boxed{V_{ac}=V_n-D_c}$$

$$7800=V_n-45\cdot\left(\frac{20\%\cdot V_n}{360}\right)$$

$\therefore\ V_n$=S/.8000

Clave **A**

PROBLEMA N.° 89

Indique a qué tasa de descuento se fijó una letra, si faltando 15 meses para su vencimiento, la relación entre la diferencia de los descuentos y la suma de sus valores actuales es de 9 a 23.

A) 20% B) 25% C) 40%
D) 48% E) 60%

Resolución

Para una misma letra, se cumple:

- Despejando D_c-D_r

  Sabemos

  $$D_c=V_n\cdot r\%\cdot t$$

  $$D_r=\frac{V_n\cdot r\%\cdot t}{1+r\%\cdot t}$$

  entonces, se obtiene

  $$D_c-D_r=\frac{V_n\cdot(r\%\cdot t)^2}{1+r\%\cdot t} \qquad \text{(I)}$$

- Despejando $V_{ac}-V_{ar}$

  Sabemos

  $$V_{ac}=V_n(1-r\%\cdot t)$$

  $$V_{ar}=\frac{V_n}{1+r\%\cdot t}$$

  entonces, se obtiene

  $$V_{ac}+V_{ar}=\frac{V_n\left(2-(r\%\cdot t)^2\right)}{1+r\%\cdot t} \qquad \text{(II)}$$

Por dato:

- $t=15$ meses <> $\left(\frac{15}{12}\right)$ año
- $\frac{D_c - D_r}{V_{ac} + V_{ar}} = \frac{9}{23}$

De (I) y (II)

$$\frac{\left(\frac{V_n(r\% \cdot t)^2}{1+r\% \cdot t}\right)}{\left(\frac{V_n\left(2-(r\% \cdot t)^2\right)}{1+r\% \cdot t}\right)} = \frac{9}{23}$$

$$r\% \cdot t = \frac{3}{4}$$

$$\frac{r}{100} \cdot \frac{15}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \ r=60$$

Por lo tanto, la tasa es 60%.

Clave **E**

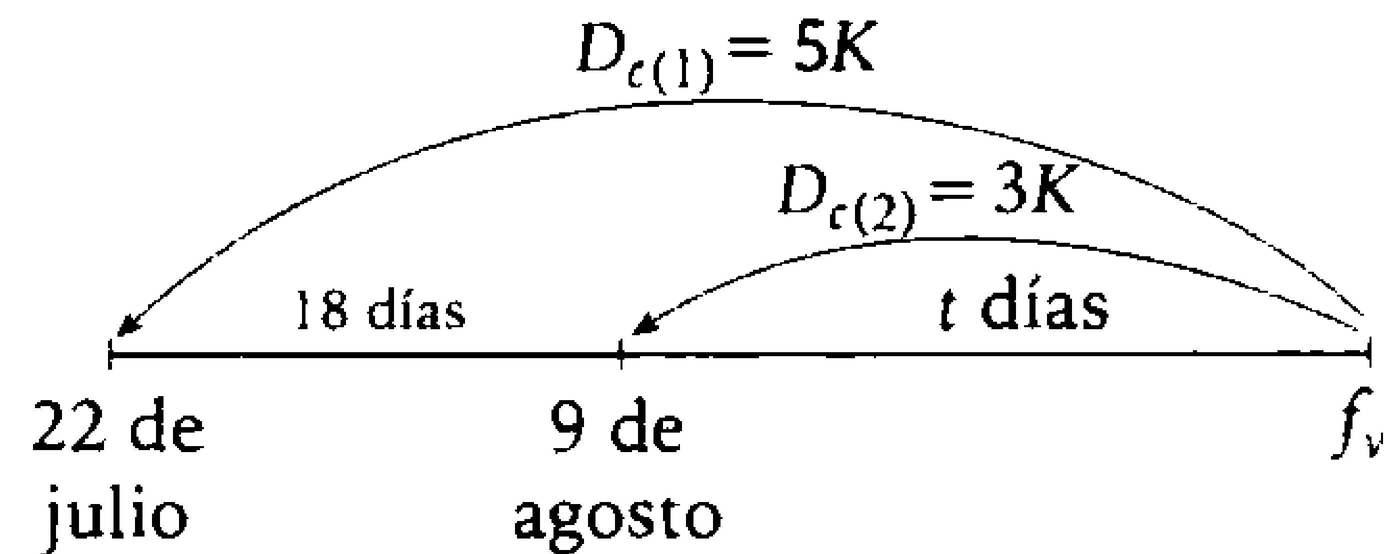
PROBLEMA N.° 90

Calcule la fecha de vencimiento de una letra que si es descontada comercialmente el 22 de julio o el 9 de agosto, sus descuentos son entre sí como 5 es a 3.

A) 3 de septiembre
B) 4 de septiembre
C) 5 de septiembre
D) 6 de septiembre
E) 7 de septiembre

Resolución

Sabemos que: D_c DP t_v



Entonces

$$\frac{5K}{18+t} = \frac{3K}{t}$$

$$t=27$$

Luego, hallamos la fecha de vencimiento (f_v)

agosto	septiembre
22	5

Por lo tanto, la fecha de vencimiento es el 5 de septiembre.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 91

Determine cuál es el valor nominal de una letra, si faltan nueve meses para su vencimiento y es descontada al 8% anual. Se sabe, además, que si es descontada comercialmente y matemáticamente, ambos descuentos se diferencian en S/.81.

A) S/.14 000
B) S/.24 550
C) S/.17 570
D) S/.27 230
E) S/.23 850

Resolución

De los datos:

$D_c - D_r = 81$ (I)

$r\% = 8\%$ anual

$t = 9$ meses <> $\frac{9}{12}$ años

Propiedad

$$\underbrace{D_c - D_r} = D_r \cdot r\% \cdot t$$

$$81 \quad = D_r \cdot 8\% \cdot \frac{9}{12}$$

$\rightarrow$ $D_r = 1350$

En (I)

$D_c - 1350 = 81 \rightarrow D_c = 1431$

Propiedad

$$V_n = \frac{D_c \cdot D_r}{D_c - D_r}$$

Reemplazando los descuentos

$$V_n = \frac{1431 \cdot 1350}{81}$$

$\therefore$ $V_n = S/.23\ 850$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 92

La diferencia de los descuentos aplicables a una letra es $\overline{aa}_{(9)}$. Si el valor nominal es a veces el descuento abusivo y la suma de los valores actuales es S/.6790, calcule el valor nominal.

A) S/.3920 B) S/.3720

C) S/.3800

D) S/.3728 E) S/.5760

Resolución

Tenemos

- $D_c - D_r = \overline{aa}_{(9)} = 10 \cdot a$ (I)
- $V_n = a \cdot D_c = a \cdot V_n \cdot t \cdot r\%$

$\rightarrow$ $t \cdot r\% = \frac{1}{a}$

Sabemos que

$$\frac{D_c}{D_r} = 1 + t \cdot r\%$$

Entonces

$$\left.\frac{D_c}{D_r} = \frac{a+1}{a}\right\} \begin{array}{l} D_c = (a+1)K \\ D_r = aK \end{array}$$

Reemplazando en (I)

$(a+1)K - aK = 10 \cdot a$

$K = 10 \cdot a$

Como

$$V_n = \frac{D_c \cdot D_r}{D_c - D_r}$$

$$V_n = \frac{(a+1)K \cdot aK}{K}$$

$\rightarrow$ $V_n = 10 \cdot a^2 \cdot (a+1)$ (II)

Además

$V_{ac} + V_{ar} = 6790$

$(V_n - D_c) + (V_n - D_r) = 6790$

$2 \cdot V_n - (D_c + D_r) = 6790$

$2 \cdot [10 \cdot a^2 \cdot (a+1)] - [(a+1) \cdot 10 \cdot a + a \cdot 10 \cdot a] = 6790$

$a(2a^2 - 1) = 679 = 7 \cdot 97$

Reemplazando en (II)

$\therefore$ $V_n = S/.3920$

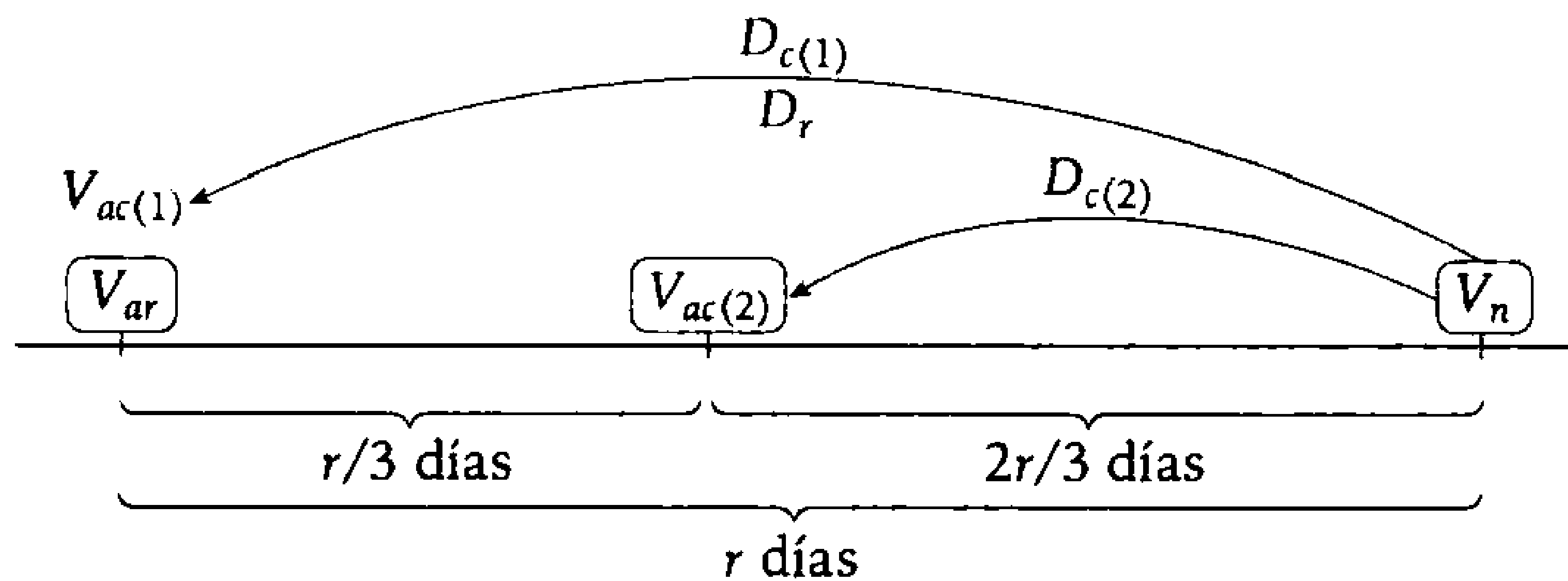
Clave **A**

PROBLEMA N.° 93

Se sabe que la suma del valor actual racional y el descuento racional es a la suma del valor nominal y el descuento comercial como 11 es a 14. Si dicha letra vence dentro de r días, calcule el valor nominal. Considere que la suma de 14 veces el V_{ar} y el valor actual comercial dentro de $(r/3)$ días es S/.13 000.

A) S/.858 B) S/.976 C) S/.990 D) S/.1100 E) S/.1210

Resolución



Por dato:

- $14V_{ar}+V_{ac(2)}=13\,000$ (I)

- $\dfrac{\overset{V_n}{V_{ar}+D_r}}{V_n+D_{c(1)}}=\dfrac{11}{14}$

$14\times V_n=11\times V_n+11\times D_{c(1)}$

$3\times V_n=11\times D_{c(1)} \rightarrow \dfrac{V_n}{D_{c(1)}}=\dfrac{11}{3}$

Entonces

$V_n=11K;\ D_{c(1)}=3K$

Por propiedad

$$V_n=\frac{D_c\cdot D_r}{D_c-D_r}$$

Reemplazando

$$11K=\frac{3K\cdot D_r}{3K-D_r}$$

Se obtiene: $D_r=\dfrac{33K}{14}$

- $V_{ar}=V_n-D_r$

$V_{ar}=11K-\dfrac{33K}{14}$

$14V_{ar}=121K$ (II)

Como D_c DP t $\rightarrow \dfrac{D_c}{t}=\text{cte.}$

$$\frac{D_{c(1)}}{r}=\frac{D_{c(2)}}{\left(\frac{2r}{3}\right)}$$

$$D_{c(2)}=\frac{2}{3}D_{c(1)}$$

$\dfrac{D_{c(2)}}{D_{c(1)}}=\dfrac{2}{3}$; como $D_{c(1)}=3K$

$\dfrac{D_{c(2)}}{3K}=\dfrac{2}{3} \rightarrow D_{c(2)}=2K$

- $V_{ac(2)}=V_n-D_{c(2)}$

$V_{ac(2)}=11K-2K$

$V_{ac(2)}=9K$ (III)

En (I) reemplazamos (II) y (III)

$$\underbrace{14V_{ar}} + \underbrace{V_{ac(2)}} = 13\,000$$

$$121K+9K=13\,000$$

$$K=100$$

Entonces

$$V_n=11\times K$$

$$V_n=11\times 100$$

$$\therefore\ V_n=1100$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 94

Un comerciante decide cambiar dos letras, cuyos valores nominales son S/.3000 y S/.5000, que vencen a los 50 y 60 días y a una tasa de 0,2% diario y 0,4% diario, respectivamente, por una única letra que vence dentro de 70 días a una tasa del 0,5% diario. Determine el valor de la única letra.

A) S/.15 000 B) S/.15 500 C) S/.12 800
D) S/.10 000 E) S/.15 800

Resolución

Sea

V_n(S/.):	3000	5000	N
t_v(días):	50	60	70
r%(diaria):	0,2%	0,4%	0,5%

Se cumple: (Suma de valores actuales de las letras reemplazadas) = (Valor actual de la letra única)

Además

$$V_{ac}=V_n-D_c$$

Entonces

$$3000-50\times 0{,}2\%\times 3000)+(5000-60\times 0{,}4\%\times 5000)=N-70\times 0{,}5\%\times N$$

$$6500=65\%N \ \rightarrow\ N=10\,000$$

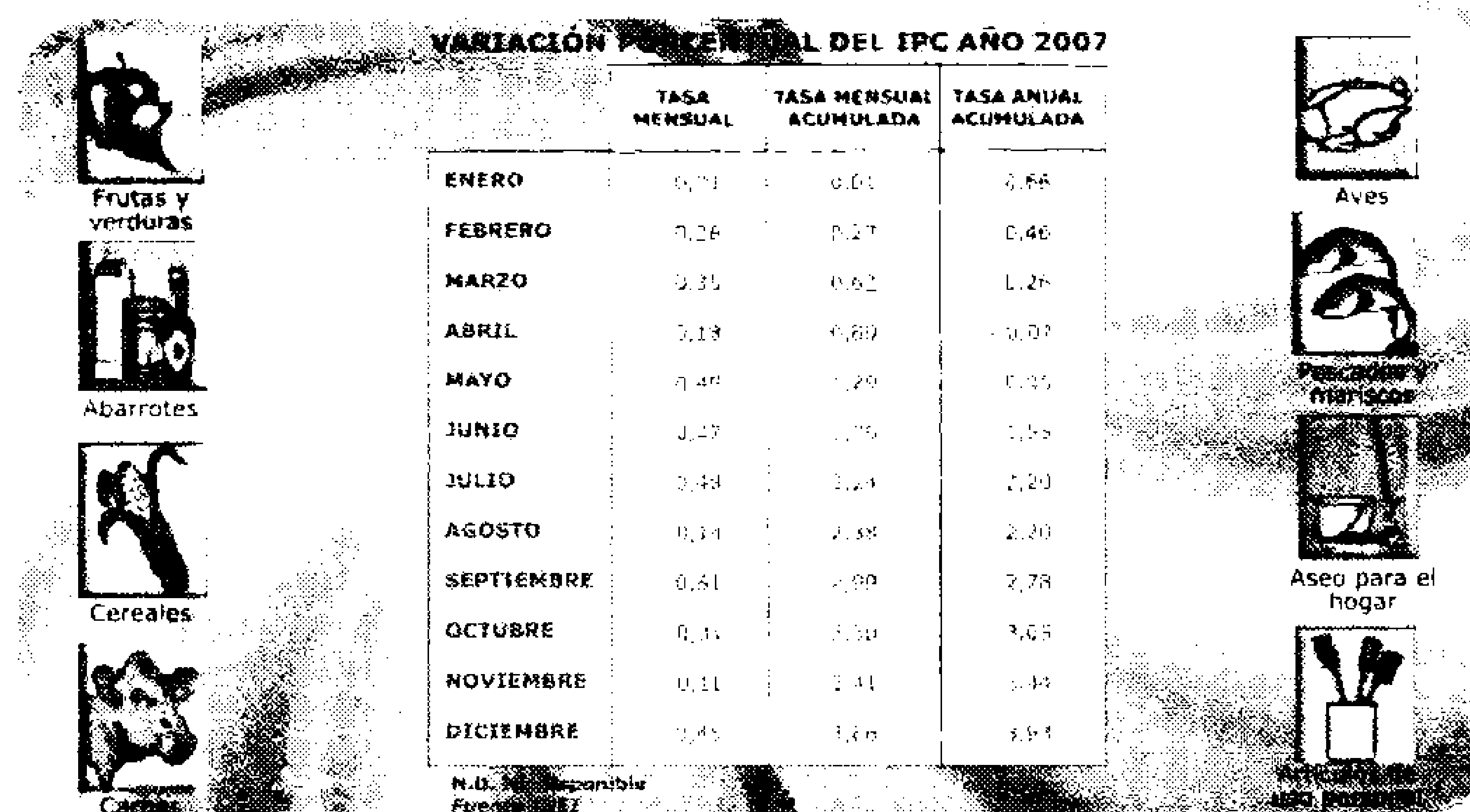
Por lo tanto, el valor de la letra única es S/.10 000

Clave **D**

Capítulo

16

Promedios



VARIACIÓN PORCENTUAL DEL IPC AÑO 2007

	TASA MENSUAL	TASA MENSUAL ACUMULADA	TASA ANUAL ACUMULADA
ENERO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
FEBRERO	0,26	[illegible]	0,46
MARZO	0,35	0,62	1,26
ABRIL	[illegible]	[illegible]	[illegible]
MAYO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
JUNIO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
JULIO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
AGOSTO	[illegible]	[illegible]	[illegible]
SEPTIEMBRE	0,61	[illegible]	2,78
OCTUBRE	[illegible]	[illegible]	[illegible]
NOVIEMBRE	0,11	[illegible]	[illegible]
DICIEMBRE	[illegible]	[illegible]	[illegible]

N.D. [illegible] disponible

Para describir grupos de observaciones, con frecuencia es conveniente resumir la información con un solo número. Este número que, para tal fin, suele situarse hacia el centro de la distribución de datos se denomina **medida** o **parámetro de tendencia central**.

Entre las medidas de tendencia central tenemos: la media aritmética, la media geométrica y la media armónica; de estas, la **media aritmética** es, probablemente, una de las más utilizadas. Se le llama también **promedio** o, simplemente, **media**.

Esta medida de tendencia central, aun teniendo múltiples propiedades que aconsejan su uso en situaciones muy diversas, tiene el inconveniente de que se ve afectada por valores extremos; valores muy altos tienden a aumentarla mientras que valores muy bajos tienden a bajarla, lo que implica que puede dejar de ser representativa de la población.

Capítulo 16

Promedios

PROBLEMA N.° 1

La $\overline{MH}$ de tres números enteros es 72/11. Su $\overline{MA}$ es 8 y su $\overline{MG}$ es igual a uno de los números pero multiplicado por la raíz cúbica de 6. Calcule el mayor de los números.

A) 12
B) 13
C) 15
D) 17
E) 18

Resolución

Sean los tres números a, b y c.

- $\overline{MA}=\dfrac{a+b+c}{3}=8$

  $\rightarrow\ a+b+c=24$ (I)

- $\overline{MG}=\sqrt[3]{abc}=a\sqrt[3]{6}$

  $\rightarrow\ b\cdot c=a^2\cdot 6$ (II)

- $\overline{MH}=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\dfrac{72}{11}$

  $$\frac{3abc}{ab+bc+ac}=\frac{72}{11}$$

De (II)

$bc=a^2\cdot 6$

$$\frac{3a\left(a^2\cdot 6\right)}{ab+a^2\cdot 6+ac}=\frac{72}{11}$$

Simplificando, tenemos

$$\frac{a^2}{\underbrace{a+b+c}_{24}+5a}=\frac{4}{11}$$

$\rightarrow\ a(11a-20)=4\times 24$

Resolviendo

$a=4$

En (I) : $b+c=20$
En (II): $b\times c=96$

$b \downarrow 12$, $c \downarrow 8$

Los números son 4; 8 y 12.

El mayor de los tres números es 12.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

La $\overline{MA}$ y $\overline{MH}$ de dos números están en la relación de 325 a 208. Halle el mayor de los dos números, si se sabe que la diferencia de ellos es 45.

A) 50
B) 60
C) 48
D) 75
E) 72

Resolución

Sean los números a y b, tenemos

$$\frac{\overline{MA}(a;b)}{\overline{MH}(a;b)}=\frac{325}{208}=\frac{25}{16}$$

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2\times a\times b}{a+b}}=\frac{25}{16}$$

Luego

$$\left.\frac{a+b}{\sqrt{a\times b}}=\frac{5}{2}\right\}a+b=5K;\ \sqrt{a\times b}=2K$$

$$\rightarrow\ \underset{4K\ \ K}{a+b}=5K;\quad \underset{4K\ \ K}{a\times b}=4K^2$$

Sabemos que

$a-b=45$

$3K=45$

$K=15$

$\rightarrow\ a=4K=60$

Por lo tanto, el mayor de los dos números es 60.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

La $\overline{MA}$ y la $\overline{MG}$ de tres números son entre sí como 7 es a 6; además, se sabe que el intermedio es 6 y es la $\overline{MG}$ de los otros dos. Calcule la $\overline{MH}$ de dichos números.

A) 31/7 B) 33/5 C) 35/3
D) 36/7 E) 39/5

Resolución

Sean los tres números a; 6 y b; $(a < 6 < b)$

Por dato:

- $\overline{MG}(a;b)=6$

  $\sqrt{ab}=6\ \rightarrow\ a\cdot b=36$ (I)

La $\overline{MG}$ de a; b y 6 es

$$\overline{MG}(a;b;6)=\sqrt[3]{\underbrace{a\cdot b}_{6^2}\cdot 6}$$

$\overline{MG}(a;b;6)=6$

- $$\frac{\overline{MA}(a;b;6)}{\underbrace{\overline{MG}(a;b;6)}_{6}}=\frac{7}{6}$$

$\overline{MA}(a;b;6)=7$

$$\frac{a+b+6}{3}=7\ \rightarrow\ a+b=15$$

$$\left.\begin{matrix}a+b=15\\ a\cdot b=36\end{matrix}\right\}\begin{matrix}b=12\\ a=3\end{matrix}$$

Por lo tanto, la $\overline{MH}$ de 3; 6; 12 es

$$\frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=\frac{36}{7}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Sean a, b y c números enteros positivos. Si las medias geométricas de a, b y c, al tomarlos de 2 en 2, son directamente proporcionales a 3; 4 y 5, respectivamente, determine el valor de la constante de proporcionalidad que hace que los números a, b y c sean los menores posibles.

A) 30 B) 60 C) 90
D) 100 E) 180

Resolución

Sean los números a; b; $c \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$\frac{\overline{MG}(a;b)}{3}=\frac{\overline{MG}(a;c)}{4}=\frac{\overline{MG}(b;c)}{5}=K$$

Para que los números a, b y c sean los menores posibles, K debe ser mínimo también

$$\frac{\sqrt{a\times b}}{3}=\frac{\sqrt{a\times c}}{4}=\frac{\sqrt{b\times c}}{5}=K$$

$$\frac{a\times b}{9}=\frac{a\times c}{16}=\frac{b\times c}{25}=K^2 \qquad \text{(I)}$$

Luego

$$\frac{a\times b}{a\times c}=\frac{9}{16} \rightarrow \frac{b}{c}=\frac{9}{16}\times\frac{25}{25}$$

$$\frac{a\times b}{b\times c}=\frac{9}{25} \rightarrow \frac{a}{c}=\frac{9}{25}\times\frac{16}{16}$$

$$\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{16}{25} \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{16}{25}\times\frac{9}{9}$$

Los menores posibles son

$a=9\times 16$; $b=9\times 25$; $c=16\times 25$

Reemplazando en (I)

$$\frac{a\times b}{9}=K^2$$

$$\frac{(9\times 16)(9\times 25)}{9}=K^2$$

$\therefore\ K_{\text{mínimo}}=4\times 3\times 5=60$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

El mayor promedio de dos números es 25 y su menor promedio es 16. Calcule el mayor de los números.

A) 45 B) 36 C) 40
D) 32 E) 35

Resolución

Sean los números a y b.

Sabemos

$$\underbrace{\overline{MA}(a;b)}_{\substack{\text{mayor}\\\text{promedio}}} \geq \overline{MG}(a;b) \geq \underbrace{\overline{MH}(a;b)}_{\substack{\text{menor}\\\text{promedio}}}$$

- $\overline{MA}(a;b)=25$

$$\frac{a+b}{2}=25$$

$$a+b=50 \qquad \text{(I)}$$

- $\overline{MH}(a;b)=16$

$$\frac{2ab}{a+b}=16, \quad a+b=50$$

$$a\cdot b=400 \qquad \text{(II)}$$

Tenemos de (I) y (II)

$a+b=50$

$a\times b=400$

Resolviendo, obtenemos los valores 40 y 10.

Por lo tanto, el mayor es 40.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

El promedio de cuatro números es 11 y, cuando se les agrupa de 3 en 3, dichos promedios aritméticos son números pares consecutivos. Calcule el menor de los cuatro números.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

Resolución

Sean los números a; b; c y d.

$\overline{MA}(a; b; c; d) = 11$

$\frac{a+b+c+d}{4} = 11$

$\rightarrow a+b+c+d = 44$

Por condición, n es par, tal que

$$\left.\begin{aligned}
\overline{MA}(a; b; c) &= \frac{a+b+c}{3} = n\\
\overline{MA}(a; b; d) &= \frac{a+b+d}{3} = n+2\\
\overline{MA}(a; c; d) &= \frac{a+c+d}{3} = n+4\\
\overline{MA}(b; c; d) &= \frac{b+c+d}{3} = n+6
\end{aligned}\right\}(+)$$

$$\frac{3(a+b+c+d)}{3} = 4n+12$$

$a+b+c+d = 4n+12 \rightarrow 44 = 4n+12$

$n = 8$

Por lo tanto, el menor de los cuatro números pares es 8.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

Si el promedio de n números es $3n$ y a cada uno de estos números se les adiciona 1; 3; 5; 7; ...; $(2n-1)$, respectivamente, halle el promedio de estos números resultantes.

A) $4n$ B) $4/3n$ C) $5/2n$
D) $5n$ E) $5/3n$

Resolución

$\overline{MA}_{\text{inicial}} = 3n$; aumentos: $\underbrace{1; 3; 5; 7; \ldots; (2n-1)}_{n \text{ números}}$

El nuevo promedio será

$$\begin{pmatrix}\text{Promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Promedio}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Promedio de}\\ \text{los aumentos}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix} = 3n + \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix} = 3n + \frac{n^2}{n}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix} = 4n$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

El promedio de un conjunto de números es P. Si se eliminan 31 números, cuya suma es 527, el promedio de los números restantes sigue siendo P. Calcule cuánto deberán sumar siete números para que, aun agregados a los anteriores, el promedio siga siendo P.

A) 110 B) 112 C) 115
D) 119 E) 120

Resolución

$$\text{Promedio} = \overline{MA} = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Cantidad de datos}}$$

Sea S la suma de los n números cuyo promedio es P y S_1 la suma de los siete números que se van a agregar, tenemos:

$$\frac{\overline{S}}{\overline{n}}=\frac{\overline{S}-527}{\overline{n}-31}=\frac{(\overline{S}-527)+S_1}{(\overline{n}-31)+7}=P$$

$$\frac{527}{31}=\frac{S_1}{7} \rightarrow S_1=119$$

Por lo tanto, los 7 números deben sumar 119.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

El promedio aritmético de n números es $3n/2$. Si se aumenta a dichos números 1; 2; 3; 4;..., respectivamente, halle el promedio aritmético de los números resultantes.

A) $2n+3$ B) $\frac{4n+3}{2}$ C) $3n^2+4n$

D) $\frac{4n+1}{2}$ E) $\frac{3n^2+1}{2}$

Resolución

- $\overline{MA}_{\text{inicial}}=\frac{3n}{2}$

- Aumentos: $\underbrace{1; 2; 3; 4; \ldots; n}_{n \text{ números}}$

$$\overline{MA}_{\text{final}}=\overline{MA}_{\text{inicial}}+\overline{MA}_{\text{aumentos}}$$

$$\overline{MA}_{\text{final}}=\frac{3n}{2}+\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

$$\overline{MA}_{\text{final}}=\frac{3n}{2}+\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n}$$

$$\therefore\ \overline{MA}_{\text{final}}=\frac{4n+1}{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

En el colegio Bertolt Brecht, un profesor calculó el promedio de edades de los 18 alumnos asistentes a un aula del primer año. Pero luego llegan dos alumnos y, al preguntarles sus edades, ellos respondieron: *El producto de los tres promedios de nuestras edades es 1728 y uno de estos promedios es 11,52*. El profesor logró determinar dichas edades; además, observó que el nuevo promedio de edades de todos sus alumnos es el mismo que el inicial. Calcule la suma de edades de los alumnos que había inicialmente.

A) 240 años B) 225 años C) 220 años

D) 236 años E) 228 años

Resolución

- Sean a y b las edades de los dos alumnos que llegan, se tiene

$$\overline{MA}\times\overline{MG}\times\overline{MH}=1728$$

Sabemos que para dos números se cumple

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2} \quad \text{(I)}$$

$$\rightarrow \overline{MG}^3=1728$$

$$\overline{MG}=12$$

Además

$$\overline{MA}>\overline{MG}>\underset{11,52}{\underset{\downarrow}{\overline{MH}}}$$

Luego, en (I)

$$\overline{MA}\times(11,52)=(12)^2$$

$$\overline{MA}=12,5$$

$$\frac{a+b}{2}=12,5$$

$$\rightarrow a+b=25$$

- También se sabe que el nuevo promedio de edades de todos sus alumnos es el mismo que el inicial.

  Sea S la suma de las edades de los 18 alumnos que había inicialmente.

$$\frac{S}{18}=\frac{S+(a+b)}{20}=\frac{a+b}{2}=\frac{25}{2}$$

$$\rightarrow \quad S=225$$

Por lo tanto, la suma de las edades es 225 años.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

La media aritmética de 70 números es a y la de otros 30 es 45. Si a cada uno de los números del primer grupo se les agrega 20 y a los números del segundo grupo se les disminuye en 10, el promedio de los 100 números ahora es 52,5. Calcule a.

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50

Resolución

Observación

Si el promedio de n números es $\bar{a}$ y luego a cada número le aumento x, el nuevo promedio de los n números es $\bar{a}+x$.

$\overline{MA}_{70\#}=a$

si a cada número le aumento 20

$\overline{MA}_{70\#}=a+20$

$\overline{MA}_{30\#}=45$

si a cada número le disminuyo 10

$\overline{MA}_{30\#}=45-10=35$

$$\overline{MA}_{100\#}=\frac{(a+20)\times 70+35\times(30)}{70+30}=52,5$$

Efectuando, $a=40$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

La $\overline{MA}$ de 30 números es N. Si a los 10 primeros números les aumentamos cinco unidades, al resto les disminuimos en una unidad y nuevamente calculamos la $\overline{MA}$, ¿qué es lo que sucede con dicho promedio?

A) No varía
B) Aumenta en 2
C) Aumenta en 1
D) Disminuye en 1
E) Disminuye en 2

Resolución

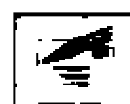
Recuerda

$$\begin{pmatrix}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{\text{aumento y/o disminución de los datos}}{\text{total de datos}}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{+5(10)-1(20)}{30}=+1$$

Por lo tanto, el promedio inicial aumenta en 1.

 **Nota**

Si la variación del promedio tiene signo (+) o (–), indica que el promedio inicial aumenta o disminuye, respectivamente.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

Indique si son verdaderos (V) o falsos (F) los siguientes enunciados:

I. El promedio aritmético de todos los números positivos de dos cifras es igual a 54,5.

II. El promedio geométrico de todos los números capicúas de dos cifras es igual a $9\sqrt{11}$.

III. Si para dos números enteros se tiene que $(\overline{MG})^2=5\overline{MH}$, entonces, la ecuación tiene cuatro soluciones de números diferentes.

A) VFV B) VVF C) VVV
D) FFV E) FVF

Resolución

I. **Verdadero**

Números de dos cifras

$$\underbrace{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ \ldots;\ 99}_{\text{por ser progresión aritmética}} \quad \text{(90 números)}$$

$$\overline{MA}_{90\#}=\frac{10+99}{2}=54{,}5$$

II. **Falso**

Números capicúas de dos cifras

$$\underbrace{11;\ 22;\ 33;\ 44;\ \ldots;\ 99}_{\text{9 números}}$$

$$\overline{MG}=\sqrt[9]{11\cdot 22\cdot 33\cdot 44\cdot\ldots\cdot 99}$$

$$\downarrow \quad 11\cdot 1 \quad 11\cdot 2 \quad 11\cdot 3 \quad 11\cdot 4 \quad 11\cdot 9$$

$$\overline{MG}=\sqrt[9]{11^9\cdot\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 9}_{9!}}$$

$$\overline{MG}=11\cdot\sqrt[9]{9!}$$

III. **Verdadero**

Sean los números a y b.

$$\overline{MG}^2=5\overline{MH}$$

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2=5\cdot\frac{2ab}{a+b}$$

Se obtiene

$$a+b=10$$

a	b	
1	9	4 soluciones de números diferentes
2	8	
3	7	
4	6	

Por lo tanto, la respuesta es VFV.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

Si la $\overline{MH}$ de la sucesión

6; 66; 176; 336; ...; $\overline{abcd}$

es 51, calcule la $\overline{MG}(\overline{ba};\ \overline{dc};\ a)$.

A) 8
B) 64
C) 27
D) 9
E) 16

Resolución

En primer lugar, encontremos la forma general de los términos de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccccc} t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & ;\ldots; & t_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 6 & ; & 66 & ; & 176 & ; & 336 & ;\ldots; & \overline{abcd} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{1}\times 6 & & \underline{6}\times 11 & & \underline{11}\times 16 & & \underline{16}\times 21 & & \boxed{\underline{(5n-4)}\times(5n+1)} \end{array}$$

Observa que los factores que conforman cada término se diferencian en 5 unidades y que los primeros están en progresión aritmética de razón 5.
Entonces, el primer factor del t_n es

$$1+(n-1)5=5n-4$$

Además, sabemos que la $\overline{MH}$ de los n términos es 51, entonces:

$$\frac{n}{\underbrace{\frac{1}{1\times 6}+\frac{1}{6\times 11}+\frac{1}{11\times 16}+\frac{1}{16\times 21}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}}_{S}}=51 \qquad \text{(I)}$$

Hallemos el valor de S

$$S=\frac{1}{5}\times\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{21}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{5}\times\left[1-\frac{1}{5n+1}\right]=\frac{n}{5n+1}$$

Reemplazando en (I) tenemos

$$\frac{n}{\frac{n}{5n+1}}=51 \rightarrow 5n+1=51$$

Luego

$$\overline{abcd}=(5n-4)(5n+1)=46\times 51=2346$$

De donde:

$$\overline{ba}=32;\ \overline{dc}=64;\ a=2$$

Piden la $\overline{MG}(\overline{ba};\ \overline{dc};\ a)$

$$\therefore\ \overline{MG}(\overline{ba};\overline{dc};a)=\overline{MG}(32;64;2)=\sqrt[3]{32\times 64\times 2}=16$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 15

La media armónica de un grupo de enteros consecutivos es p. A cada uno de estos se le multiplica por su consecutivo, nuevamente se calcula su promedio armónico y se obtiene q. Halle la media armónica de los consecutivos de cada uno de los enteros del grupo anteriormente mencionado.

A) $\dfrac{pq}{q-p}$ B) $\dfrac{pq}{p-q}$ C) $\dfrac{p-q}{pq}$ D) $\dfrac{p+q}{pq}$ E) $\dfrac{2pq}{p+q}$

Resolución

	(I) 1.^{er} grupo	(II) 2.^{o} grupo	(III) 3.^{er} grupo
$(n+1)$ números	a	$a+1$	$a\times(a+1)$
	$a+1$	$a+2$	$(a+1)(a+2)$
	$a+2$	$a+3$	$(a+2)(a+3)$
	$a+3$	$a+4$	$(a+3)(a+4)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$a+n$	$a+n+1$	$(a+n)(a+n+1)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\overline{MH}=p$	$\overline{MH}=x$	$\overline{MH}=q$

De (I)

$$\overline{MH}=\frac{n+1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n}}=p \;\rightarrow\; \frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n}=\frac{n+1}{p} \qquad (\alpha)$$

De (II)

$$\overline{MH}=\frac{n+1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\ldots+\frac{1}{a+n+1}}=x \;\rightarrow\; \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\ldots+\frac{1}{a+n+1}=\frac{n+1}{x} \qquad (\beta)$$

De (III)

$$\overline{MH}=\frac{n+1}{\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}}=q$$

$$\rightarrow\; \underbrace{\frac{1}{a(a+1)}}_{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}}+\underbrace{\frac{1}{(a+1)(a+2)}}_{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}}_{\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}}=\frac{n+1}{q}$$

Cada fracción se descompone como una diferencia

Agrupamos $\underbrace{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n}\right)}_{(\alpha)}-\underbrace{\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n+1}\right)}_{(\beta)}=\frac{n+1}{q}$

$$\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{x}=\frac{n+1}{q} \rightarrow \frac{1}{p}-\frac{1}{x}=\frac{1}{q} \qquad \therefore\ x=\frac{pq}{q-p}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

Si la $\overline{MH}$ (2; 6; 12; 20; ...) es 50, halle la $\overline{MA}$ de dichos números.

A) 120 B) 180 C) 280 D) 420 E) 850

Resolución

Recuerda

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

- Se tiene $\overline{MH}(2;\ 6;\ 12;\ 20;\ \ldots)=50$

  Sea n el total de datos, analizamos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & ; & 6 & ; & 12 & ; & 20 & ; & \ldots & ; & t_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 1\times2 & ; & 2\times3 & ; & 3\times4 & ; & 4\times5 & ; & \ldots & ; & n\times(n+1) \end{array}$$

Luego

$$\overline{MH}=\frac{n}{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{n}{\frac{n}{n+1}}=50$$

$\rightarrow n+1=50$

- Piden $\overline{MA}(2;\ 6;\ 12;\ 20;\ \ldots)$

$$\overline{MA}=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+n\times(n+1)}{n}=\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{n}$$

$$\overline{MA}=\frac{(n+1)(n+2)}{3}=\frac{50\times51}{3}$$

$\therefore\ \overline{MA}(2;\ 6;\ 12;\ 20;\ \ldots)=850$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 17

La $\overline{MH}$ de 50 números es 13 y la $\overline{MH}$ de otros 30 números es 26. Halle la $\overline{MH}$ de todos los números y dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 7 B) 16 C) 13
D) 11 E) 9

Resolución

Datos:

- La $\overline{MH}$ de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50}$ (50 números)

$$\overline{MH}=\frac{50}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{50}}}=13$$

$$\rightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{50}}=\frac{50}{13}$$

- La $\overline{MH}$ de $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{30}$ (30 números)

$$\overline{MH}=\frac{30}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_{30}}}=26$$

$$\rightarrow \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots+\frac{1}{b_{30}}=\frac{15}{13}$$

La $\overline{MH}$ de los 80 números es

$$\overline{MH}=\frac{80}{\underbrace{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{50}}}_{\frac{50}{13}}+\underbrace{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_{30}}}_{\frac{15}{13}}}$$

$$\overline{MH}=\frac{80}{\frac{50}{13}+\frac{15}{13}}$$

$$\overline{MH}=16$$

Por lo tanto, la suma de cifras es $1+6=7$.

Clave A

PROBLEMA N.° 18

Un camión recorre todas las semanas 120 km y cierto día tuvo que utilizar dos llantas de repuesto. Pero si se hubieran malogrado dos llantas más, entonces, el recorrido semanal promedio por llanta sería 16 km menos que en el caso anterior. Halle el número de llantas con que se desplaza el camión.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14

Resolución

Observe que el camión recorre todas las semanas 120 km y, si emplea normalmente n llantas para su desplazamiento, entonces, el recorrido total de las llantas será $120\times n$ km. Sin embargo, lo que sí puede cambiar es el total de llantas utilizadas para recorrer los $120\times n$ km.

Ahora

$$\left(\begin{array}{c}\text{Recorrido semanal}\\ \text{promedio por llanta}\end{array}\right)=\frac{\left(\begin{array}{c}\text{recorrido total}\\ \text{de las llantas}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{total de llantas}\\ \text{utilizadas}\end{array}\right)}$$

$$\underbrace{\text{con 2 llantas adicionales}}\qquad\underbrace{\text{con 4 llantas adicionales}}$$

$$\left(\frac{120\times n}{n+2}\right)-\left(\frac{120\times n}{n+4}\right)=16$$

$$\rightarrow n=8$$

Por lo tanto, el número de llantas con que se desplaza el camión es 8.

Clave B

PROBLEMA N.° 19

A una fiesta asistieron n personas. El promedio de las edades de los varones que bailan es p y la relación entre la suma de las edades de los varones que bailan y mujeres que bailan es de 3 a 2. Calcule el promedio de las edades de los hombres y mujeres que no bailan, si se sabe que este grupo representa el 40% del total y la edad promedio de todos los integrantes es Q.

A) $\dfrac{3Q-5p}{8}$ B) $\dfrac{10Q-5p}{4}$ C) $\dfrac{10Q+5p}{4}$ D) $\dfrac{5Q-4p}{4}$ E) $\dfrac{10Q-7p}{4}$

Resolución

Respecto a la cantidad de personas tenemos:

	Varones	Mujeres	
Bailan	$30\%n$	$30\%n$	$60\%n$
No bailan			$40\%n$

	Varones que bailan	Mujeres que bailan	Varones y mujeres que no bailan	Total
Cantidad de personas	$30\%n$	$30\%n$	$40\%n$	n
$\overline{MA}$	p	a	$\bar{x}=?$	Q
Suma de las edades	$A=30\%np$	$B=30\%na$	$C=40\%n\bar{x}$	$D=nQ$

- Por dato: $\dfrac{30\%np}{3}=\dfrac{30\%na}{2} \rightarrow a=\dfrac{2}{3}p$

- Sumando las edades

$$A+B+C=D$$

$$30\%np+30\%n\cdot\left(\frac{2}{3}p\right)+40\%n\bar{x}=nQ$$

Despejando:

$$\bar{x}=\frac{10Q-5p}{4}$$

Por lo tanto, el promedio de las edades de los hombres y mujeres que no bailan es $\bar{x}=\dfrac{10Q-5p}{4}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

En una reunión hay N personas; el promedio de las edades de los que fuman es a años, de los que no fuman es b y el promedio de todas las personas es P. ¿Cuántas personas fuman?

A) $\frac{N(a+b)}{8}$ B) $\frac{N(b-P)}{b-a}$

C) $\frac{N(P-b)}{b-a}$

D) $\frac{N(b-P)}{a+b}$ E) $\frac{N(b+P)}{a-b}$

Resolución

Sabemos que

$$\overline{MA}=\frac{\text{suma de datos}}{\text{cantidad de datos}}$$

→ Suma de datos $=\overline{MA}\times$ [cantidad de datos]

Ordenamos los datos

	Fuman	No fuman	Total
Promedio	a	b	P
N.° de personas	x	$N-x$	N

$$S_{(\text{fuman})}+S_{(\text{no fuman})}=S_{(\text{total})}$$

$$ax+b(N-x)=P\times N$$

$$x=\frac{N(P-b)}{a-b}=\frac{N(b-P)}{b-a}$$

Por lo tanto, la cantidad de personas que fuman es $\frac{N(b-P)}{b-a}$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 21

En un aula de la Academia Aduni, un profesor observa que 14 de los alumnos tienen 13 años; otros 28 son de 15 años; y otros 22, de 14 años. Calcule la edad promedio de todos los presentes en el aula si el profesor tiene 26 años y contó a todos los alumnos.

A) 14,1 B) 14,4 C) 14,8
D) 15,2 E) 15,5

Resolución

De las edades sabemos:

Edad	N.° de personas
13	14
14	22
15	28
26	1
Total	65

La edad promedio es promedio ponderado

$$\overline{MA}=\frac{13\times14+14\times22+15\times28+26\times1}{14+22+28+1}$$

$$\overline{MA}=14{,}4$$

Por lo tanto, la edad promedio de todos los presentes en el aula es 14,4.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

El promedio aritmético de 18 números impares diferentes de dos cifras es 35 y el promedio aritmético de otros 12 números impares también de dos cifras es 65. Calcule el promedio aritmético de los números impares de dos cifras no considerados.

A) 49 B) 55 C) 61
D) 67 E) 71

Resolución

En primer lugar, hallamos la suma de todos los números impares de 2 cifras

$$S=\underbrace{11+13+15+\ldots+99}=\left(\frac{11+99}{2}\right)\times 45=2475$$

$$\frac{99-9}{2}=45 \text{ sumandos}$$

Luego

los no considerados son

Cantidad de números	18	12	15
Promedio	35	65	P

Sabemos que

Suma de datos=(promedio) (cantidad de datos)

$$S_{(18\#s)}+S_{(12\#s)}+S_{(15\#s)}=S$$

$$18\times 35+12\times 65+15\times P=2475$$

$\therefore\ P=71$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Si el promedio aritmético de 35 números pares consecutivos es 88, calcule el promedio aritmético de los 35 números pares siguientes.

A) 128 B) 158 C) 168
D) 188 E) 208

Resolución

En toda progresión aritmética:

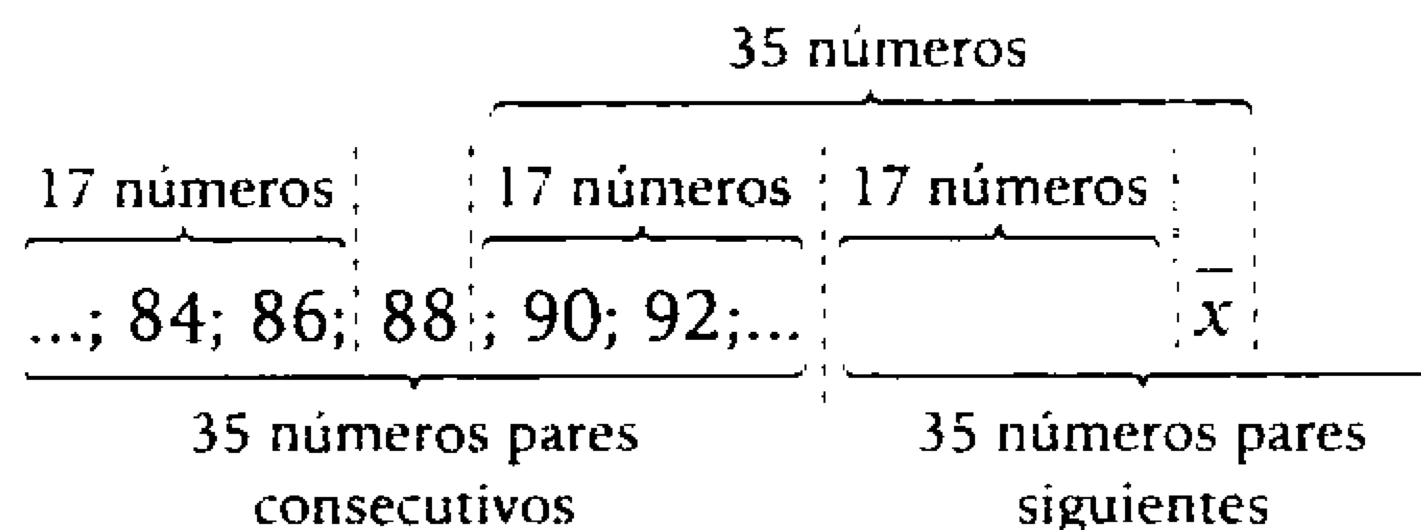
$$\underbrace{t_1;t_2;t_3;\ldots;t_n}$$

$$\overline{MA}_{\text{términos}}=\frac{(\text{N.° menor})+(\text{N.° mayor})}{2}$$

$$\overline{MA}_{\text{términos}}=\frac{t_1+t_n}{2}$$

Si n es impar: $t_{\text{central}}=\overline{MA}$

Dato:



$\overline{MA}=$ (88) → término central

$\overline{MA}=$ ($\bar{x}$) → término central

$$\rightarrow (88);\ \underbrace{90;\ 92;\ 94;\ \ldots;\ \bar{x}}$$

(de 2 en 2)

$17+17+1=35$ términos

$$\bar{x}=88+2\times 35$$

$\therefore\ \bar{x}=158$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

La edad promedio de los P alumnos de un aula de secundaria es t, la edad promedio de las mujeres es u y la edad promedio de los varones es v. Calcule el número de mujeres que había en el aula.

A) $\frac{P(t-v)}{u}$ B) $\frac{Pt+u}{v}$

C) $\frac{Pt-Pv}{v}$

D) $\frac{P(t-u)}{t-v}$ E) $\frac{Pt-vP}{u-v}$

Resolución

Ordenamos los datos:

	Mujeres	Varones	Total
Edad promedio	u	v	t
Cantidad de alumnos	x	$P-x$	P

Sabemos que

Suma de datos = (promedio) (cantidad de datos)

Luego

$$S_{(\text{mujeres})}+S_{(\text{varones})}=S_{(\text{total})}$$

$$u\cdot x+v\cdot(P-x)=t\cdot P$$

$$\therefore\ x=\frac{P(t-v)}{u-v}=\frac{Pt-vP}{u-v}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 25

Durante cuatro meses consecutivos, una madre de familia compró pan para el desayuno a los precios respectivos de 48; 100; 80 y 240 unidades monetarias. Si cada mes gastó 3600 unidades monetarias en la compra de pan, calcule el costo promedio del pan para estos cuatro meses, aproximadamente.

A) 72,8 B) 85,4 C) 87,1 D) 84,2 E) 99,2

Resolución

Gasta al mes	3600	3600	3600	3600
Costo de cada pan	48	100	80	240
Número de panes	$\frac{3600}{48}$	$\frac{3600}{100}$	$\frac{3600}{80}$	$\frac{3600}{240}$

Observación

Por ser el mismo gasto por mes, el costo promedio es la $\overline{MH}$ de 48, 100, 80 y 240.

En estos cuatro meses

$$\begin{pmatrix}\text{El costo promedio}\\ \text{del pan}\end{pmatrix}=\frac{\text{costo total}}{\text{cantidad total de panes}}=\frac{3600+3600+3600+3600}{\frac{3600}{48}+\frac{3600}{100}+\frac{3600}{80}+\frac{3600}{240}}=84{,}21...$$

Por lo tanto, el costo promedio del pan para estos cuadros meses es 84,2.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 26

Para los números $\overline{2a}$; $\overline{1b}$ y 4, su promedio geométrico es uno de ellos. Halle $a+b$.

A) 5 B) 7 C) 8
D) 10 E) 11

Resolución

Para los números $\overline{2a}$; $\overline{1b}$ y 4, se cumple

$4 <$ promedio $< \overline{2a}$

Luego

$\overline{MG}(\overline{2a};\ \overline{1b};\ 4)=\overline{1b}$

$\sqrt[3]{\overline{2a}\times\overline{1b}\times 4}=\overline{1b}$

$\overline{2a}\times\overline{1b}\times 4=\overline{1b}^3$

$\overline{2a}\times 4=\overline{1b}^2$

Entonces

$a=5$ y $b=0$

Por lo tanto, $a+b=5$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

La $\overline{MA}$ y la $\overline{MH}$ de dos números enteros positivos están en la relación de 25 a 16. Si su $\overline{MG}$ es 12, halle su diferencia.

A) 15
B) 16
C) 17
D) 18
E) 19

Resolución

Para a y b:

$$\frac{\overline{MA}(a;b)}{\overline{MH}(a;b)}=\frac{25}{16}$$

$\rightarrow\ \overline{MA}=25K$

$\overline{MH}=16K$

Por dato:

$\overline{MG}=12$

Reemplazamos en la propiedad:

$\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2$

$25K\cdot 16K=12^2$

$$K=\frac{3}{5}\ \rightarrow\ MA=25\left(\frac{3}{5}\right)=15$$

Para calcular $(a-b)$, utilizamos la propiedad:

$$(a-b)^2=4(\overline{MA}+\overline{MG})\cdot(\overline{MA}-\overline{MG})$$

$$(a-b)^2=4(15+12)\cdot(15-12)$$

$$(a-b)^2=4\cdot 27\cdot 3$$

$\therefore\ a-b=18$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

Si se sabe que la $\overline{MH}$ de tres pares consecutivos es 11,775..., halle la suma de cifras del mayor de los números.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 6

Resolución

Sean los tres pares consecutivos $(a-2)$, a y $(a+2)$, tenemos que:

$$\overline{MA}(a-2; a; a+2) = \frac{(a-2)+a+(a+2)}{3} = a$$

Además, sabemos que:

- $\overline{MH} < \overline{MA}$
- Promedio > (menor dato)

De lo anterior:

$$a-2 < \overline{MH} < a$$
$$\downarrow$$
$$11{,}775...$$

$\rightarrow a=12$

Piden la suma de cifras del número mayor

$a+2=14;\ 1+4=5$

Por lo tanto, la suma de las cifras del número mayor es 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 29

La diferencia de dos números enteros es 36. Si la suma de la media aritmética y la media geométrica es 162, halle la $\overline{MA}$ de dichos números.

A) 48 B) 85 C) 82
D) 120 E) 162

Resolución

Datos:

- $a-b=36$
- $\overline{MA}(a; b)+\overline{MG}(a; b)=162$ (I)

Propiedad para dos números

$$(a-b)^2 = 4\underbrace{(\overline{MA}+\overline{MG})}(\overline{MA}-\overline{MG})$$

$$36^2 = 4\times\ 162\ \times(\overline{MA}-\overline{MG})$$

$$\overline{MA}-\overline{MG}=2$$

Tenemos

$$\overline{MA}+\overline{MG}=162$$
$$\overline{MA}-\overline{MG}=2$$

Resolviendo

$$\overline{MA}=82$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Si la relación entre la $\overline{MH}$ y el cuadrado de la $\overline{MG}$ de dos números enteros es de 2/9, ¿cuántos pares de números cumplen dicha condición?

A) 4 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución

Sean los números a y $b \in \mathbb{Z}^+$, tales que

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{MG}^2} = \frac{2}{9}$$

Por propiedad, para 2 números se cumple

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2}$$

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}\times\overline{MH}} = \frac{2}{9}$$

$$\overline{MA} = \frac{9}{2}$$

$$\overline{MA}_{(a,\,b)} = \frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}$$

Entonces

$a+b=9$

$\downarrow \quad \downarrow$

1 8

2 7

3 6

4 5

Por lo tanto, 4 pares de números cumplen dicha condición.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 31

La razón aritmética entre la media aritmética y la media armónica de dos números es 4. Si la diferencia de dichos números es 16, determine la media geométrica de dichos números.

A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{7}$

Resolución

Sean los números a y b

- $a-b=16$
- $\overline{MA}(a;\, b)-\overline{MH}(a;\, b)=4$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=4$$

$$\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=4$$

$$\underbrace{(a-b)}_{16}{}^2=8(a+b)$$

$$a+b=32$$

Tenemos

$$\left.\begin{aligned} a-b&=16\\ a+b&=32 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo

$a=24$

$b=8 \rightarrow \overline{MG}=\sqrt{24\times 8}$

$\therefore\ \overline{MG}=8\sqrt{3}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

Sean a y b dos números enteros. Si el producto de la media aritmética con su media armónica es igual al séxtuplo de su media geométrica, entonces, el menor valor positivo de $(a+b)$ es

A) 12 B) 13 C) 15

D) 20 E) 37

Resolución

Sean a y b dos números enteros

$\overline{MA}\times\overline{MH}=6\times\overline{MG}$

Por propiedad, para dos números se cumple

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2}$$

Entonces

$6\times\overline{MG}=\overline{MG}^2 \rightarrow \overline{MG}=6$

$\overline{MG}_{(a,\,b)}=\sqrt{a\times b}=6$

Luego

$a\times b=6^2=36$

$\downarrow \quad \downarrow$

1 36

2 18

3 12

4 9

6 6

Por lo tanto, el menor valor positivo de $(a+b)$ es 12.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Calcule la suma de dos números naturales, de los que su media aritmética y su media armónica están en la relación de 25 a 9. Considere que la semisuma de dichas medias excede a la media geométrica en 18.

A) 90 B) 306 C) 220
D) 450 E) 150

Resolución

- $\dfrac{\overline{MA}(a;b)}{\overline{MH}(a;b)}=\dfrac{25}{9}$

> **Propiedad**
>
> $\overline{MA}\cdot\overline{MH}=\overline{MG}^2$
>
> $\downarrow \quad \downarrow$
>
> $25K\times 9K=\overline{MG}^2$
>
> $\rightarrow\ \overline{MG}=15K$

Dato:

$$\frac{\overline{MA}+\overline{MH}}{2}-\overline{MG}=18$$

Reemplazando

$$\frac{25K+9K}{2}-15K=18$$

$$2K=18 \rightarrow K=9$$

Entonces

$$\overline{MA}=25K$$

$$\frac{a+b}{2}=25\times 9$$

$\therefore\ a+b=450$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

A una fiesta asistieron 120 personas. Si cada varón tuviera cuatro años más y cada mujer un año menos, la edad promedio no varía. ¿En cuánto variará la edad promedio, si cada varón tuviera un año menos y cada mujer tuviera cuatro años más?

A) Disminuye en 3.
B) Aumenta en 1.
C) Aumenta en 3.
D) No se altera.
E) Disminuye en 2.

Resolución

Sea: V: la cantidad de varones.
M: la cantidad de mujeres.

Luego

$$\left(\begin{matrix}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{matrix}\right)=\frac{\text{aumento y/o disminución de los datos}}{\text{total de datos}}$$

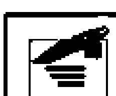
$$\frac{+4(V)-1(M)}{V+M}=0$$

$$\rightarrow 4V=M$$

Piden

$$\frac{-1(V)+4(M)}{V+M}=\frac{15V}{5V}=+3$$

Por lo tanto, el promedio aumenta en 3.


Nota

Si la variación del promedio tiene signo (+) o (–), indica que el promedio inicial aumenta o disminuye, respectivamente.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 35

La nota promedio de un curso (escala vigesimal) se calcula como el promedio ponderado de las notas del primer examen, examen final y el promedio aritmético de prácticas. Para el caso de un alumno de la UNI, se tiene la siguiente información:

	Primer examen	Examen final	Promedio de prácticas			
Peso o crédito	2	3	1			
Notas	9	17	*n*	*n*	*n*	*x*

Se sabe que la nota promedio del curso resultó ser uno menos que el promedio de prácticas; entonces, halle el máximo valor que obtuvo en la cuarta práctica si todas las notas son enteras.

A) 16
B) 17
C) 20
D) 19
E) 18

Resolución

	Primer examen	Examen final	Promedio de prácticas			
Peso o crédito	2	3	1			
Notas	9	17	*n*	*n*	*n*	*x*

$$\text{promedio de prácticas}=\frac{3n+x}{4}$$

Por dato:

$$\begin{pmatrix}\text{Promedio del}\\ \text{curso}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Promedio de}\\ \text{prácticas}\end{pmatrix}-1$$

Reemplazando

$$\frac{2\times 9+3\times 17+1\times\left(\frac{3n+x}{4}\right)}{2+3+1}=\frac{3n+x}{4}-1$$

Se reduce a

$$\underbrace{3n}_{\overset{\circ}{3}}+x=\underbrace{60}_{\overset{\circ}{3}}$$

Entonces

$$x=\overset{\circ}{3}\ \wedge\ x\leq 20\ \ (\text{máxima nota: }20)$$

El máximo número múltiplo de 3 que no se pase de 20 es 18.

$\therefore\ x=18$

Clave E

PROBLEMA N.° 36

Si el promedio geométrico de 20 números diferentes es 30, calcule el promedio geométrico de sus mitades.

A) 30 B) 60 C) 15
D) 7,5 E) 3,75

Resolución

Sean los 20 números diferentes

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{20}$$

$$\overline{MG}(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{20})=30$$

$$\sqrt[20]{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_{20}}=30$$

$$a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_{20}=30^{20}$$

Piden:

$$\overline{MG}\left(\frac{a_1}{2};\frac{a_2}{2};\frac{a_3}{2};\ldots;\frac{a_{20}}{2}\right)=$$

$$=\sqrt[20]{\frac{a_1}{2}\times\frac{a_2}{2}\times\frac{a_3}{2}\times\ldots\times\frac{a_{20}}{2}}$$

$$=\sqrt[20]{\frac{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_{20}}{2^{20}}}$$

$$=\sqrt[20]{\frac{30^{20}}{2^{20}}}=\frac{30}{2}=15$$

$$\overline{MG}\left(\frac{a_1}{2};\frac{a_2}{2};\frac{a_3}{2};\ldots;\frac{a_{20}}{2}\right)=15$$

Por lo tanto, el promedio geométrico de sus mitades es 15.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

Una familia compuesta por papá, mamá y sus 3 hijos presenta las siguientes características:

I. Las edades de sus 3 hijos son 3 números impares consecutivos, y su promedio geométrico es 11,8...
II. El promedio de edades de los padres es 38.

Halle el promedio de edades de toda la familia.

A) 19 años
B) 21 años
C) 23 años
D) 25 años
E) 29 años

Resolución

I. Edades de los tres hijos son impares consecutivos $\underbrace{n;\ n+2\ \text{y}\ n+4}$.

$$\overline{MA}=n+2$$
$$\overline{MG}=11{,}8\ldots$$

Por teoría

$$\underbrace{\text{menor edad}}_{(n)} < \underbrace{\overline{MG}}_{11{,}8\ldots} < \underbrace{\overline{MA}}_{(n+2)}$$

La $\overline{MG}=11{,}8\ldots$ está entre 2 números impares consecutivos; solo cumple $n=11$.
Entonces, los hijos tienen 11; 13 y 15 años.

II. De las edades de los padres
M: mamá y P: papá

$$\frac{M+P}{2}=38$$
$$M+P=76$$

La edad promedio de la familia es

$$\overline{MA}=\frac{\overbrace{M+P}^{76}+11+13+15}{5}$$
$$\overline{MA}=23$$

Por lo tanto, el promedio de toda la familia es 23 años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

En un colegio, se tienen los promedios de las notas de los alumnos de tres aulas del 4.° año, como se muestra en el siguiente cuadro:

Aula	*A*	*B*	*C*
Promedio	12	14	15

Si las cantidades de alumnos de las aulas A y B están en la relación de 2 a 3 y las cantidades de los alumnos de las aulas B y C están en la relación de 6 a 5, halle el promedio de las notas de todos los alumnos.

A) 13 B) 13,2 C) 13,8
D) 14 E) 14,5

Resolución

Sean:

a: la cantidad de alumnos del aula A.
b: la cantidad de alumnos del aula B.
c: la cantidad de alumnos del aula C.

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{2}=\dfrac{4}{6} \\ \\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{6}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=4K \\ b=6K \\ c=5K \end{array}$$

Luego

Aula	A	B	C	Total
Promedio	12	14	15	P
Cantidad de alumnos	$4K$	$6K$	$5K$	$15K$

Sabemos que

Suma de datos = (promedio) (cantidad de datos)

$$S_{(A)}+S_{(B)}+S_{(C)}=S_{(\text{total})}$$

$$12(4K)+14(6K)+15(5K)=P\times(15K)$$

$\therefore\ P=13{,}8$

Clave C

PROBLEMA N.° 39

El promedio aritmético de cuatro números impares menores que 15 es igual a 7. ¿Cuál es el promedio aritmético de los impares no considerados en el caso anterior?

A) 21 B) 14 C) 7
D) 9 E) 8

Resolución

Los impares menores que 15 son

$$\underbrace{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13}_{\substack{\text{los 7 números}\\ \text{suman 49}}}$$

El grtupo de 7 número se divide en dos partes

4 números: $\overline{MA}=7$ 3 números: $\overline{MA}=\overline{x}$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de los}\\ \text{cuatro números}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de los}\\ \text{tres números}\end{pmatrix}=49$$

$$4\cdot 7 \quad + \quad 3\overline{x} \quad =49$$

$\rightarrow\ \overline{x}=7$

Observación

Si todos tienen media 7 y se retiran 4 números con media 7, entonces la media no se altera, seguirá siendo 7.

Por lo tanto, la respuesta es 7.

Clave C

PROBLEMA N.° 40

Una carrera de motociclismo está dividida en varios tramos, de los cuales se sabe que la longitud de cada tramo siguiente es el doble del anterior. Un competidor inicia la carrera con una velocidad y cada vez que termina un tramo cuadruplica su velocidad, así resulta que su velocidad promedio es igual a 80 km/h. Halle en cuántas partes está dividida la competencia, si la velocidad inicial de dicho motociclista toma su mínimo valor entero.

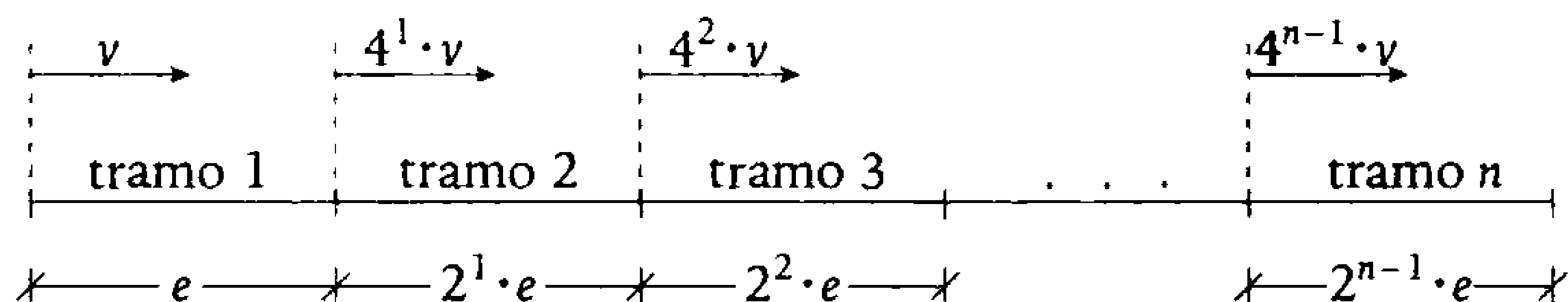
A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

Resolución

Se tiene

$$v_{\text{promedio}}=\frac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}}=80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Suponiendo que son n tramos, tenemos



$$v_{\text{promedio}}=\frac{e+2e+2^2e+\ldots+2^{n-1}\times e}{\frac{e}{v}+\frac{2e}{4v}+\frac{2^2e}{4^2v}+\ldots+\frac{2^{n-1}\times e}{4^{n-1}\times v}}=80$$

$$\rightarrow\quad v_{\text{promedio}}=\frac{e\left(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}\right)}{\frac{e}{v}\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}=80$$

Recuerda

Tenemos

$$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1};\ a\neq 1$$

$$\underbrace{t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;}_{\times q\ \times q\ \times q}\ \ldots;\ t_n\ \rightarrow\ S=\frac{t_1\times(1-q^n)}{1-q};\ q<1$$

Entonces:

$$v_{\text{promedio}}=\frac{v\times(2^n-1)}{\dfrac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}}=80\quad\rightarrow\quad V_{\text{promedio}}=v\times 2^{n-1}=80$$

Por condición, v toma su mínimo valor entero

$$v\times 2^{n-1}=5\times 2^4$$

$$\rightarrow\ v_{mínimo}=5 \text{ km/h}$$

$$n-1=4$$

$$n=5$$

Por lo tanto, la competencia está dividida en 5 tramos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 41

Dentro de cinco años, el promedio de edades de los padres de Ana será 40 años, y el de cuatro primos de Miguel actualmente es de 30,25 años. ¿Cuál será el promedio de todos ellos, incluidos Ana y Miguel, si las edades de estos dos últimos hace 10 años sumaban 30 años?

A) 28,450 años
B) 29,150 años
C) 30,125 años
D) 31,250 años
E) 32,100 años

Resolución

Veamos el promedio actual de las edades de cada grupo.

- De los padres de Ana

dentro de 5 años será $\overline{MA}=40$ ➩ hoy es $\overline{MA}=40-5$, $\overline{MA}=35$

- De los 4 primos de Miguel

hoy es $\overline{MA}=30{,}25$

- De Ana y Miguel:

hace 10 años $\overline{MA}=\dfrac{30}{2}=15$ ➩ hoy es $\overline{MA}=15+10$, $\overline{MA}=25$

Tenemos

2 padres: $\overline{MA}=35$ 4 primos: $\overline{MA}=30{,}25$ Ana y Miguel: $\overline{MA}=25$

De todos el promedio es

$$\overline{MA}=\frac{35\times(2)+(30{,}25)\times 4+25\times(2)}{2+4+2}$$

$$\overline{MA}=30{,}125$$

Por lo tanto, el promedio de todos es 30,125 años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Al calcular el promedio geométrico de dos números enteros, se observó que este es igual a la raíz cuadrada del triple de la suma de dichos números. Calcule la diferencia de los números, si el mayor es dos veces más que el menor de dichos números.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

Resolución

Sean los dos números enteros a y b; $(a>b)$.
Como el mayor es dos veces más que el menor, entonces $a=b+2b=3b$.

Además:

$$\overline{MG}(a;b)=\sqrt{3(a+b)}$$

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{3(a+b)}$$

$$a\times b=3\times(a+b)$$

$$3b\times b=3\times 4b$$

$$\rightarrow\ b=4$$

Piden

$$a-b=2b=8$$

Por lo tanto, la diferencia de los números es 8.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 43

Si la $\overline{MA}$ y la $\overline{MG}$ de dos números pares, cuya suma está comprendida entre 20 y 30, son dos números consecutivos, halle su diferencia.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

Resolución

Sean los números pares $2a$ y $2b$.

- $20<(2a+2b)<30$
  $10<a+b<15$
- Por ser números consecutivos

$$\overline{MA}-\overline{MG}=1$$

$$\left(\frac{2a+2b}{2}\right)-\sqrt{(2a)(2b)}=1$$

$$a+b-\underbrace{2\sqrt{ab}}_{\text{par}}=\underbrace{1}_{\text{impar}}$$

$$\rightarrow\ \sqrt{a\times b}=\frac{a+b-1}{2}$$

Para que $\frac{a+b-1}{2}$ sea entero, $a+b$ es impar y está entre 10 y 15.

$$ab=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 \text{ y } (a+b) \text{ es 11 ó 13}$$

Si $a+b=11\ \rightarrow\ a\times b=5^2$ ... no hay solución

Si $a+b=13\ \rightarrow\ \underset{\underset{9}{\downarrow}}{a}\times\underset{\underset{4}{\downarrow}}{b}=6^2\ \rightarrow$ cumplen 9 y 4

Los números pares son:

$$2(9)=18$$

$$2(4)=8$$

$$\therefore\ 18-8=10$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

Sean dos números cuya diferencia es 50. Si el producto de su $\overline{MA}$ y $\overline{MH}$ es 3600, halle su $\overline{MA}$.

A) 40 B) 45 C) 55
D) 60 E) 65

Resolución

Sean los dos números a y b; $a>b$.

Tenemos

$$a-b=50$$

$$\overline{MA}\times\overline{MH}=3600$$

Por propiedad, para dos números se cumple

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2}$$

$$\rightarrow\ \overline{MG}^2=3600$$

Además

$$(a-b)^2=4\times\left[\overline{MA}^2-\overline{MG}^2\right]$$

$$50^2=4\times\left[\overline{MA}^2-3600\right]$$

$$\overline{MA}^2=4225$$

$\therefore\ \overline{MA}(a;b)=65$

Clave E

PROBLEMA N.° 45

La $\overline{MA}$ de la $\overline{MA}$ y la $\overline{MG}$ de dos cantidades es a la $\overline{MA}$ de las raíces cuadradas de las dos cantidades como 5 es a 2. Si la $\overline{MG}$ es 6, halle el mayor promedio de dichas cantidades.

A) 2,5 B) 3 C) 6
D) 6,5 E) 9

Resolución

Sean las cantidades a y b.

Por dato:

- $\overline{MG}=\sqrt{ab}=6$

- $$\frac{\overline{MA}\left[\overline{MA}(a;b),\ \ \overline{MG}(a;b)\right]}{\overline{MA}\left[\sqrt{a};\sqrt{b}\right]}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\sqrt{ab}}{2}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)}=\frac{5}{2}$$

$$a+b+2\sqrt{ab}=5\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=5\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=5$$

Elevando al cuadrado y desarrollando

$$a+b+2\underbrace{\sqrt{ab}}_{6}=5^2$$

$$a+b=13$$

$$\rightarrow\ \overline{MA}=\frac{\overbrace{a+b}^{13}}{2}$$

$$\overline{MA}=6{,}5$$

Por lo tanto, la respuesta es 6,5.

Clave D

PROBLEMA N.° 46

La diferencia de dos números es 12 y la $\overline{MA}$ excede a la $\overline{MG}$ en 3. Calcule la $\overline{MH}$.

A) 1,5
B) 2
C) 1,8
D) 2,4
E) 2,7

Resolución

Sean los dos números a y b; $a>b$.

Tenemos:

$$a-b=12$$

$$\overline{MA}-\overline{MG}=3 \qquad \text{(I)}$$

Por propiedad, para dos números, se cumple

$$(a-b)^2=4\times(\overline{MA}+\overline{MG})(\overline{MA}-\overline{MG})$$

$$12^2=4(\overline{MA}+\overline{MG})\times 3$$

$$\overline{MA}+\overline{MG}=12 \qquad \text{(II)}$$

Entonces, de (I) y (II):

$$\overline{MA}=\frac{15}{2} \text{ y } \overline{MG}=\frac{9}{2}$$

También por propiedad

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2}$$

$$\rightarrow \frac{15}{2}\times\overline{MH}=\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$\therefore\ \overline{MH}(a;\ b)=2,7$

Clave E

PROBLEMA N.° 47

La $\overline{MH}$ de tres números es 48/7 y la $\overline{MG}$ es igual a uno de los números. Halle la suma de los dos mayores números si la $\overline{MA}$ de los números es igual a seis veces más que el menor de los números.

A) 24 B) 48 C) 60
D) 72 E) 90

Resolución

Sean los números a; b y c; $(a < b < c)$.

Nos piden: $b+c$

- $\overline{MG}=\sqrt[3]{abc}=b$

$a\cdot b\cdot c=b^3$

$a\cdot c=b^2$ (I)

- $\overline{MA}=\dfrac{a+b+c}{3}=7\times a$

$b+c=20a$ (II)

- $\overline{MH}=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\dfrac{48}{7}$

$$\frac{3\overbrace{ac}^{b^2}b}{bc+\underbrace{ac}_{b^2}+ab}=\frac{48}{7}$$

$$\frac{3\cdot b^2\cdot b}{bc+b^2+ab}=\frac{48}{7}$$

$$\frac{b^2\cdot \cancel{b}}{\cancel{b}(\underbrace{c+d}_{20a}+a)}=\frac{16}{7}$$

$b^2=48a$ (III)

(I) = (III)

$a\times c=48a \ \rightarrow\ c=48$

(II)÷(III)

$$\frac{b+c}{b^2}=\frac{20\cancel{a}}{48\cancel{a}}$$

$\dfrac{b+48}{b^2}=\dfrac{5}{12}$ resolviendo $b=12$

$\therefore\ b+c=60$

Clave C

PROBLEMA N.° 48

Se tienen 100 números cuyo promedio es 18,5. A los primeros 20 números se les aumenta tres unidades a cada uno; y a los siguientes 50 números, ocho unidades a cada uno. Si a los números restantes se les disminuye dos unidades a cada uno, calcule el nuevo promedio de los números que se obtienen.

A) 20,5 B) 21 C) 21,5
D) 22 E) 22,5

Resolución

El promedio inicial de los 100 números es 18,5.
Luego

$$\begin{pmatrix}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{\text{aumento y/o disminución de los datos}}{\text{total de datos}}$$

$$\frac{+3(20)+8(50)-2(30)}{100}=+4$$

Nota

Si la variación del promedio tiene signo (+) o (–), indica que el promedio inicial aumenta o disminuye, respectivamente.

Entonces, el promedio inicial aumenta en 4 unidades.
Por lo tanto, el nuevo promedio es 22,5.

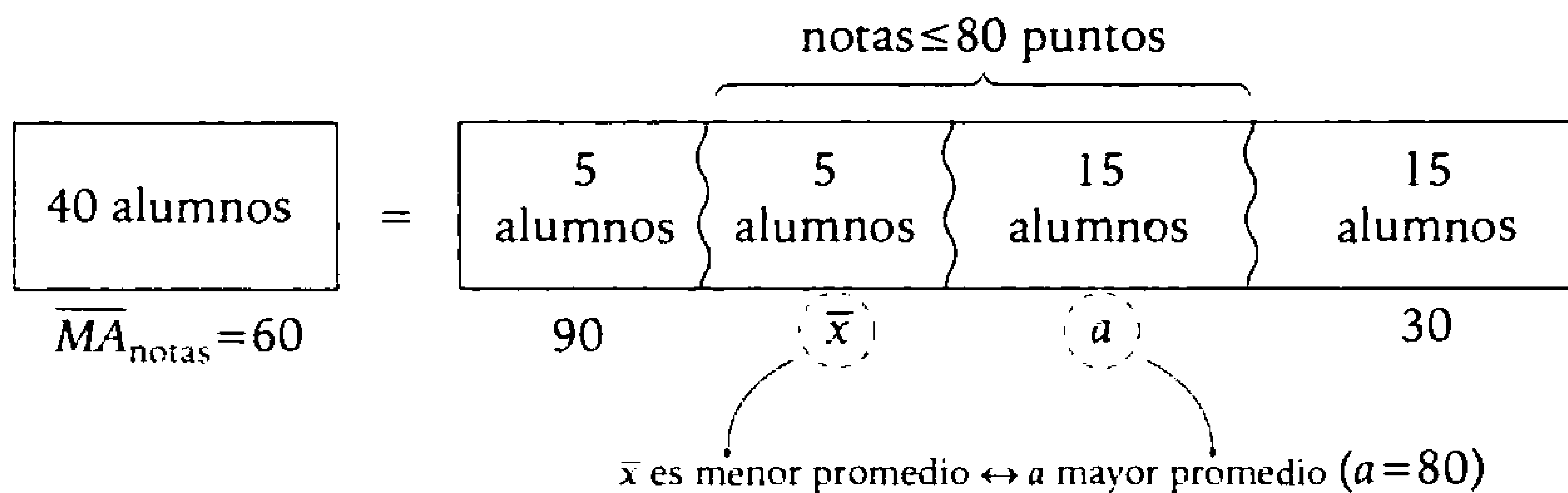
Clave **E**

PROBLEMA N.° 49

El promedio de notas en un curso de 40 alumnos es 60; los primeros 5 obtuvieron un promedio de 90, mientras que los últimos 15 obtuvieron 30 de promedio. Si se sabe que de los restantes ninguno superó los 80 puntos, calcule el menor promedio posible que alcanzan cinco alumnos de estos.

A) 60   B) 65   C) 70   D) 75   E) 80

Resolución



Por promedio ponderado:

$$\overline{MA}=60=\frac{5(90)+5(\overline{x})+15(80)+15(30)}{40}$$

Resolviendo: $\overline{x}=60$
Por lo tanto, el menor promedio de cinco de estos alumnos es 60.

Clave **A**

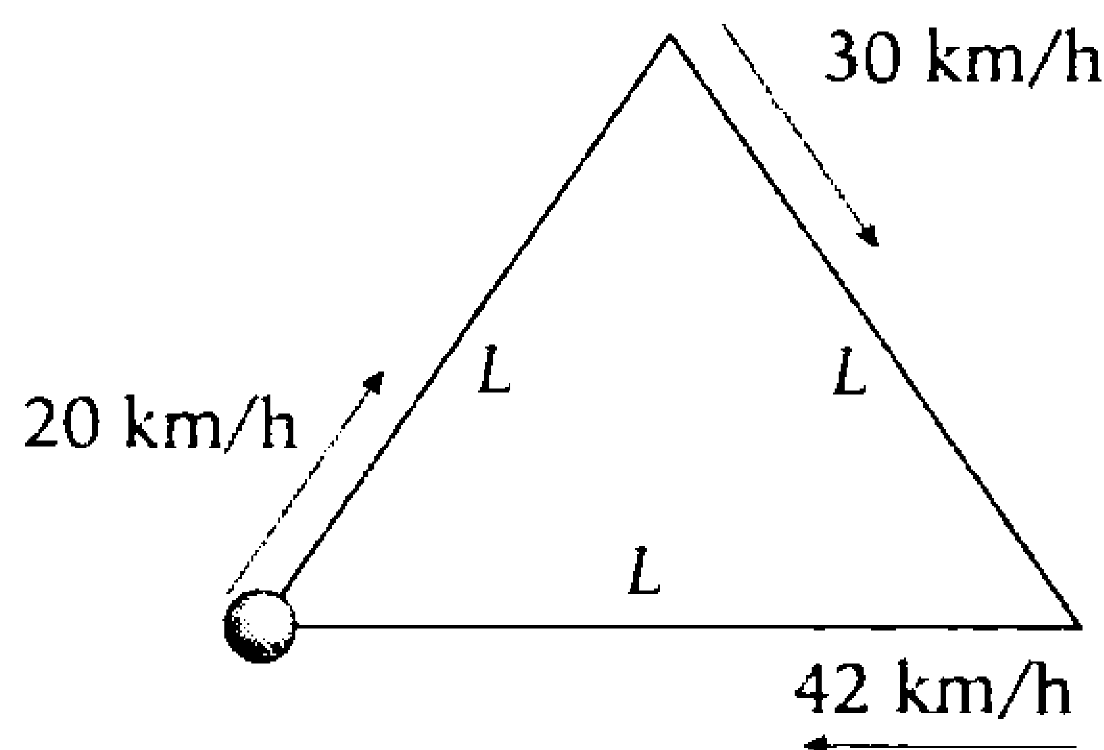
PROBLEMA N.° 50

Calcule la suma de los términos extremos de una proporción geométrica continua si la constante es entera y la menor posible distinta de uno. Considere que la $\overline{MG}$ de los términos de dicha proporción es igual a la velocidad promedio que tiene un móvil al recorrer una pista triangular de forma equilátera, con velocidades de 20 km/h; 30 km/h y 42 km/h. en cada lado, respectivamente.

A) 65 B) 72 C) 56
D) 70 E) 50

Resolución

En primer lugar, calculamos la velocidad promedio:



Tenemos

$$v_{\text{promedio}}=\frac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}}$$

$$v_{\text{promedio}}=\frac{3L}{\frac{L}{20}+\frac{L}{30}+\frac{L}{42}}=28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Luego, sea la proporción geométrica continua

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c};\ a\times c=b\times b$$

Tal que

$$\overline{MG}(a;\ b;\ b;\ c)=28$$

$$\sqrt[4]{a\times b\times b\times c}=28$$

$$\sqrt[4]{b^4}=28$$

$$b=28$$

Entonces

$$\frac{a}{28}=\frac{28}{c}=K$$

$$K\in\mathbb{Z}^+,\ K\neq 1;\ K\text{ es mínimo}$$

De donde

$$K=2;\ c=14\ \text{ y }\ a=56$$

$$\rightarrow\ a+c=70$$

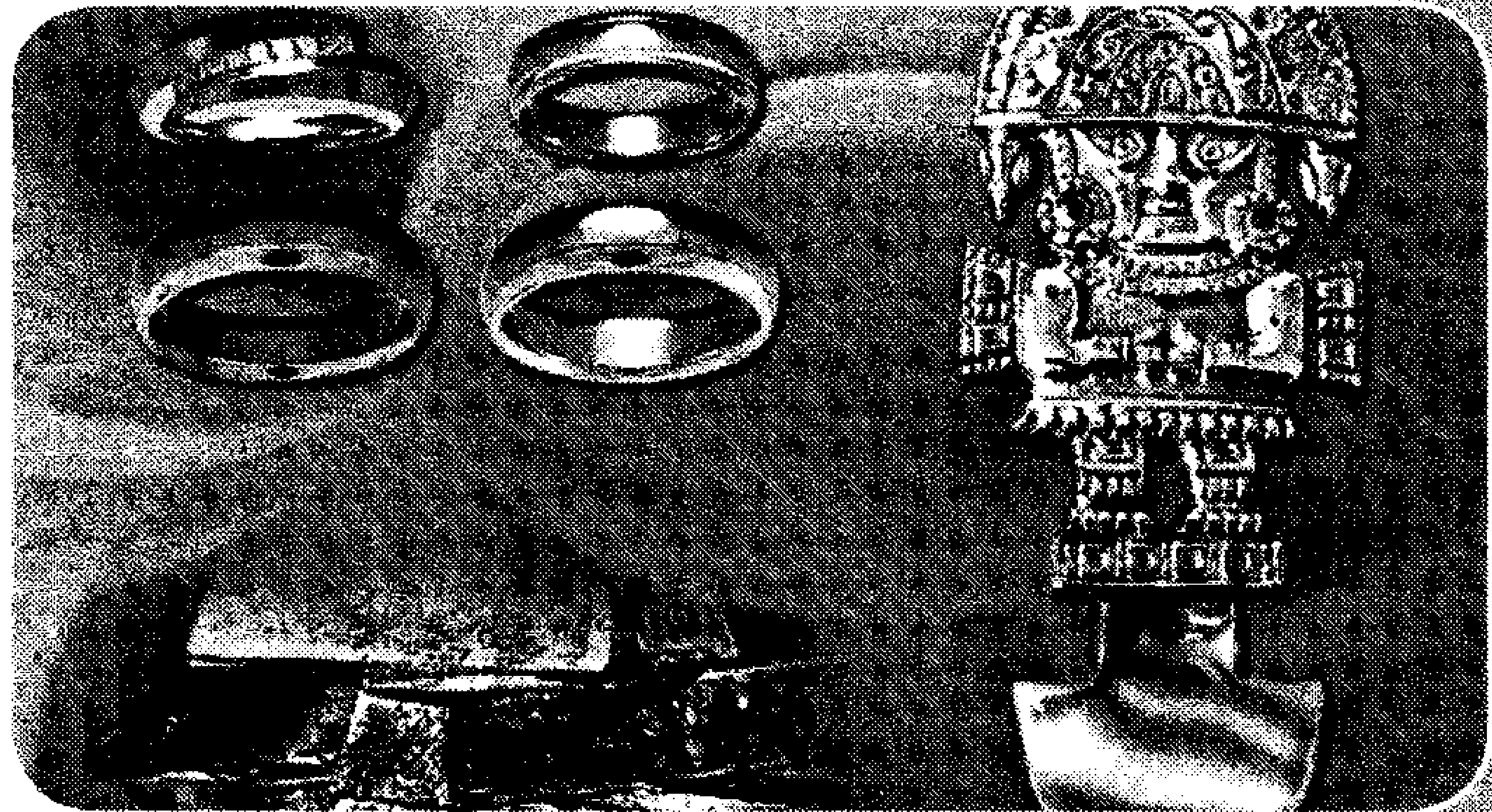
Por lo tanto, la suma de los términos extremos de la proporción geométrica continua es 70.

Clave **D**

Capítulo

17

Regla de mezcla



Desde la antigüedad se ha trabajado con mezclas, en textilería, orfebrería, alfarería; en la actualidad también se necesita conocer bien la proporción de los componentes para poder generar mezclas equivalentes.

Nosotros estudiaremos problemas donde la calidad de los componentes que están por ser mezclados puede ser distinta, y lo que se desea conocer es la calidad de la mezcla. Esta calidad puede ser expresada por precio unitario de los componentes; es en caso de las mezclas alcohólicas, por el grado alcohólico de sus componentes, y para las mezclas de metales (aleación), por la proporción de metal fino que hay en la mezcla.

El promedio ponderado nos permite conocer la calidad de la mezcla de acuerdo a la cantidad de los componentes que participan, por ello podemos aplicar la relación: la ganancia aparente es igual a la pérdida aparente respecto al promedio.

Capítulo **17**

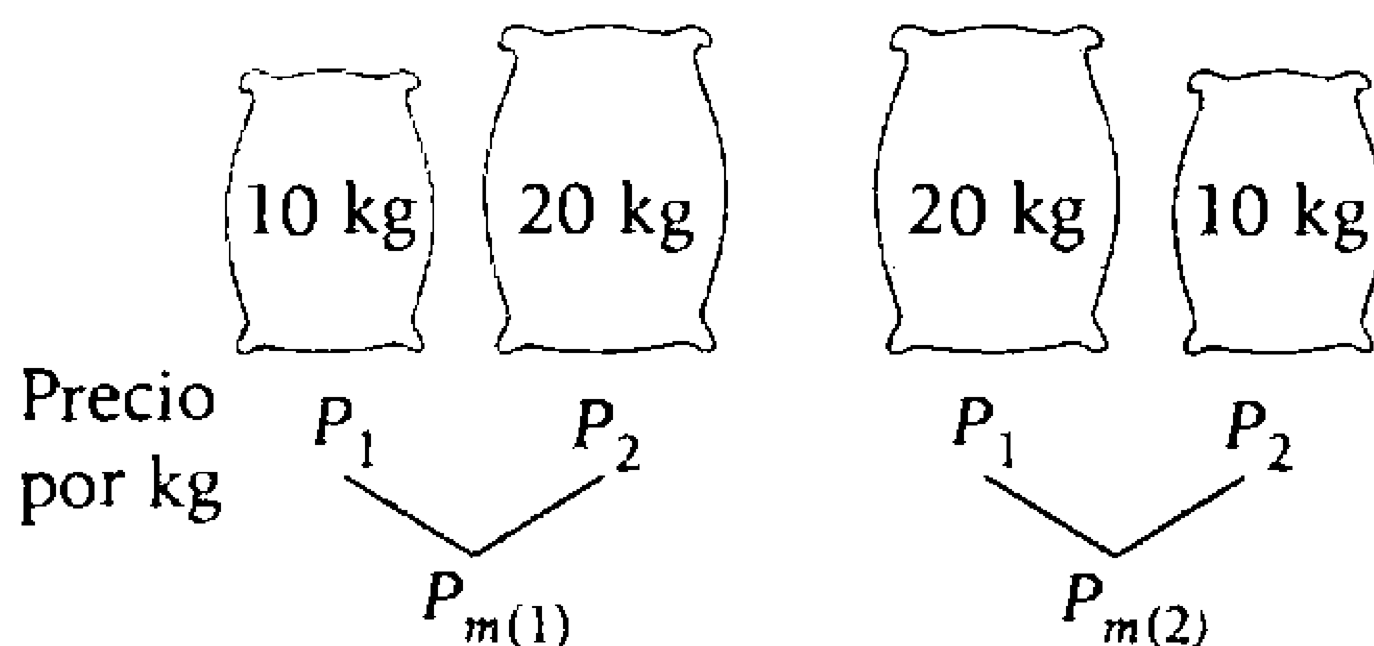
Regla de mezcla

PROBLEMA N.° 1

Un kilogramo de trigo de primera más un kilogramo de trigo de segunda cuestan S/.26. Se mezclan 10 kg del primero con 20 kg del segundo y se obtiene un precio menor en dos soles que el que se habría obtenido si se mezclan 20 kg del primero con 10 kg del segundo. ¿Cuál es el precio de 1 kg del primero?

A) S/.17
B) S/.19
C) S/.27
D) S/.35
E) S/.16

Resolución



Por dato:

$$P_{m(1)} + 2 = P_{m(2)}$$

$$\frac{P_1\times 10+P_2\times 20}{10+20}+2=\frac{P_1\times(20)+P_2\times(10)}{20+10}$$

Se reduce a:

$$P_1-P_2=6$$

Tenemos:

$$\begin{array}{r} P_1-P_2=6 \\ P_1+P_2=26 \\ \hline 2P_1=32 \\ P_1=16 \end{array}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 2

Un comerciante quiere mezclar tres tipos de frijol de S/.2,40; S/.3 y S/.3,60 el kilogramo. ¿Cuánto habrá de utilizar del primer tipo, si se desea obtener una mezcla de 240 kilogramos que pueda vender a S/.3,84 el kilogramo para pagar el 20% y si los pesos de los dos primeros tipos están en la relación de 3 a 4, respectivamente?

A) 40 kg
B) 42 kg
C) 45 kg
D) 48 kg
E) 51 kg

Resolución

Sabemos que: $P_V=P_m+G$

$G \rightarrow 20\%P_m$

$$3{,}84=120\%\ P_m$$

$$P_m=\text{S/.}3{,}2$$

Tenemos una mezcla de 240 kg

	Cantidad (kg)	Costo por kg (S/.)	P_m(S/.)
Tipo 1	$3n$	2,4	
Tipo 2	$4n$	3	3,2
Tipo 3	$240-7n$	3,6	

Luego

$$\underbrace{0{,}8(3n)+0{,}2(4n)}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{0{,}4(240-7n)}_{\text{P. aparente}}$$

$$n=16$$

$\therefore\ 3n=48$ kilogramos

Clave **D**

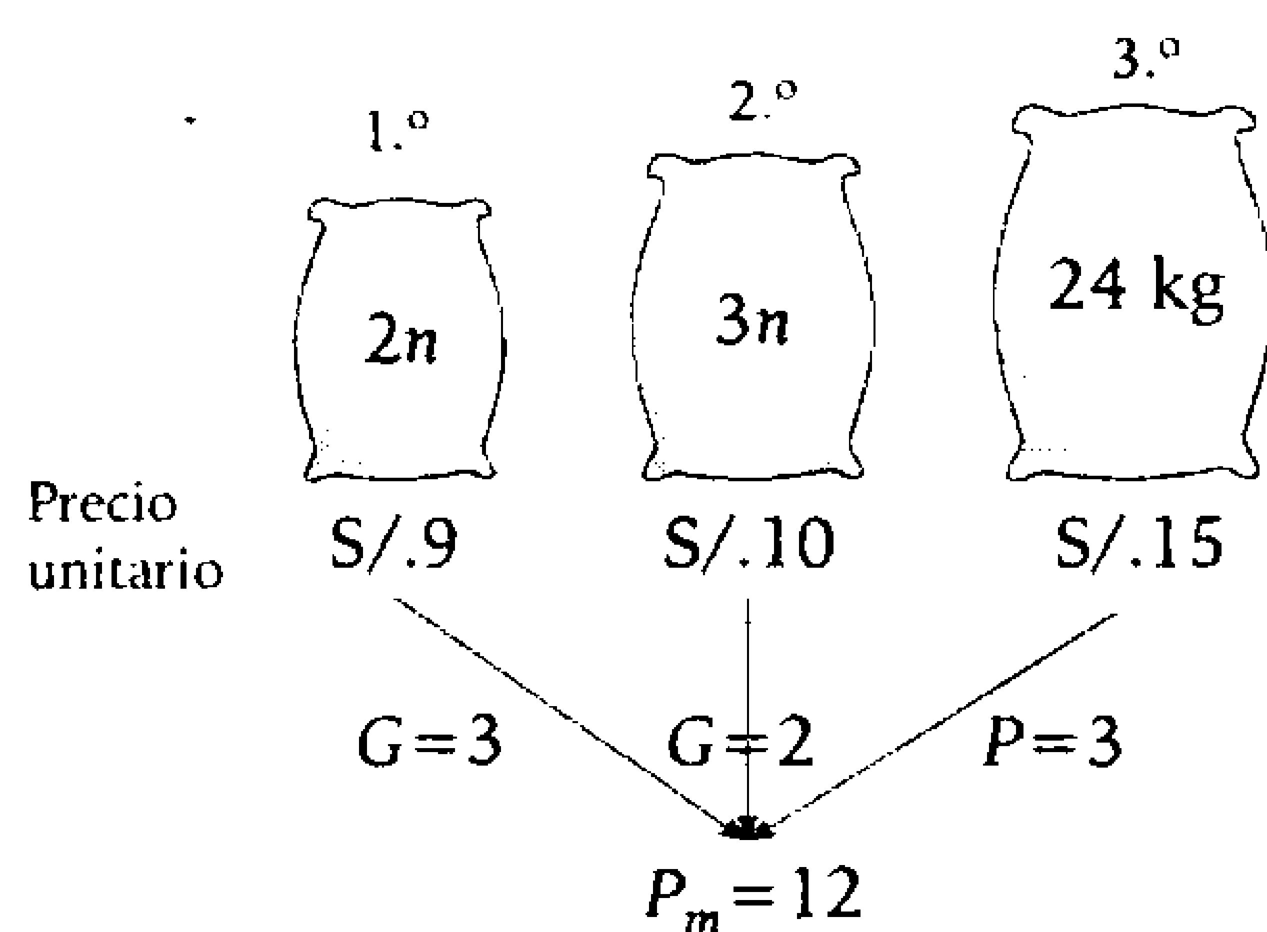
PROBLEMA N.° 3

Se mezclan harinas de tres calidades distintas, cuyos costos por kilogramo son de S/.9; S/.10 y S/.15, respectivamente, y se obtiene una mezcla cuyo costo es de S/.12 por kilogramo. ¿Cuántos kilogramos tiene la mezcla? Considere que se utilizaron 24 kg del más caro y, además, se sabe que las cantidades del primero y el segundo son entre sí como 2 es a 3.

A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

Resolución

Del enunciado



- Respecto a los precios y el precio medio, se cumple

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

Reemplazamos

$$3(2n)+2(3n)=3(24)$$

$$n=6$$

El peso de la mezcla es

$$\text{Peso total}=(\underbrace{2n+3n}+24)\text{kg}$$

$$\text{Peso total}=(5n+24)\text{ kg}$$

$$\text{Peso total}=(5\times 6+24)\text{ kg}$$

$$=54\text{ kg}$$

Por lo tanto, el peso total de la mezcla es 54 kg.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

Se mezclan vinos de S/.15; S/.20 y S/.25 el litro en cantidades que están en la relación de 1; 2 y 7, respectivamente. Si se sabe que al realizar la venta se obtuvo una ganancia del 10%, halle el precio de venta por unidad de mezcla.

A) S/.25,3 B) S/.25,4 C) S/.26,1
D) S/.26,5 E) S/.26,7

Resolución

Como se conoce la relación en la que se encuentran todas las cantidades, no es necesario trabajar con la constante.

$$P_m=\frac{(1)\times 15+(2)\times 20+(7)\times 25}{1+2+7}=\text{S/.}23$$

Recuerda

Cuando no se indica, se asume que la ganancia es sobre el P_m.

$\therefore\ P_V=P_m+G=\text{S/. }25{,}3$

$G \downarrow 10\%P_m$

Clave **A**

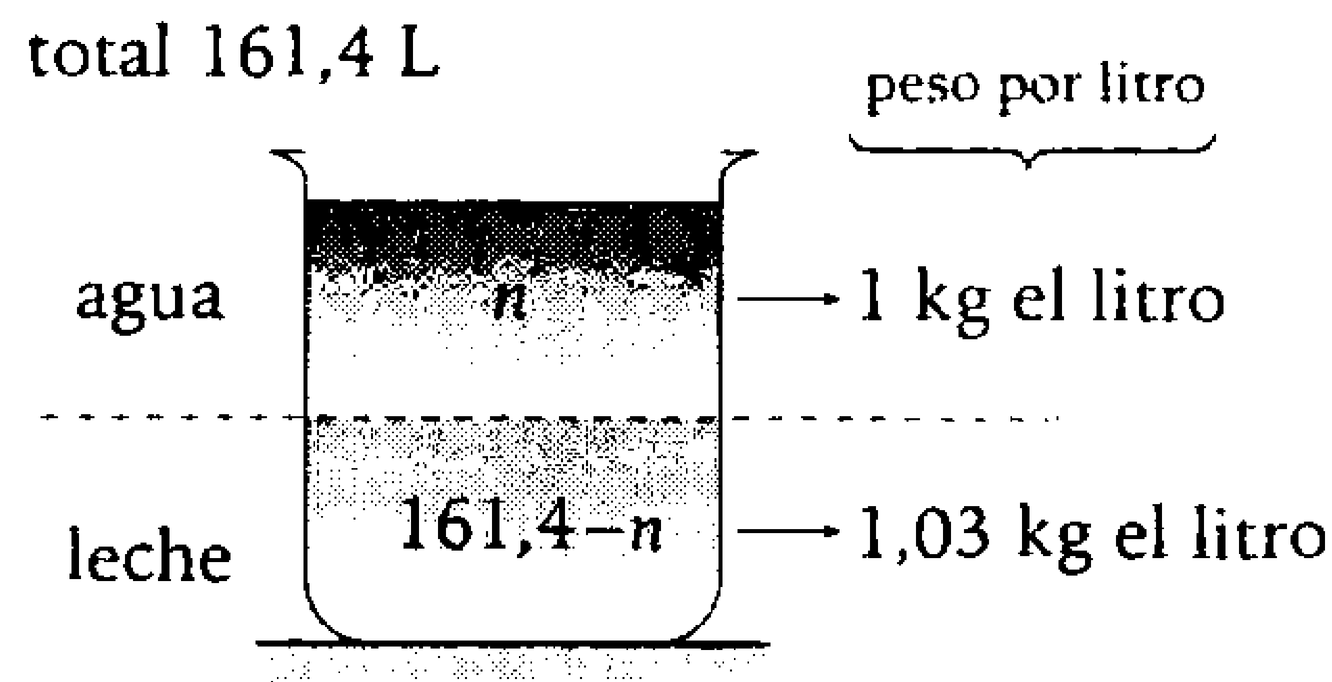
PROBLEMA N.° 5

Un litro de leche pura pesa 1030 g. Si se ha comprado 161,4 litros de leche y estos pesan 165,420 kg, calcule cuántos litros de agua contiene esta leche.

A) 27,4 litros
B) 26 litros
C) 29 litros
D) 25,5 litros
E) 24,7 litros

Resolución

Según los datos:



Peso total

$n\times 1+(161{,}4-n)(1{,}03)=165{,}420$

$n=27{,}4$

Por lo tanto, contiene 27,4 litros de agua.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Se tienen dos tipos de café: 50 kg de S/.15 el kilogramo y el otro de S/.10 cada kilogramo. Si se vende el kilogramo de la mezcla a S/.15,6 y se gana el 30%, determine la cantidad de kilogramos del segundo tipo de café.

A) 75 B) 45 C) 40
D) 48 E) 60

Resolución

Recuerda

Cuando no se indica, se asume que la ganancia es sobre el P_m.

Sabemos que $P_V=P_m+G$

$G \downarrow 30\%P_m$

$15{,}6=130\%P_m$

$P_m=\text{S/.}12$

	Cantidad (kg)	Costo por kg (S/.)	P_m(S/.)
Tipo 1	50	15	12
Tipo 2	n	10	

Luego

$$\underbrace{2\times n}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{3\times 50}_{\text{P. aparente}}$$

$$n=75$$

Por lo tanto, del segundo tipo intervienen 75 kg.

Clave **A**

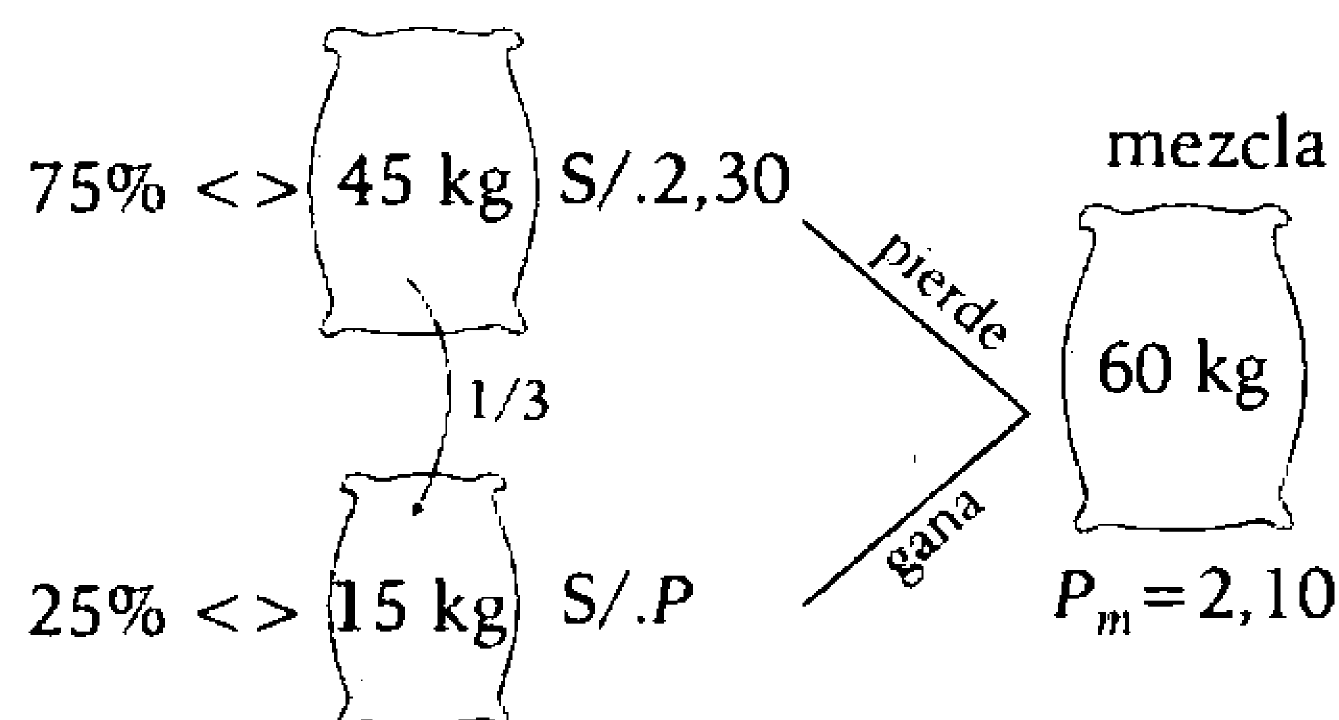
PROBLEMA N.° 7

Cecilia, una vendedora de abarrotes muy hábil, logró mezclar dos clases de arroz, la primera de 45 kg a S/.2,30 el kilogramo con otra que representa el 25% del peso total de la mezcla. Si se ha obtenido como precio medio S/.2,10, ¿cuál fue el precio por kilogramo de esta última clase de arroz?

A) S/.1,90 B) S/.1,70 C) S/.1,80
D) S/.1,50 E) S/.1,60

Resolución

Tenemos



$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(2{,}10-P)\times 15=(2{,}30-2{,}10)\times 45$$

$\therefore$ P=S/.1,50

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Se mezclan 20 litros de vino de S/.4 el litro con 50 litros de vino de S/.6 el litro y 30 litros de vino de S/.8 el litro. ¿Cuál será el costo de 10 litros de la mezcla?

A) S/.52
B) S/.56
C) S/.60
D) S/.62
E) S/.64

Resolución

Se halla el precio medio de la mezcla (P_m).

$$P_m=\frac{20\times 4+50\times 6+30\times 8}{20+50+30}=\text{S/.}6{,}2$$

Recuerda

El P_m es el precio de costo de cada litro de mezcla.

Por lo tanto, el costo de 10 litros de la mezcla es $10\times P_m$=S/. 62.

Clave **D**

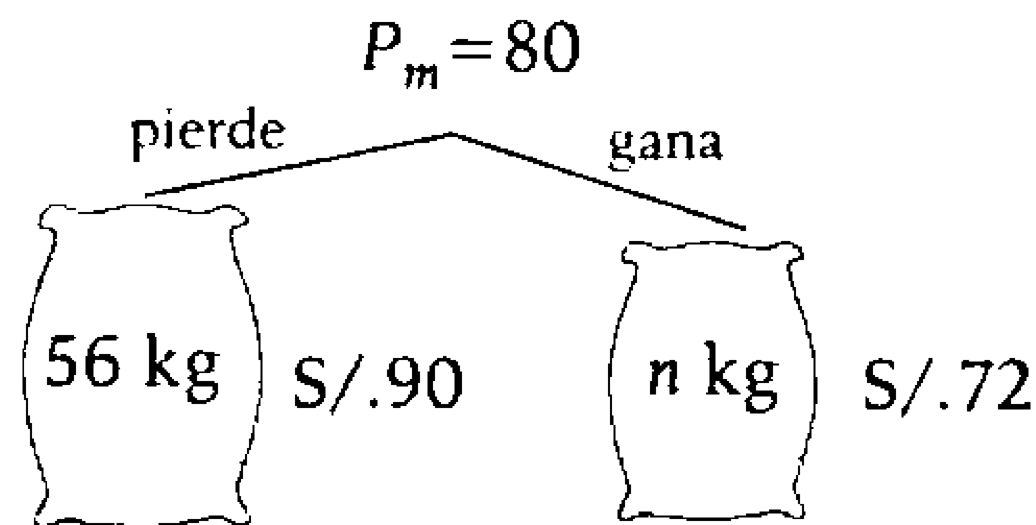
PROBLEMA N.° 9

Se mezclan 56 kg de café de S/.90 el kilogramo con café de S/.72 y se obtiene café de S/.80. ¿Cuántos kilogramos de café de S/.72 se ha mezclado?

A) 50 kg
B) 60 kg
C) 70 kg
D) 75 kg
E) 80 kg

Resolución

Del enunciado



Igualando

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$(80-72)n=(90-80)\times 56$

$8n=10\times 56 \rightarrow n=70$

Por lo tanto, se han mezclado 70 kg de café de S/.72.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Se tienen tres ingredientes, *A*, *B* y *C*, además, los costos por kilogramo de cada uno son S/.20; S/.50 y S/.100, respectivamente. Se mezclan dichos ingredientes para obtener 440 kg de mezcla, cuyo costo por kilogramo, sea S/.30. ¿Cuántos kilogramos del producto *A* intervienen, si se utilizan cantidades iguales de los ingredientes *B* y *C*?

A) 220 B) 360 C) 260
D) 180 E) 280

Resolución

Tenemos una mezcla de 440 kg.

	Cantidad (kg)	Costo por kg (S/.)	P_m(S/.)
A	$(440-2n)$	20	
B	n	50	30
C	n	100	

Luego

$$\underbrace{10\times(440-2n)}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{20\times n+70\times n}_{\text{P. aparente}}$$

$$n=40$$

Por lo tanto, del producto *A* intervienen

$(440-2n)=360$ kg

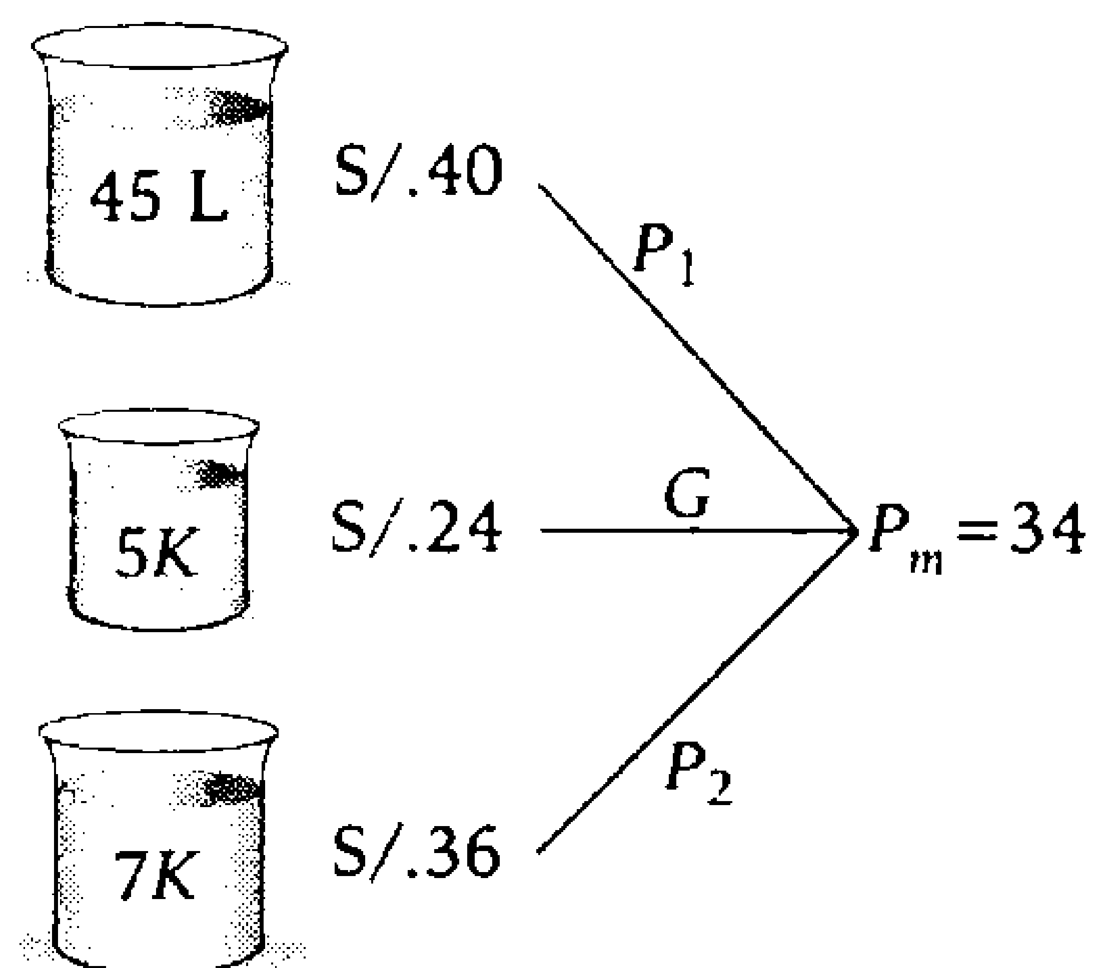
Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Se mezclan 45 litros de vino de S/.40 el litro con vinos de S/.24 y S/.36 el litro y el resultante tiene un precio medio de S/.34 el litro. Si se sabe que por cada cinco litros del segundo hay siete litros del tercero, halle la cantidad total de la mezcla.

A) 130 L B) 135 L C) 140 L
D) 145 L E) 150 L

Resolución



Igualando (Ganancia) = (Pérdida)

$G=P_1+P_2$

$10\times 5K=6\times 45+2\times 7K$

$12K=90$

Nos piden

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{total de mezcla}\end{pmatrix} = 45 + 5K + 7K$$

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{total de mezcla}\end{pmatrix} = 45 + \underbrace{12K}$$

$$= 45 + 90$$

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{total de mezcla}\end{pmatrix} = 135$$

Por lo tanto, en la mezcla se tiene 135 litros.

Clave B

PROBLEMA N.° 12

Se compran dos recipientes con pisco: el primero ha costado S/.32,40 el litro, y 7 litros del primero han costado lo que 9 litros del segundo; además, el volumen del primer recipiente excede al del segundo en 1/4. Si se mezclan los contenidos de los dos recipientes, calcule el precio al que debe venderse el litro para ganar 1/4 del precio de compra.

A) S/.32,5
B) S/.34
C) S/.36,5
D) S/.35
E) S/.37,5

Resolución

Sean

P_1 y P_2 los costos unitarios

V_1 y V_2 los volúmenes

Entonces

$7P_1 = 9P_2$

$V_1 = 5n$

$V_2 = 4n$

Además

$7(32{,}4) = 9P_2$

Ahora, hallamos el precio medio de la mezcla (P_m)

$P_2 = \text{S/.}25{,}2$

$$P_m = \frac{5(32{,}4) + 4(25{,}2)}{5+4} = \text{S/.}29{,}2$$

Luego, al vender un litro de la mezcla, se gana 1/4 del precio de compra, es decir, 1/4 del P_m.

$$P_V = P_m + \underset{\downarrow \atop \frac{1}{4}\times P_m}{G} = \frac{5}{4}\times P_m$$

$\therefore\ P_V = \text{S/.}36{,}5$

Clave C

PROBLEMA N.° 13

El contenido de 22 barricas de cemento de 100 kg cada una (cuyo precio es de S/.1320 el metro cúbico) se ha mezclado con el contenido de 63 barricas de otra clase de cemento con precio de S/.825 el metro cúbico, y el precio medio de la mezcla ha resultado de S/.1023 el metro cúbico. Averigüe el peso de la barrica de la segunda clase de cemento, cuya densidad es 1,05 kg/m^3, si la de la otra clase es 1,1 kg/m^3.

A) 45 kg
B) 48 kg
C) 49 kg
D) 50 kg
E) 55 kg

Resolución

Tenemos

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \boxed{V = \frac{m}{\rho}}$$

Donde

ρ: densidad
m: masa
V: volumen

		(I)	(II)
masa(m)	:	22×100 kg	$63\times a$ kg
densidad(ρ)	:	1,1 kg/m^3	1,05 kg/m^3
volumen(V)	:	$\frac{2200}{1,1}m^3$	$\frac{63a}{1,05}m^3$
Precio unitario	:	S/. 1320	S/. 825

P_m=S/. 1023

Efectuando

$$\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(1320-1023)\cdot\left(\frac{2200}{1,1}\right)=(1023-825)\cdot\left(\frac{63a}{1,05}\right)$$

Resolviendo $a=50$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

Se quiere llenar un barril de 260 litros de capacidad con vinos de S/.7,20 por litro (primera clase), con otro de S/.6,30 por litro (segunda clase) y, finalmente, con agua. Se echan 90 litros de la primera clase de vino, cantidades convenientes de la segunda clase de vino y, además, agua, para obtener un precio medio de S/.5,40. ¿Qué cantidad se habrá echado de vino de la segunda clase, suponiendo que no cueste nada el agua?

A) 118 L
B) 120 L
C) 124 L
D) 115 L
E) 130 L

Resolución

Tenemos una mezcla de 260 L

	Cantidad (L)	Costo por L S/.	P_m S/.
1.ª clase	90	7,20	5,40
2.ª clase	V	6,30	
Agua	$170-V$	0	

Luego

$$P_m=\frac{90(7,2)+V(6,3)+(170-V)\times0}{260}=5,4$$

$\therefore\ V=120$ litros

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

Para la construcción de una carretera hay que desmontar 1800 m^3 de tierra franca, 14 400 de tierra dura, 10 800 de terreno de tránsito, 9000 de roca blanda y 3600 de roca dura. Si los precios del metro cúbico de arranque de cada una de estas clases de terreno son 15,40; 25,30; 35,20; 44 y 126,50 pesetas, respectivamente, ¿en cuánto se fijará el precio medio del metro cúbico de desmonte?

A) 37 pesetas
B) 41 pesetas
C) 45 pesetas
D) 49 pesetas
E) 58 pesetas

Resolución

Cantidades de cada clase (m^3): $\underbrace{1800}_{1}$ $\underbrace{14\,400}_{8}$ $\underbrace{10\,800}_{6}$ $\underbrace{9000}_{5}$ $\underbrace{3600}_{2}$

Relación de cantidades < > 1 8 6 5 2

Precio por m^3 (pesetas): 15,4 25,3 35,2 44 126,5

El precio medio es: $P_m = \dfrac{(15,4)\cdot 1+(25,3)\cdot 8+(35,2)\cdot 6+44\times 5+(126,5)\cdot 2}{1+8+6+5+2}$

$\therefore\ P_m=41$ pesetas

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Se ha comprado 75 pacas de algodón peruano de primera a S/.77,90 el kilogramo; 40 pacas del mismo género, de segunda, a S/.75,05 el kilogramo, y 50 pacas de la clase corriente a S/.70,61 el kilogramo. ¿A cómo resulta el precio medio de la mezcla, si la paca es de 10 kg?

A) S/.74 B) S/.75 C) S/.76 D) S/.77 E) S/.78

Resolución

1 Paca < > 10 kg

	Cantidad (kg)	Costo por kg (S/.)
De Primera	75×10 (15)	77,90
De Segunda	40×10 (8)	75,05
Corriente	50×10 (10)	70,61

Recuerda

Puedes trabajar solo con la relación en la que se encuentran **todas** las cantidades.

Entonces, hallamos el precio de la mezcla (P_m)

$$P_m = \frac{15(77,9)+8(75,05)+10(70,61)}{15+8+10}$$

Por lo tanto, el precio medio de la mezcla es S/.75.

Clave **B**

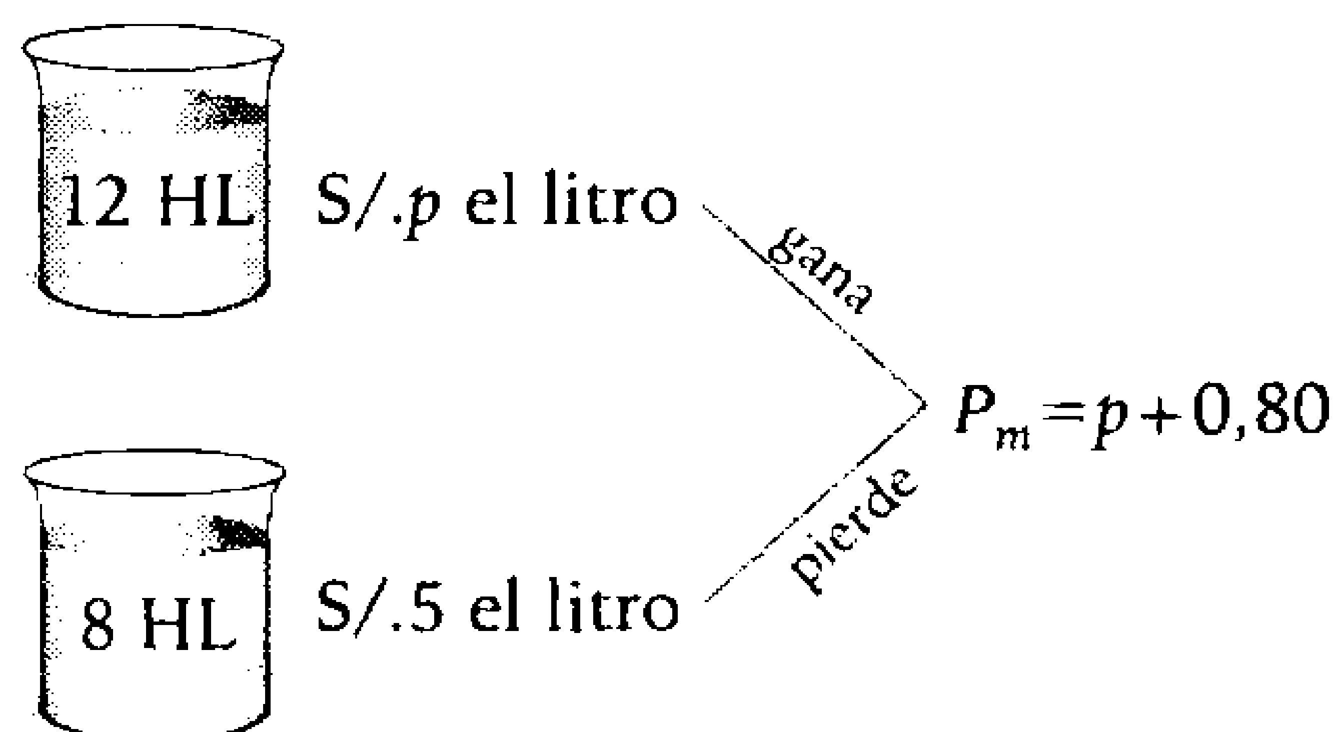
PROBLEMA N.° 17

Se ha mezclado 12 HL de un líquido con 8 HL de otro líquido de 5 soles el litro. Si el precio medio del litro de la mezcla excede en 0,80 de soles al precio del litro del primer líquido, ¿cuál es este precio?

A) S/.2 B) S/.3 C) S/.3,5 D) S/.4,5 E) S/.4,7

Resolución

Del enunciado



$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(0,80)\times 12=[5-(p+0,8)]\times 8$$

$$1,2=4,2-p$$

$$\therefore\ p=3$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

Un comerciante mezcla 2 HL de vino, de S/.525 el hectolitro, con 7 HL de S/.600 el hectrolitro y con agua; al concluir, se obtiene el precio medio de S/.525. Otro comerciante mezcla los mismos líquidos, empleando 8 HL de S/.450 y 9 HL de S/.675 el hectolitro, y obtiene el precio medio de S/.483,75. Determine en cuál de las mezclas entra más cantidad de agua y qué cantidad es esa.

A) En la 1.ª y 1HL
B) En la 2.ª y 1HL
C) En la 2.ª y 2HL
D) En la 1.ª y 2HL
E) En la 2.ª y 3HL

Resolución

- Primera mezcla

	Cantidad (HL)	Costo por HL S/.	P_m S/.
vino 1	2	525	
vino 2	7	600	525
agua	V_1	0	

Luego

$$\underbrace{525\times V_1}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{75\times 7}_{\text{P. aparente}}\quad\rightarrow\quad V_1=1\text{ HL}$$

- Segunda mezcla

	Cantidad (HL)	Costo por HL S/.	P_m S/.
vino 3	8	450	
vino 4	9	675	483,75
agua	V_2	0	

Luego

$$\underbrace{483,75\times V_2+33,75\times 8}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{191,25\times 9}_{\text{P. aparente}}$$

$$\rightarrow\quad V_2=3\text{ HL}$$

Por lo tanto, en la segunda mezcla entra más cantidad de agua y entran en ella 3 HL.

Clave **E**

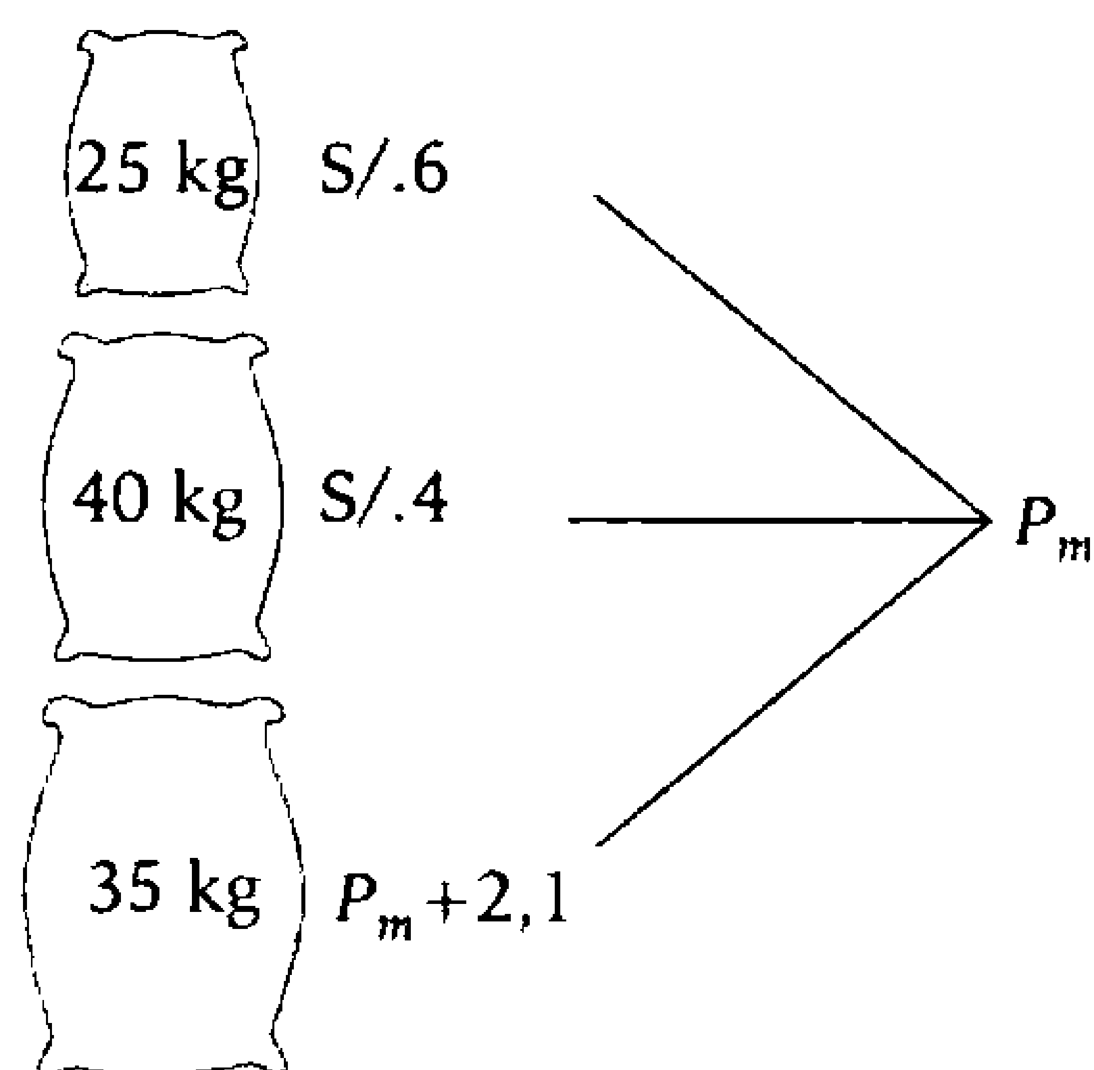
PROBLEMA N.° 19

Se quiere obtener 100 kg de cierta calidad de café al mezclar 25 kg de 6 soles el kilogramo con 40 kg de 4 soles el kilogramo, y el resto con otra clase cuyo precio exceda en S/.2,10 al precio medio. Calcule este precio medio.

A) S/.5,3 B) S/.5,6 C) S/.5,8
D) S/.5,9 E) S/.6,3

Resolución

Peso total de la mezcla 100 kg



$$P_m=\frac{6(25)+4(40)+(P_m+2,1)35}{100}$$

Efectuando se obtiene: $P_m=5,9$

Por lo tanto, el precio promedio es S/.5,9.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

Se ha obtenido 1000 kg de arroz al precio de S/.12,36 el kilogramo, mezclando cuatro clases distintas de precios: S/.9,60, respectivamente; S/.12; S/.14,40 y S/.10,80 el kilogramo. De la segunda clase ha entrado doble cantidad que de la primera, y de la tercera, doble cantidad que de la segunda. ¿Cuántos kilogramos de la tercera clase de arroz han entrado en la mezcla?

A) 300
B) 350
C) 400
D) 600
E) 800

Resolución

Tenemos una mezcla de 1000 kg

	Cantidad (kg)	Costo por kg (S/.)	P_m (S/.)
1.ª clase	n	9,60	12,36
2.ª clase	$2n$	12	
3.ª clase	$4n$	14,40	
4.ª clase	$1000-7n$	10,80	

Luego

$$\overbrace{2,76\times n+0,36\times 2n+1,56(1000-7n)}^{\text{G. aparente}}=\overbrace{2,04\times 4n}^{\text{P. aparente}}$$

$n=100$

Por lo tanto, han entrado $4n=400$ kg de la tercera clase de arroz.

Clave **C**

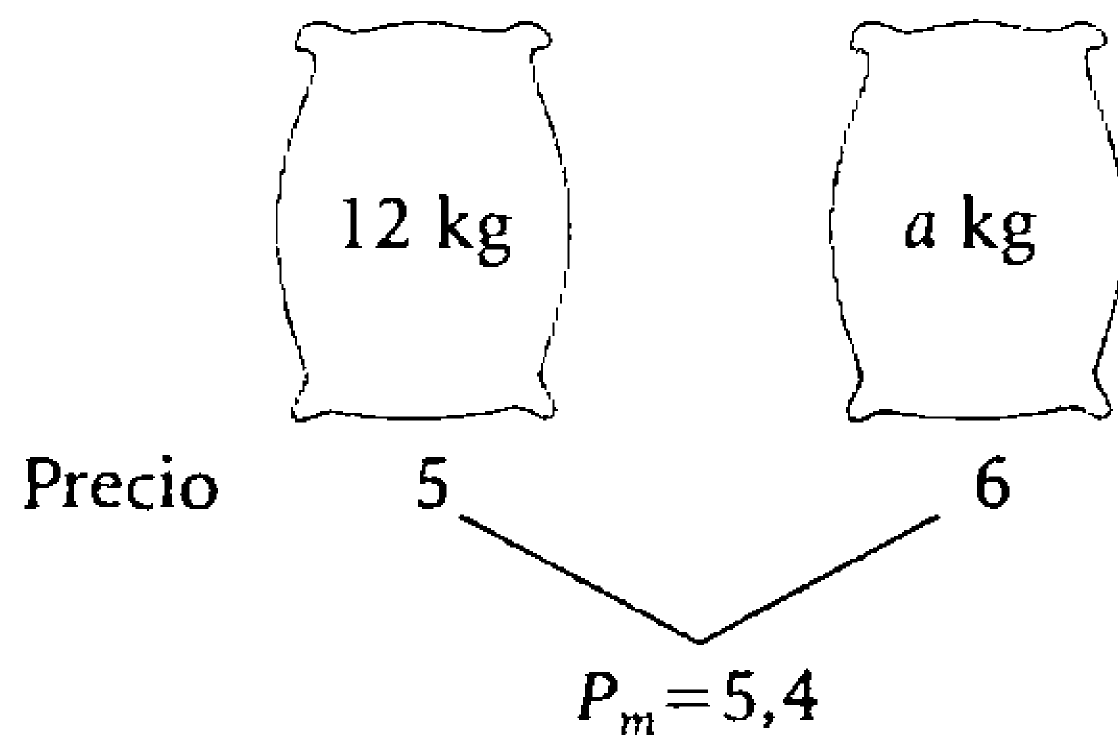
PROBLEMA N.° 21

Se ha hecho una mezcla de dos géneros distintos cuyos precios son S/.5 y S/.6 el kilogramo, entrando 12 kg del primero, y se ha obtenido como precio medio del kilogramo S/.5,40. Después se han mezclado otros dos géneros, de S/.10 y S/.6 el kilogramo, entrando 9 kg del primero. Si las dos mezclas han costado lo mismo, ¿cuál es su precio medio?

A) S/.8
B) S/.9
C) S/.10
D) S/.11
E) S/.12

Resolución

Mezcla (I)



$$\begin{pmatrix}\text{Ganacia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

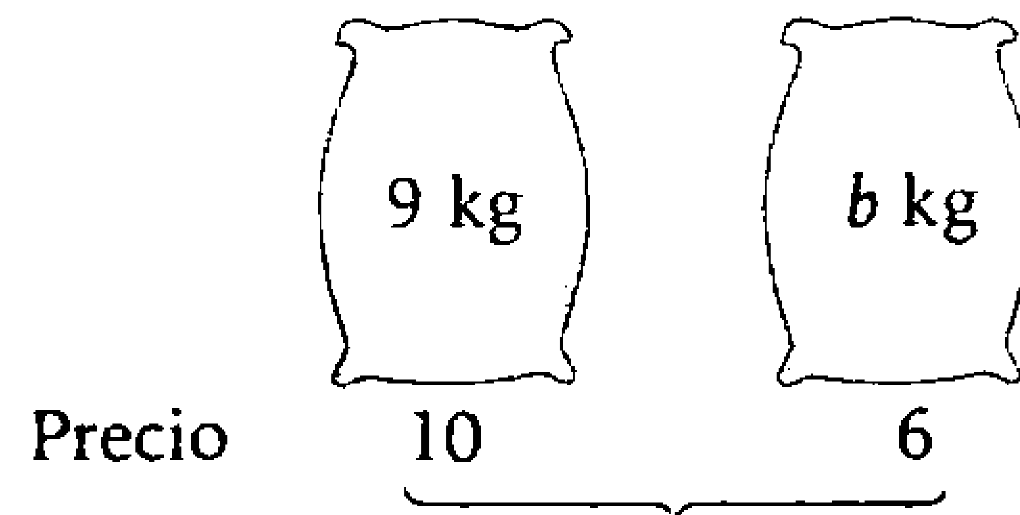
$(0,4)12=(0,6)a$

$a=8$

La mezcla tiene $12+8=20$ kg con $P_m=5,4$

Costo total: $20\times5,4=108$

Mezcla (II)



Costo total: $10\times9+6\times b=108$

$b=3$

La mezcla tiene $9+3=12$ kg

$$\rightarrow\ P_m=\frac{108}{12}=9$$

Por lo tanto, el precio medio es S/.9.

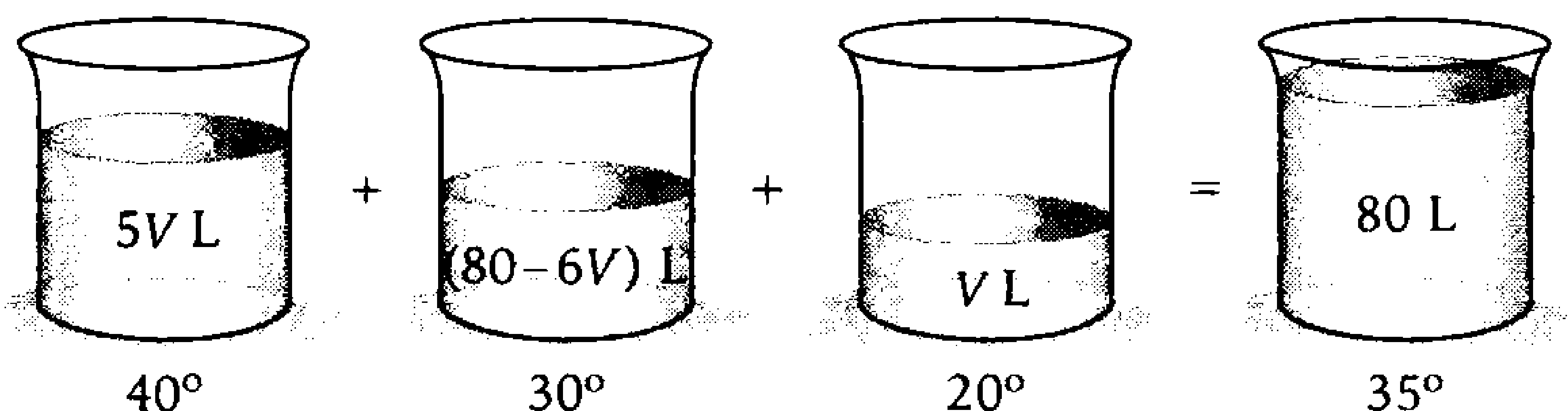
Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

Se mezclan alcoholes de 40°; 30° y 20° para obtener alcohol de 35°. Si se quiere que el alcohol de 20° sea la quinta parte que el de 40°, entonces, ¿cuántos litros de alcohol de 30° entrarán en la mezcla, si esta posee un volumen total de 80 L?

A) 10 L B) 20 L C) 35 L D) 30 L E) 40 L

Resolución



Luego

$$\underbrace{15(V)+5(80-6V)}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{5(5V)}_{\text{P. aparente}}$$

$V=10 \rightarrow 80-6V=20$ L

Por lo tanto, entran 20 L de alcohol de 30°.

Clave **B**

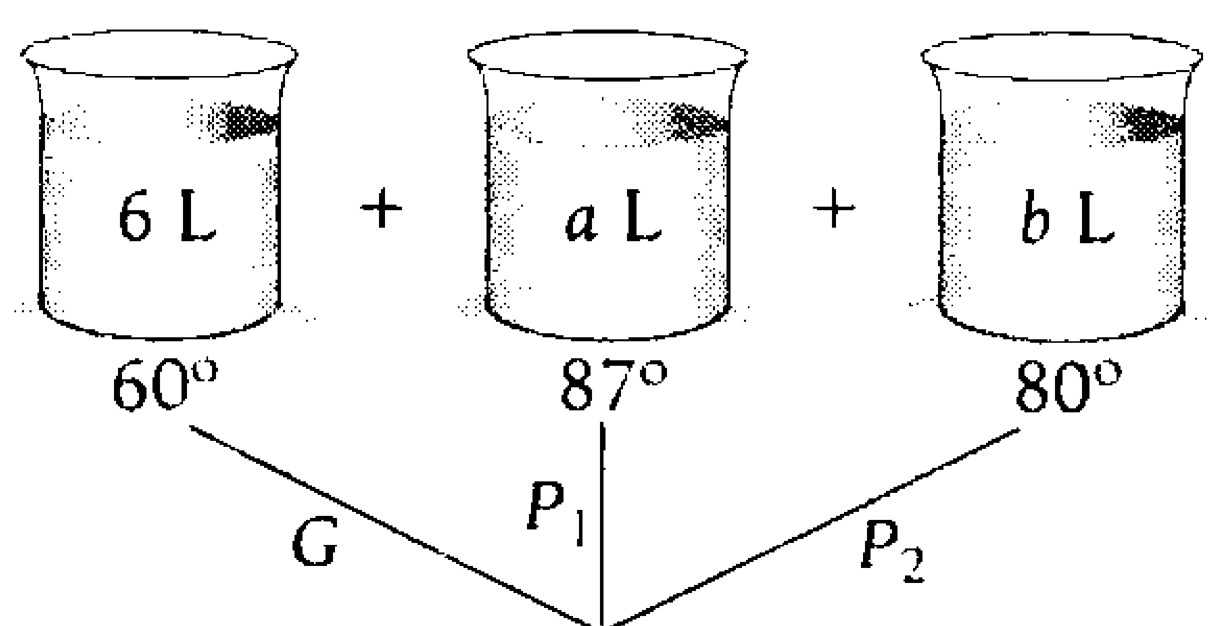
PROBLEMA N.° 23

Se mezclan 6 L de alcohol de 60° con otros volúmenes enteros en litros de 87° y 80°, y se obtiene una mezcla de 75°. ¿Cuántos litros de agua hay que agregar a esta mezcla para obtener una de 51°?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

Resolución

Si $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}^+$



Grado medio 75°

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

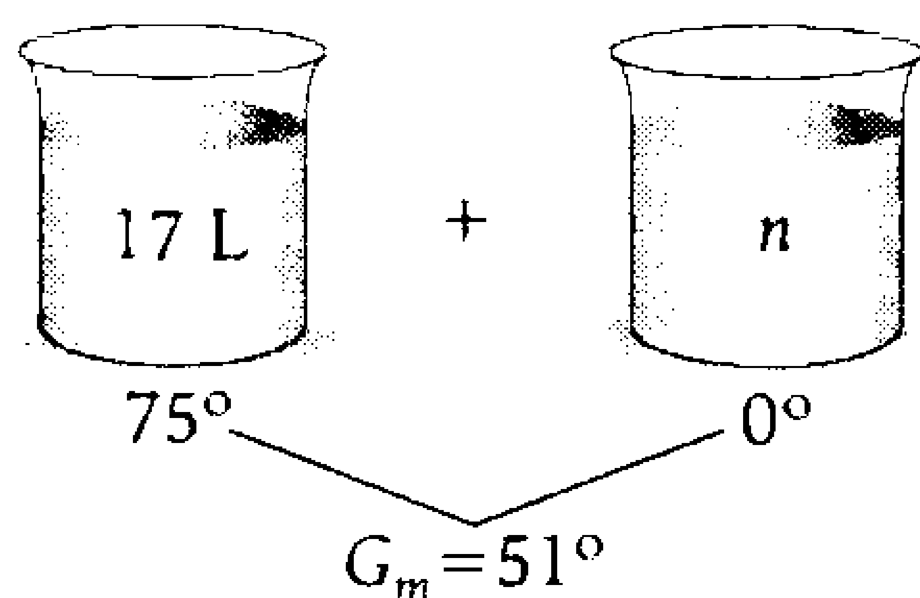
$$G = P_1 + P_2$$

$$\underbrace{15(6)}_{\overset{\circ}{6}} = \underbrace{12 \times a}_{\overset{\circ}{6}} + \underset{\downarrow}{5b}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad 6$$

Solo cumple: $b=6 \wedge a=5$

La mezcla es



$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$51 \times n = 24 \times 17 \rightarrow n = 8$$

Por lo tanto, hay que agregar 8 litros de agua a la mezcla.

Clave A

PROBLEMA N.° 24

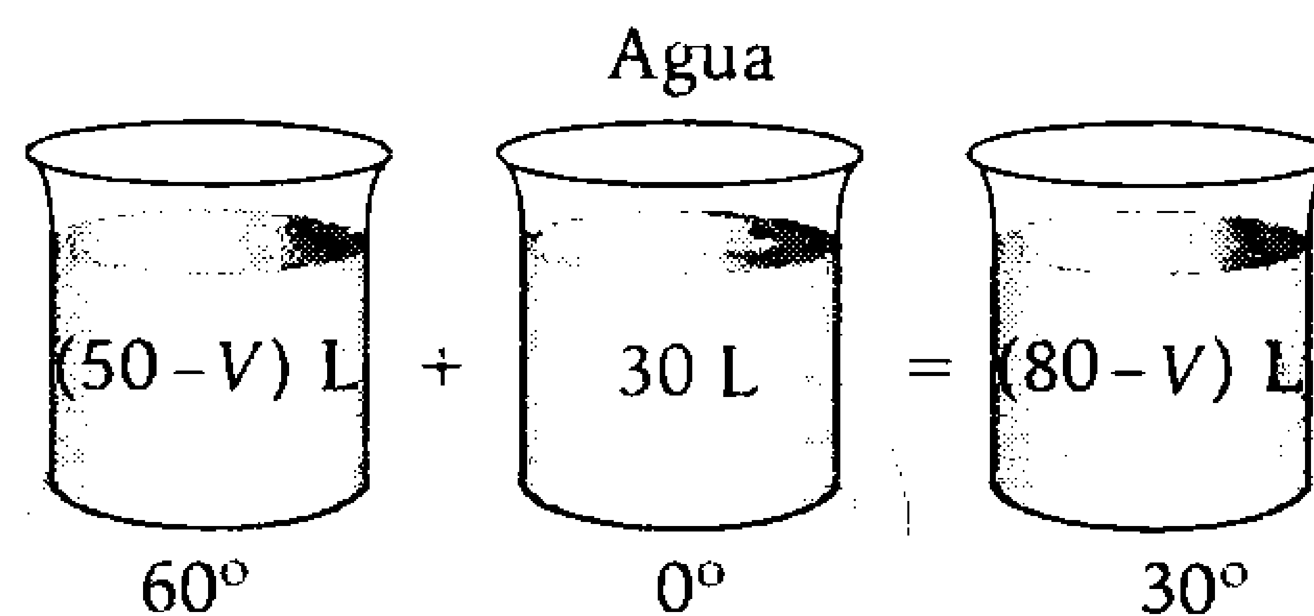
Se tienen 50 litros de alcohol de 60°. ¿Cuántos litros se deben extraer para que al agregarle 30 litros de agua la nueva mezcla sea de 30°?

A) 12 L
B) 18 L
C) 20 L
D) 24 L
E) 32 L

Resolución

Recuerda

Al extraer *V* litros de la mezcla, la pureza no se altera.



Observación

Si todos los componentes de la mezcla intervienen en la misma cantidad, entonces, el grado medio es igual a la $\overline{MA}$ de los grados de los componentes.

Ahora, note que el grado medio es la $\overline{MA}$ de los grados de las componentes, entonces, los volúmenes son iguales.

$$\rightarrow 50 - V = 30$$

$$V = 20 \text{ L}$$

Por lo tanto, hay que extraer
20 litros

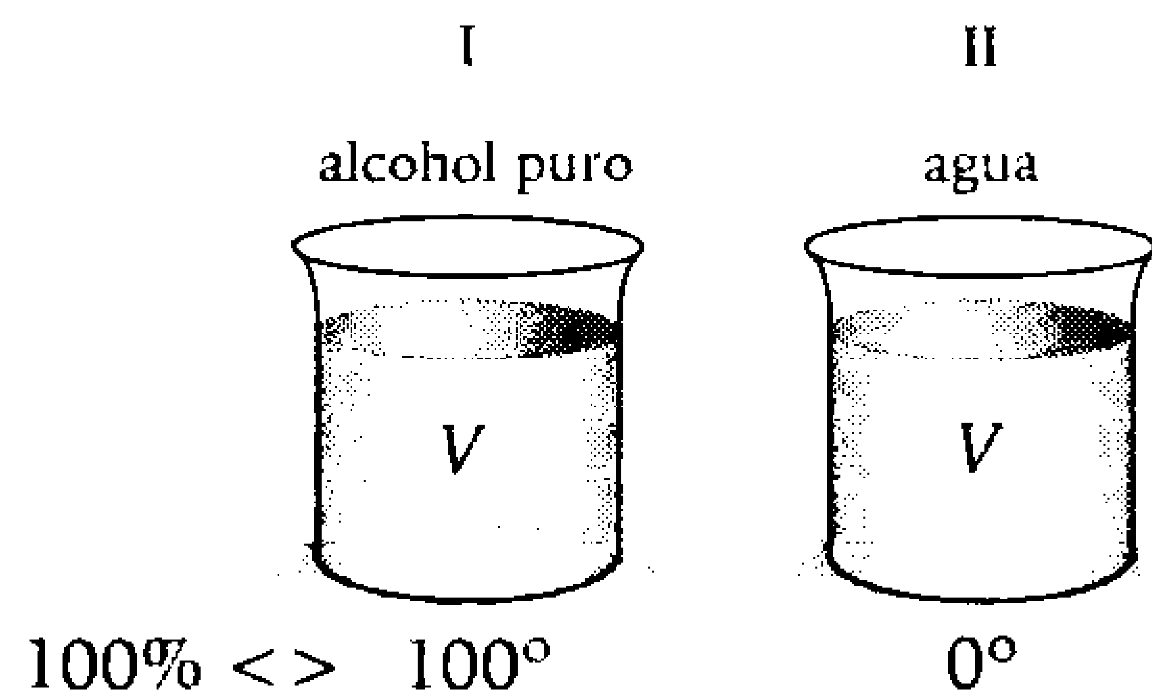
Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Se tienen dos recipientes con el mismo volumen de líquido (en uno alcohol puro y en el otro solo agua). De cada recipiente se extrae la mitad; luego, 1/3; y por último, 1/4 y se intercambian. ¿Cuántos litros de lo que queda en cada recipiente se debe extraer para mezclarlos y obtener 65 L de alcohol de 45°?

A) 39 y 26
B) 40 y 25
C) 60 y 5
D) 30 y 35
E) 50 y 15

Resolución



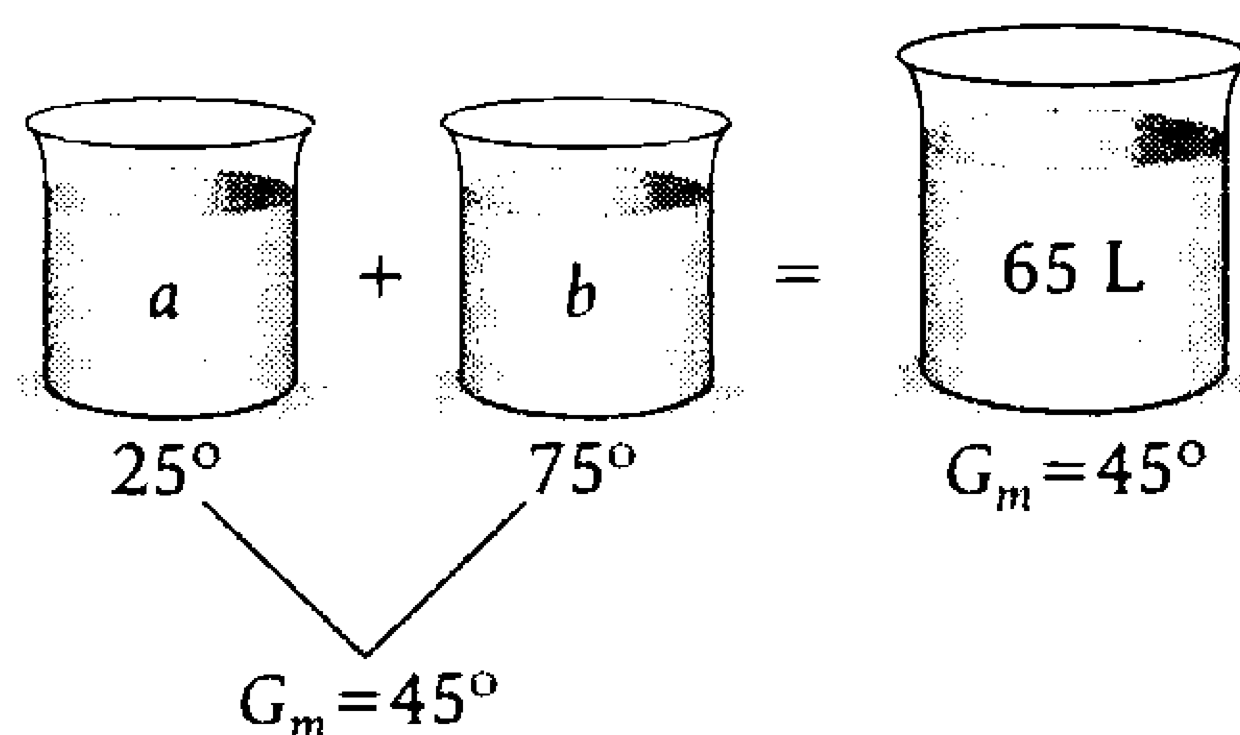
En (I), queda del alcohol puro:

$$100\% \cdot \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 25° <> 25°$$

El 25% es alcohol puro en el primer recipiente que equivale a 25°.

Entonces, en el segundo recipiente está el 75% del alcohol puro, que es de 75°.

Tenemos



Igualando ganancia y pérdida respecto al grado medio (G_m)

$20 \times a = 30b$

$$\rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{\overset{65}{(a+b)}}{3+2} = 13$$

$\therefore\ a=39\ \text{y}\ b=26$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Se mezclan alcoholes de 60°; 48° y 42° en cantidades iguales. Si a esta mezcla se le agregan 91 L de agua, se obtiene alcohol de 36°. Calcule el volumen total de la mezcla.

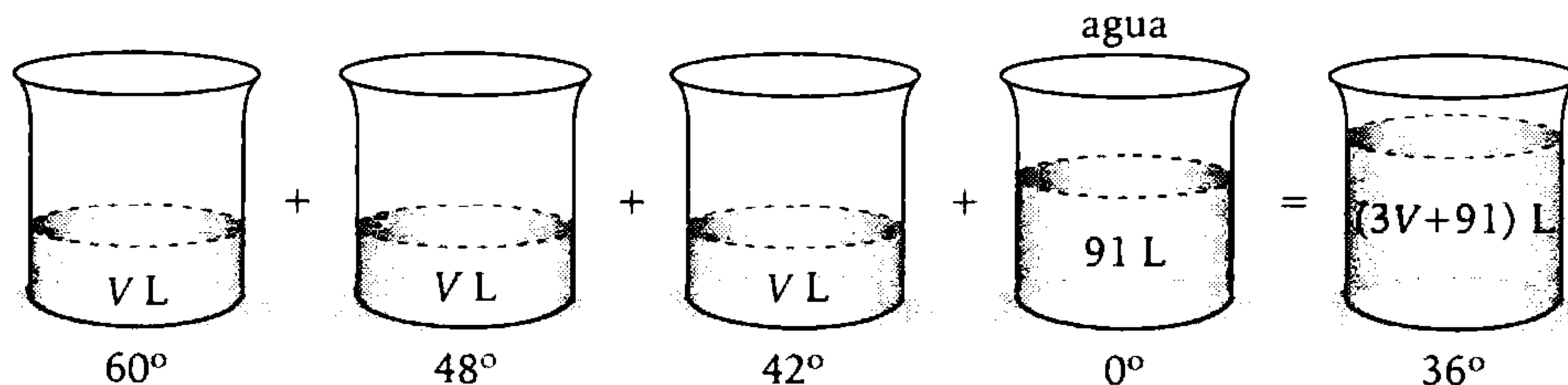
A) 468 L
B) 169 L
C) 234 L
D) 338 L
E) 325 L

Resolución

Observación

Mezclar los tres alcoholes y luego agregarle el agua equivale a mezclar los cuatro ingredientes directamente.

Entonces



Luego

$$\underbrace{36\times(91)}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{24(V)+12(V)+6(V)}_{\text{P. aparente}} \rightarrow V=78$$

Por lo tanto, el volumen total es $3V+91=325$ L

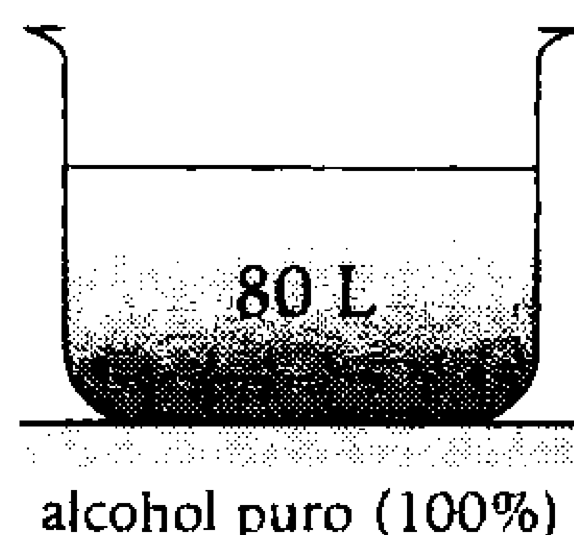
Clave **E**

PROBLEMA N.° 27

De un recipiente de 80 litros de alcohol puro se extrae la quinta parte y luego un octavo de lo que queda. ¿Cuántos litros de agua se debe añadir para que la mezcla sea de 50°?

A) 56 B) 45 C) 60
D) 64 E) 54

Resolución



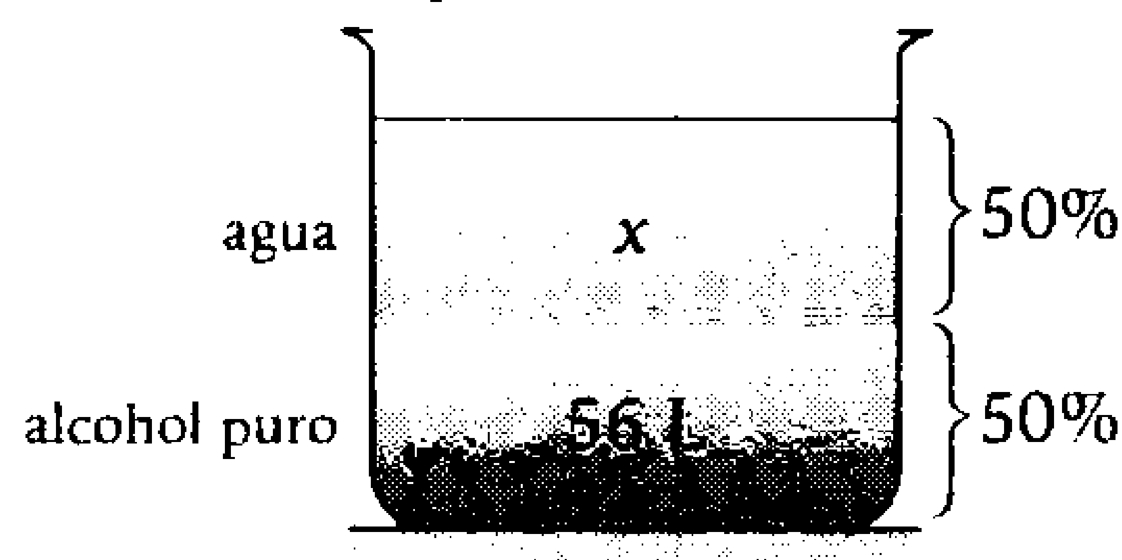
alcohol puro (100%)

Extrae $\frac{1}{5}$ y luego $\frac{1}{8}$

Luego queda de alcohol puro

$$80\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=56 \text{ litros}$$

- Se le agrega x litros de agua y se obtiene de 50°, entonces la mitad es alcohol puro y la otra mitad es agua.



$G_m=50°$ <> 50% es alcohol puro y 50% es agua.

$\rightarrow x=56$

Por lo tanto, se deben añadir 56 litros de agua.

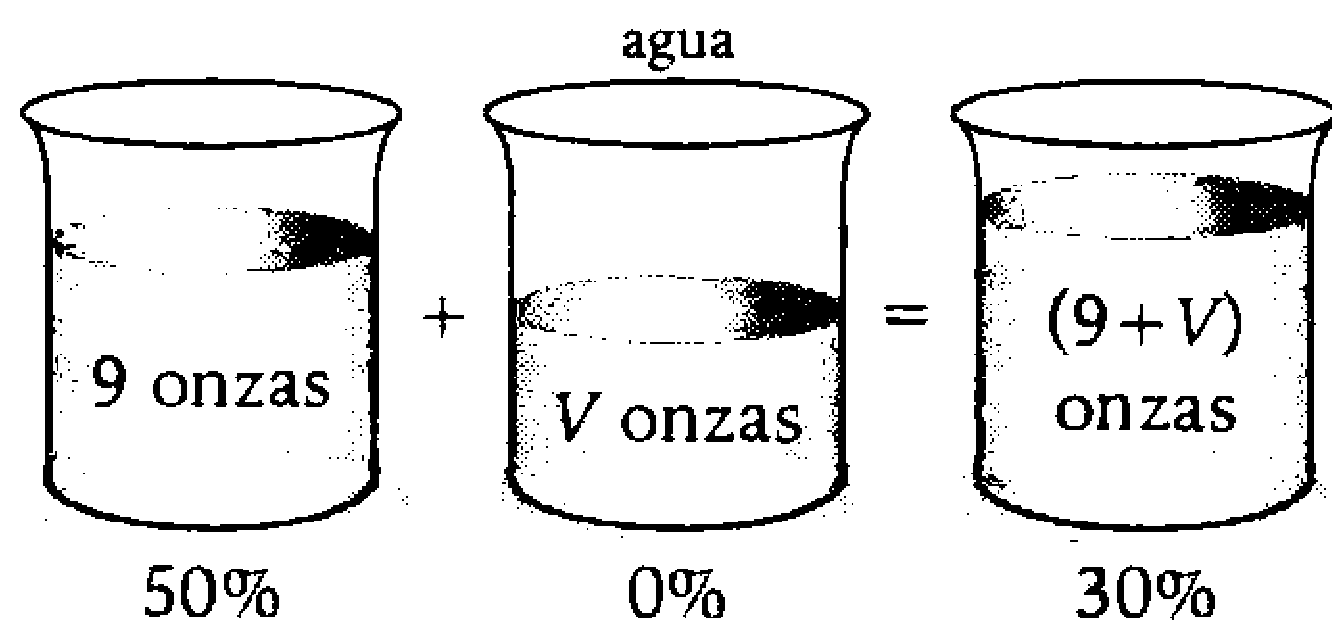
Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

Calcule la cantidad de agua en onzas que se requiere para rebajar al 30% la pureza del contenido de una botella de alcohol de 9 onzas que tiene alcohol al 50%.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución



G. aparente P. aparente

$30\%\,(V) = 20\%\,(9)$

$V=6$ onzas

Por lo tanto, se requiere 6 onzas de agua.

Clave **E**

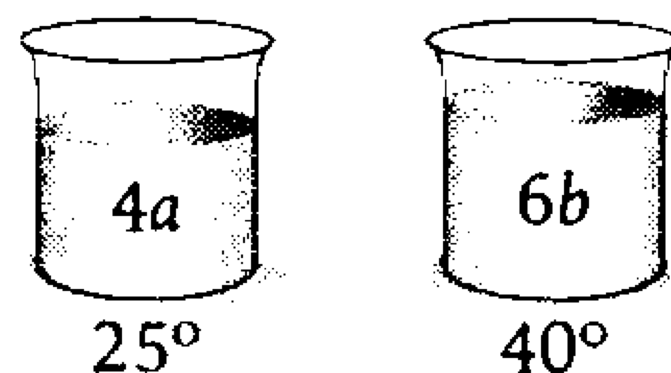
PROBLEMA N.° 29

Se tienen dos mezclas alcohólicas de 25° y 40°. Si de la primera extraemos la cuarta parte y de la segunda la sexta parte para formar una mezcla de $33,\widehat{3}°$, indique en qué relación estarán las cantidades que quedaron.

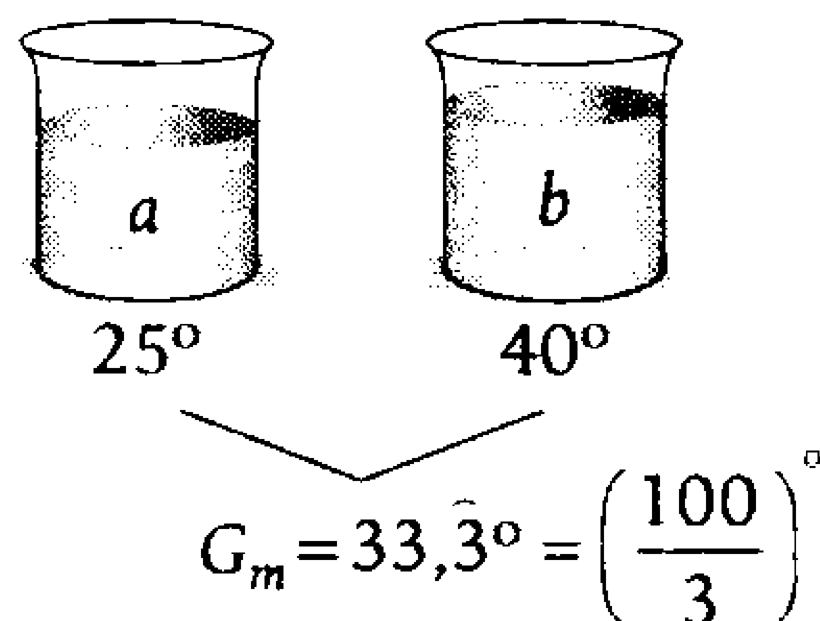
A) 12 a 25 B) 12 a 23 C) 11 a 25
D) 7 a 13 E) 6 a 5

Resolución

Se tiene alcoholes de



Primero se mezcla la cuarta parte del primero y la sexta parte del segundo.



$G_m=33,\widehat{3}° = \left(\frac{100}{3}\right)^{\circ}$

Por ser el grado medio

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{100}{3}-25\right)\times a=\left(40-\frac{100}{3}\right)\times b$$

$$\rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{4}{5}$$

Queda sin utilizar $3a$ y $5b$

La relación es

$$\frac{3a}{5b}=\frac{3}{5}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$$

$$\therefore\ \frac{12}{25}$$

Por lo tanto, estarán en la relación de 12 a 25.

Clave **A**

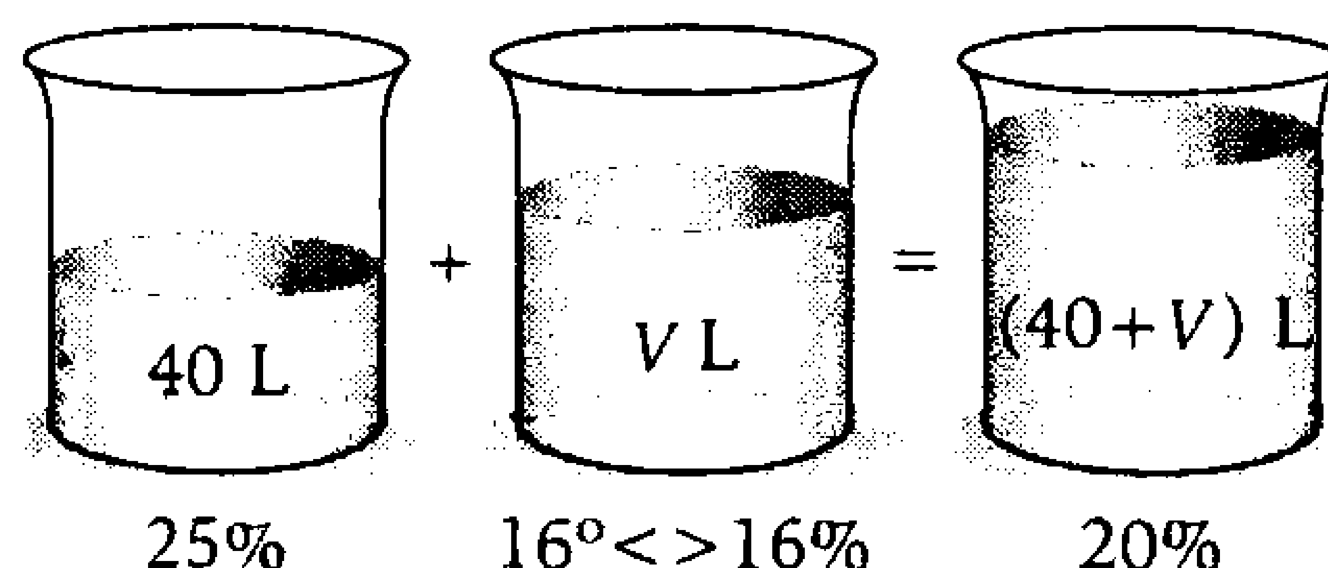
PROBLEMA N.° 30

Un recipiente contiene 40 litros de alcohol al 25% de pureza que luego empieza a ser llenado, mediante un grifo, con un alcohol de 16°, a razón de dos litros por minuto. ¿Qué tiempo deberá pasar para que obtenga un alcohol al 20%?

A) 15 min B) 20 min C) 25 min
D) 28 min E) 32 min

Resolución

En primer lugar, hallaremos el volumen de alcohol de 16° que se necesita, para obtener un alcohol al 20%.



Luego

$$\overbrace{4\%\ (V)}^{\text{G. aparente}} = \overbrace{5\%\ (40)}^{\text{P. aparente}}$$

$V=50$ L

Por lo tanto, como el grifo llena 2 L por minuto, para llenar 50 L necesitará $\frac{50}{2}=25$ minutos.

Clave **C**

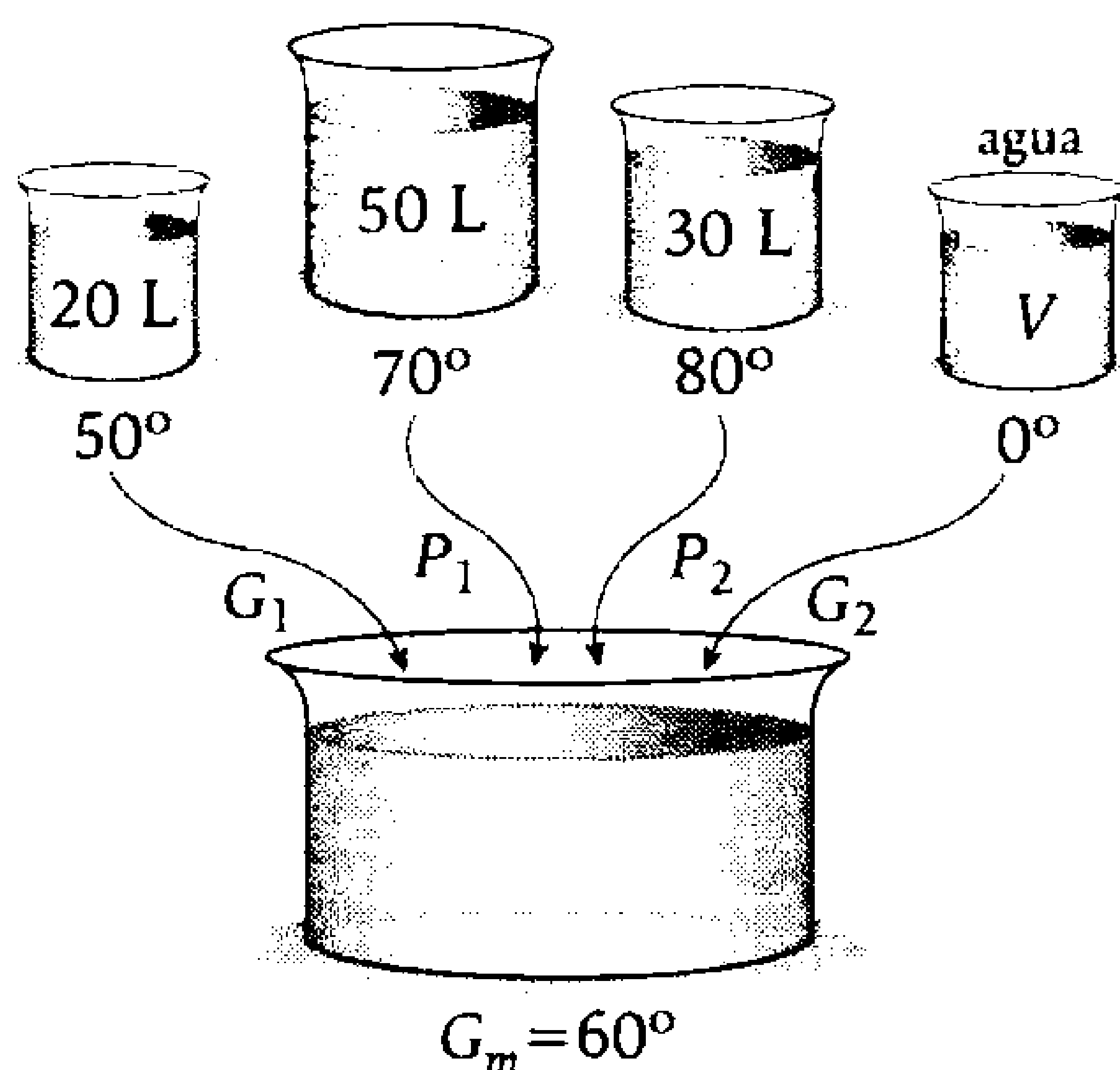
PROBLEMA N.° 31

Se mezclan 20 litros de alcohol de 50° con 50 litros de alcohol de 70° y 30 litros de alcohol al 80% de pureza. ¿Cuántos litros de agua se le debe añadir a esta mezcla para que el volumen de agua represente el 40% del volumen total?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

Resolución

Se mezcla



En la mezcla, el agua es: 40% del total

→ el alcohol es 60% del total <> 60°

Respecto a los grados y el grado medio

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$G_1+G_2 = P_1+P_2$$

$$10°\times 20+60°\times V = 10°\times 50+20°(30)$$

Resolviendo

$V=15$

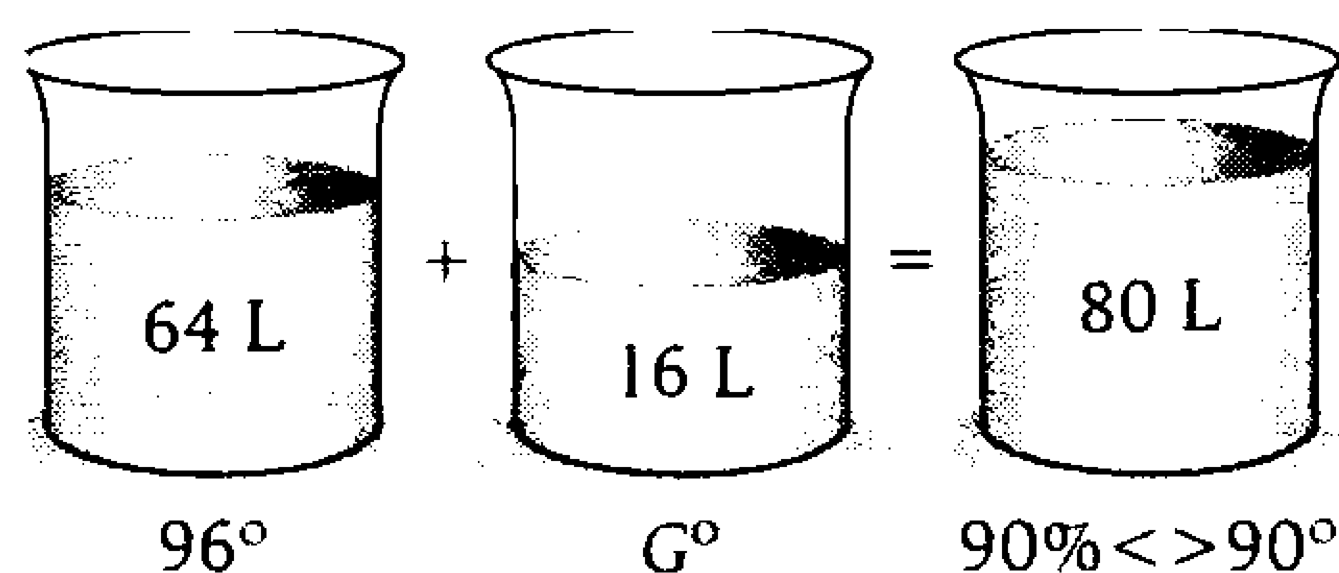
Clave **E**

PROBLEMA N.° 32

¿Cuál debe ser la pureza del alcohol que deberá añadirse a 64 litros de alcohol de 96° para obtener 80 litros de alcohol al 90% de pureza?

A) 51° B) 53°
C) 60°
D) 64° E) 66°

Resolución



Luego

$$\overbrace{(90-G)\times(16)}^{\text{G. aparente}}=\overbrace{6\times(64)}^{\text{P. aparente}}$$

$G=66°$

Por lo tanto, se debe añadir alcohol de 66° de pureza.

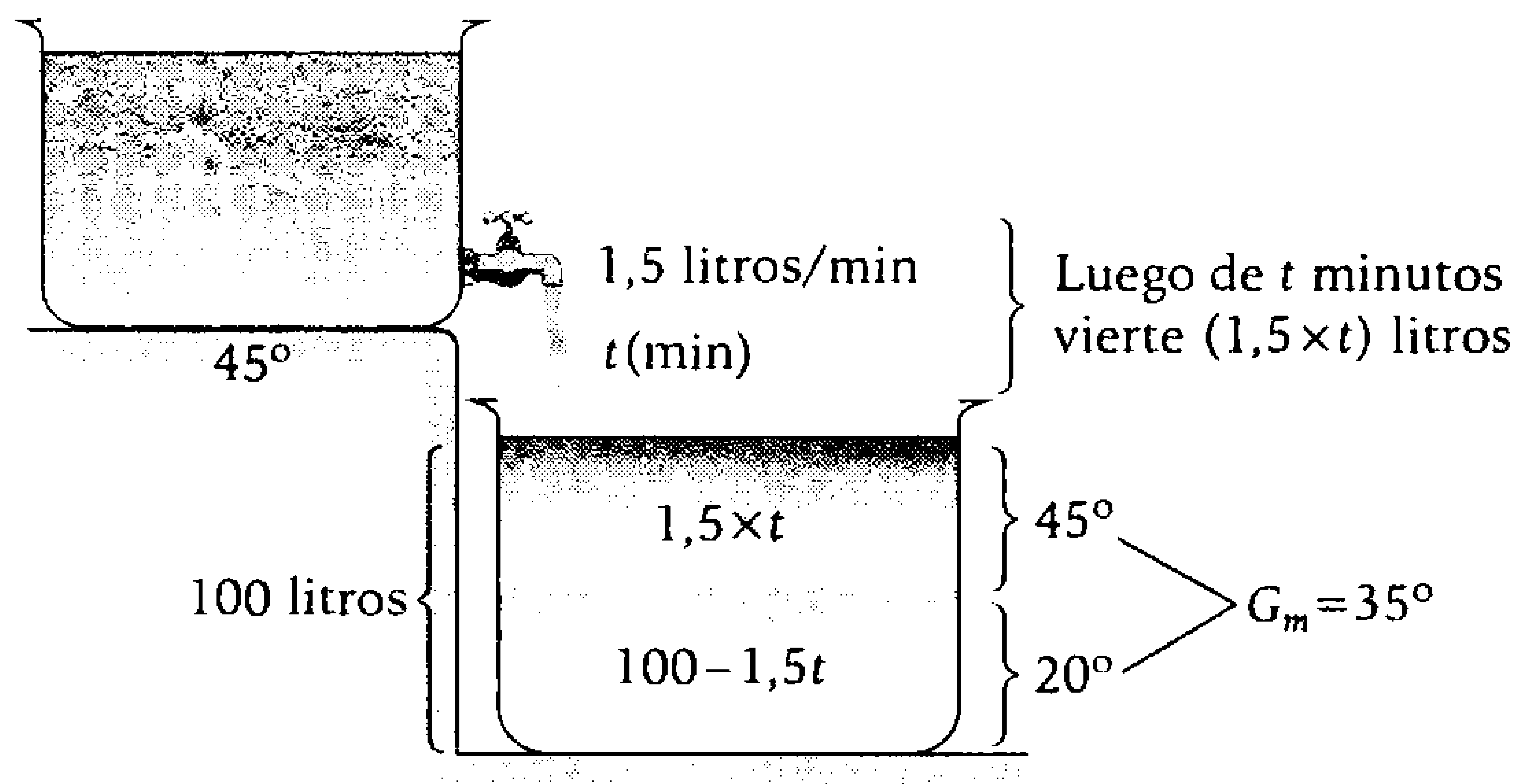
Clave **E**

PROBLEMA N.° 33

Un cilindro que posee alcohol de 45° tiene en la base un grifo que vierte dicho alcohol a razón de 1500 mL por minuto. ¿Qué tiempo debe estar abierto este grifo sobre un recipiente que contiene alcohol al 20% de pureza, para obtener 100 litros de un alcohol de 35°?

A) 20 min B) 25 min C) 35 min D) 40 min E) 50 min

Resolución



$(35°-20°)\times(100-1{,}5t)=(45°-35°)\times(1{,}5t)$

$15\times100-22{,}5t=15t \rightarrow 1500=37{,}5t \rightarrow 40=t$

Por lo tanto, el grifo estará abierto 40 minutos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

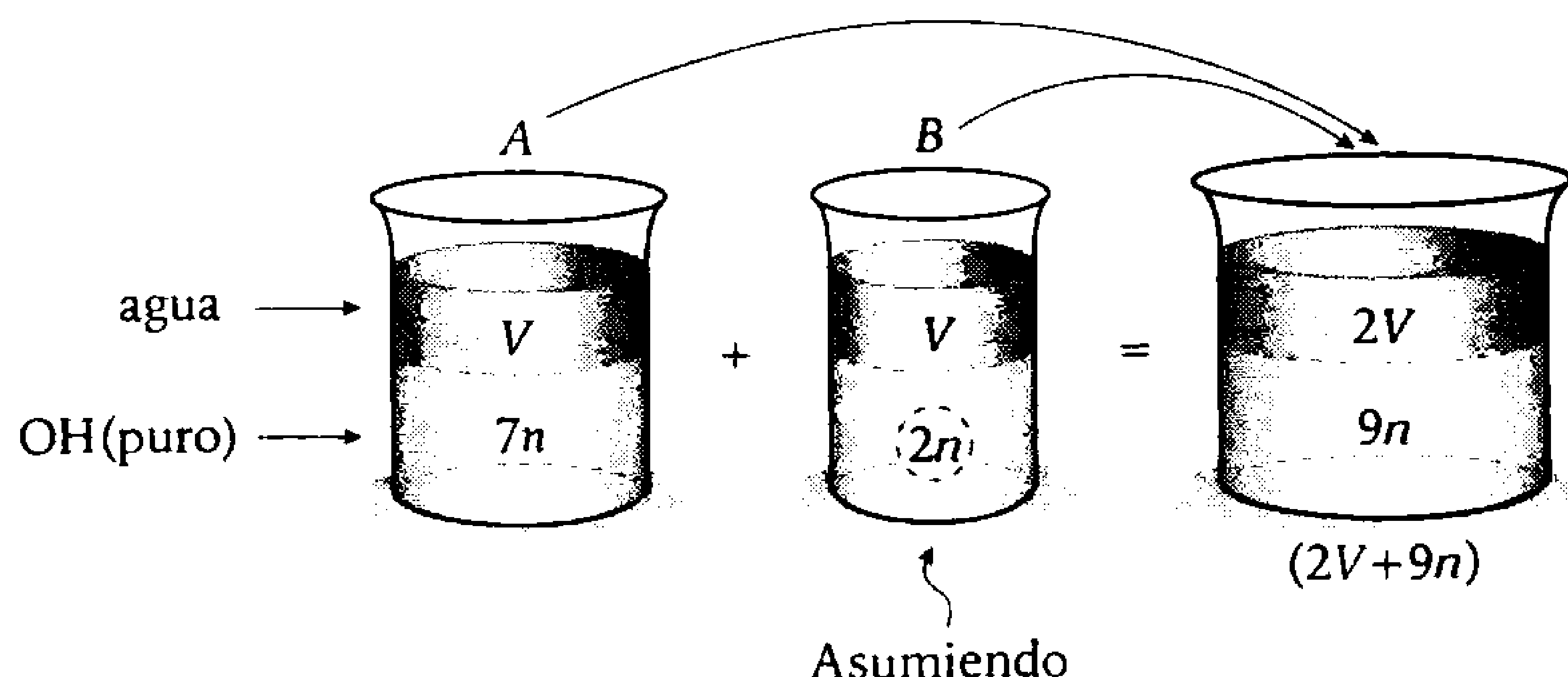
Se tienen dos recipientes A y B completamente llenos. El primero tiene el triple de capacidad que el segundo y ambos contienen la misma cantidad de agua, pero A contiene 2,5 veces más alcohol que B. Si se mezclan ambos contenidos en un tercer recipiente, ¿qué pureza de alcohol se obtendrá?

A) 90° B) 85° C) 70° D) 60° E) 55°

Resolución

Como A contiene 2,5 veces más alcohol que B, entonces, la cantidad de alcohol de A es 3,5 veces la cantidad de alcohol que contiene B.

Tenemos



Además

$V_A=3V_B$

$V+7n=3\times(V+2n)$

$2v=n$

Luego, la pureza del alcohol será

$$\left(\frac{9n}{2V+9n}\right)\times 100^\circ=90^\circ$$

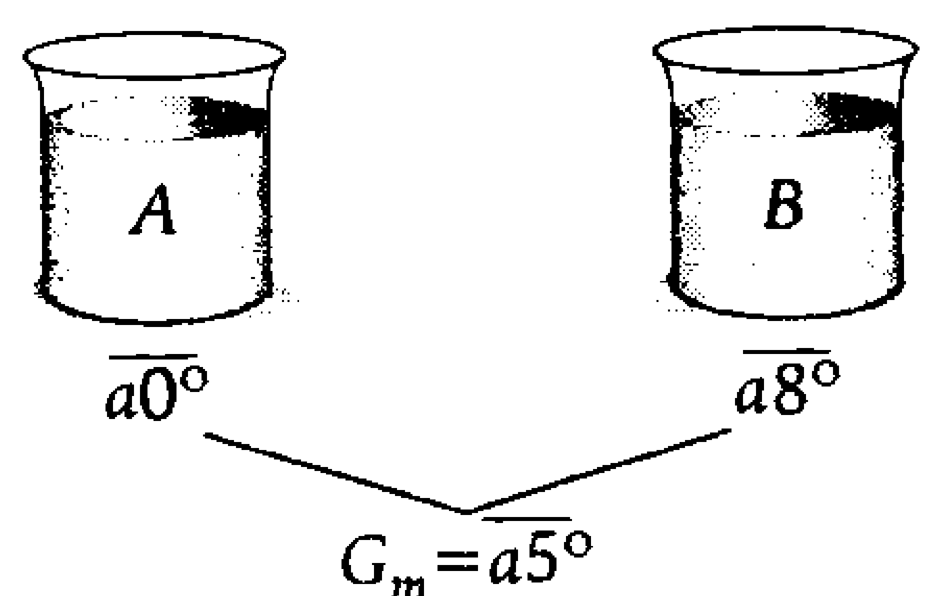
Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

Se mezcla vino de $\overline{a0}^\circ$ con vino de $\overline{a8}^\circ$ y se obtiene un grado medio de $\overline{a5}^\circ$. Si se toman 2/3 de la primera sustancia, ¿qué fracción de la segunda se debe tomar para que al mezclarlas el grado medio sea $\overline{a4}^\circ$?

A) 2/5 B) 3/5 C) 1/5
D) 4/5 E) 4/13

Resolución



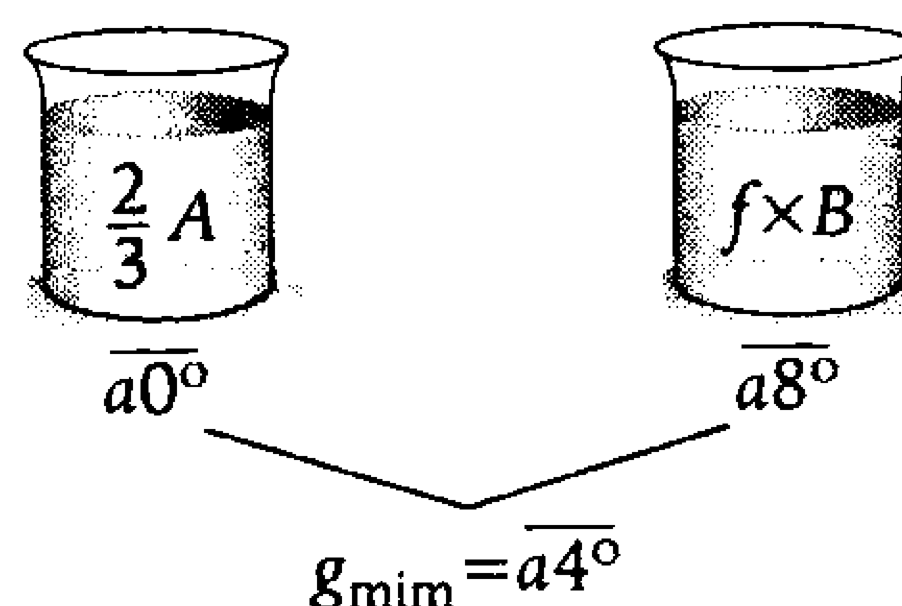
$G_m=\overline{a5}^\circ$

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(\overline{a5}^\circ-\overline{a0}^\circ)\times A=(\overline{a8}^\circ-\overline{a5}^\circ)\times 8$$

$$5\times A=3\times B \rightarrow \frac{A}{B}=\frac{3}{5}$$

Se toman 2/3 de la primera y una fracción f de la segunda y se obtiene alcohol de $\overline{a4}^\circ$.



$g_{mim}=\overline{a4}^\circ$

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$4^\circ\times\left(\frac{2}{3}A\right)=4^\circ\times f\times B$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{A}{B}=f \rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=f \rightarrow \frac{2}{5}=f$$

Por lo tanto, la fracción que se toma es 2/5.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 36

Se desea mezclar tres tipos de alcohol de 25°; 40° y 30° para obtener alcohol de 32°. Sabiendo que las cantidades de agua y alcohol puro en litros de cada tipo son enteras y mínimas, ¿qué cantidad de alcohol puro hay en el segundo tipo?

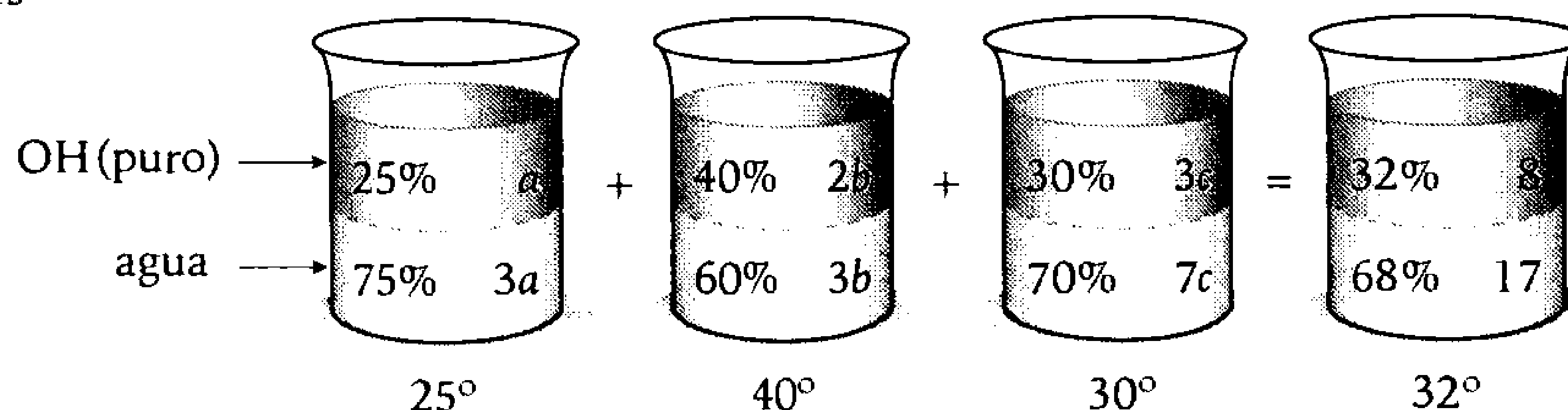
A) 5 L B) 8 L C) 4 L
D) 10 L E) 1 L

Resolución

Recuerda

Un alcohol de G^o, indica que el $G\%$ del volumen total es alcohol puro.

Entonces



Luego, la relación de OH (puro) y agua en la mezcla final es

$$\frac{a+2b+3c}{3a+3b+7c}=\frac{8}{17} \rightarrow 7a+5c=10b$$

Como las cantidades de agua y alcohol puro en litros de cada tipo son enteras y mínimas, entonces, en

$$\begin{array}{ccc} 7a & +5c & =10b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 4 \end{array}$$

Por lo tanto, del segundo tipo de alcohol (40°) hay 8 litros de alcohol puro.

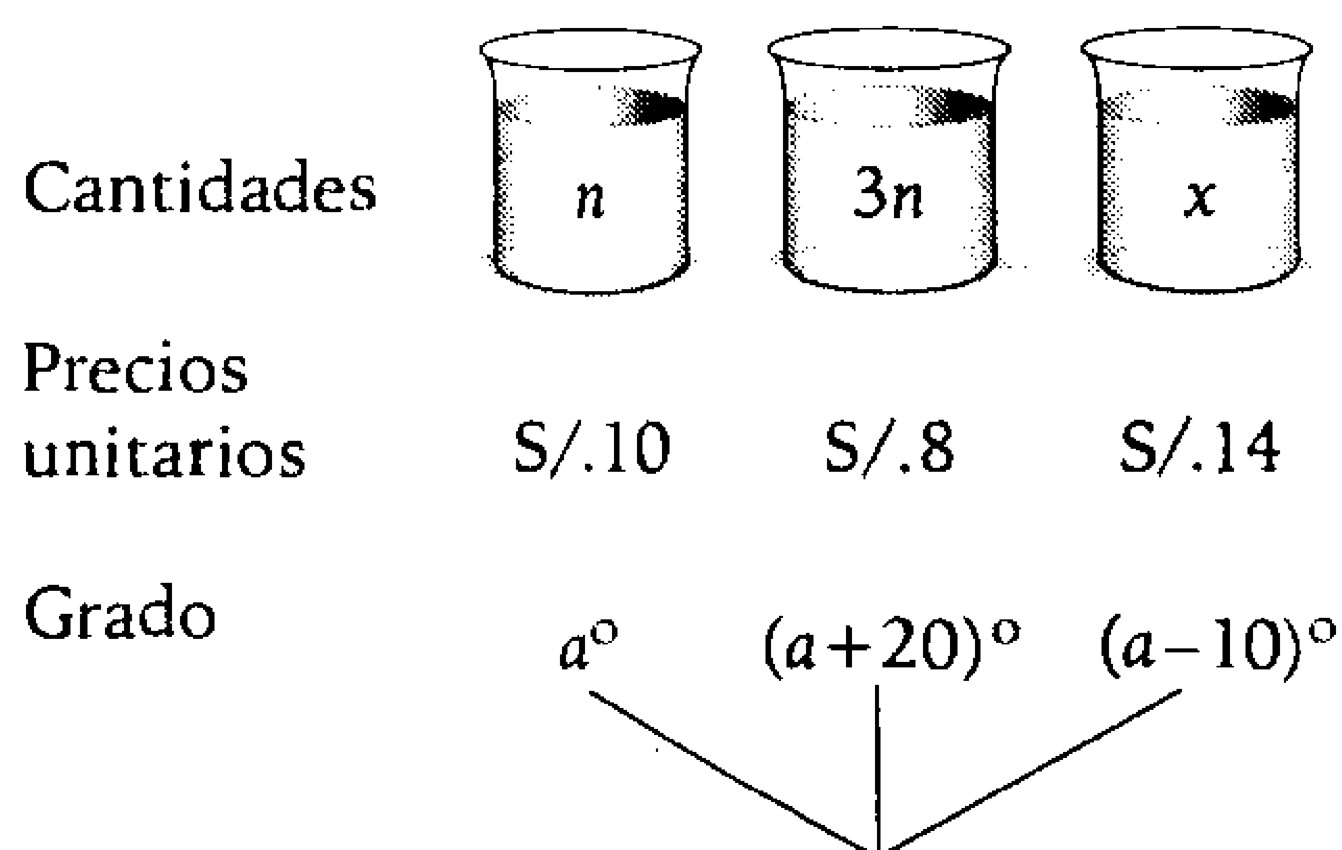
Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

Se tienen tres mezclas alcohólicas de a^o; $(a+20)^o$ y $(a-10)^o$. Al mezclarlas se tiene una mezcla de $9\frac{1}{11}$ grados de pureza, tal que al venderla a S/.15 el litro se gana el 25%. Calcule a, si los precios de dichas mezclas son 10; 8 y 14 soles por litros respectivamente, además, el peso de las dos primeras está en la relación de 1 a 3.

A) 10 B) 12
C) 14
D) 16 E) 18

Resolución



De la mezcla $\begin{cases} \text{Precio medio: } P_m=12 \\ \text{Grado medio: } G_m=\left(\frac{100}{11}\right)^o \end{cases}$

- Respecto al precio medio

$$(\text{Ganancia}) = (\text{Pérdida})$$

$$(12-10)\times n + (12-8)\times 3n = (14-12)\times x$$

$$2n + 12n = 2x$$

$$7n = x$$

- Respecto al grado medio

$$G_m = \frac{n\times a^\circ + 3n\times(a+20)^\circ + 7n\times(a-10)^\circ}{n+3n+7n}$$

$$G_m = \frac{100}{11}$$

Por lo tanto, resolviendo se obtiene $a=10$.

Clave **A**

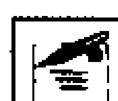
PROBLEMA N.° 38

A 40 litros de alcohol de 40° se le agrega agua para reducir su pureza a la tercera parte. Si la nueva mezcla se quiere vender para ganar el 33,3%, calcule el precio de venta de cada litro de mezcla. Considere que el precio del litro de alcohol puro es S/.30.

A) S/.3,3 B) S/.3,50 C) S/.4,00
D) S/.4,30 E) S/.5,$\widehat{3}$

Resolución

Por condición, el grado final de la mezcla es $\left(\frac{40}{3}\right)^\circ$.

 **Nota**

Asumiremos que el precio del alcohol es proporcional a su pureza.

Además, el precio de un litro de alcohol puro es S/.30; entonces, si el precio de un litro de la mezcla es P, se tiene

$$\frac{30}{100^\circ} = \frac{P}{\left(\frac{40}{3}\right)^\circ} \quad ; \quad P = \text{S/.}4$$

Piden

$$P_V = P_m + G$$

$$G:\ 33{,}3\%\, P_m <> \frac{1}{3}\times P_m$$

$$P_V = \frac{4}{3}P_m = \frac{4}{3}(4)$$

$$P_V = \text{S/.}5{,}\hat{3}$$

Por lo tanto, el precio de venta de cada litro de mezcla es S/.5,3

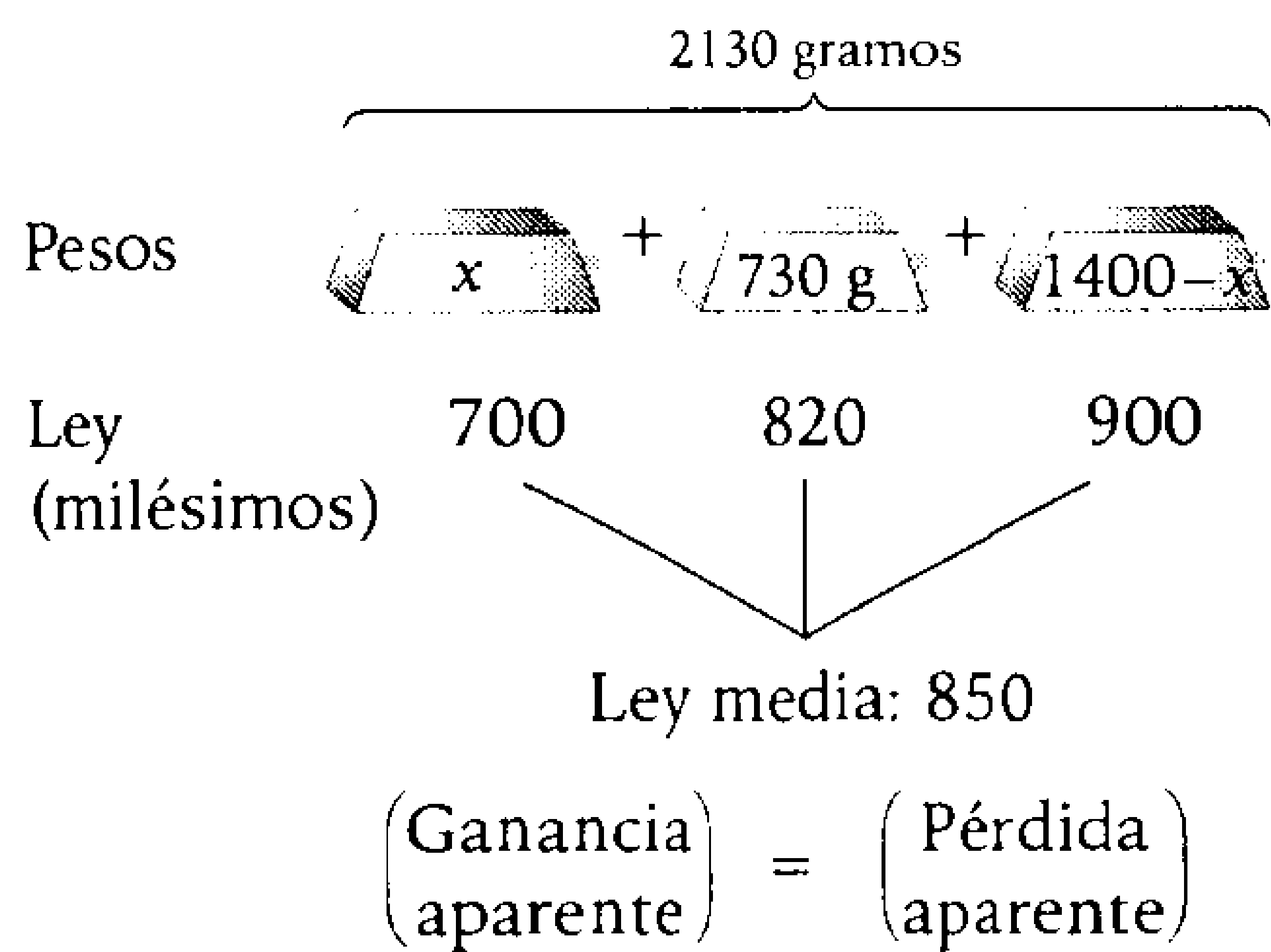
Clave **E**

PROBLEMA N.° 39

Se tienen tres lingotes de plata y cobre: uno de ley 0,700; otro de ley 0,820; y el tercero de ley 0,900. Se quiere obtener un lingote de ley 0,850, conteniendo 730 gramos del segundo y que además pese 2130 gramos. ¿Cuántos gramos es preciso tomar del primer lingote?

A) 240,5
B) 230
C) 235,6
D) 481
E) 145,7

Resolución



$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

Entonces

$$150x + 30\times(730) = 50\times(1400 - x)$$

$$\rightarrow\ 15x + 2190 = 7000 - 5x$$

$$\rightarrow\ x = 240{,}5$$

Por lo tanto, del primero se utiliza 240,5 gramos.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 40

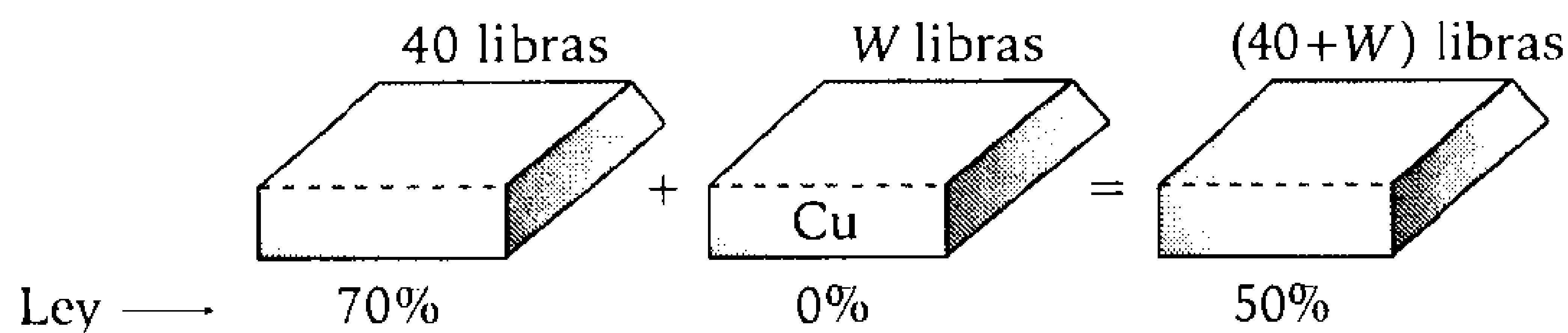
En una aleación, el 30% es cobre, ¿cuántas libras de cobre deben añadirse a 40 libras de esta aleación para que resulte una aleación con 50% de cobre?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 20 E) 25

Resolución

Tenga en cuenta que

ley + liga = 1



Luego

$$\underbrace{50\%\ (W)}_{\text{G. aparente}} = \underbrace{20\%\ (40)}_{\text{P. aparente}} \rightarrow \quad W = 16$$

Por lo tanto, se deben añadir 16 libras de cobre.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 41

¿Cuántos kilogramos de un lingote de oro de ley 0,650 serán necesarios fundir con otro lingote de oro de 4 kg y 18 kilates para obtener una liga de 310 milésimos?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución

Recuerda

- Solo para el oro

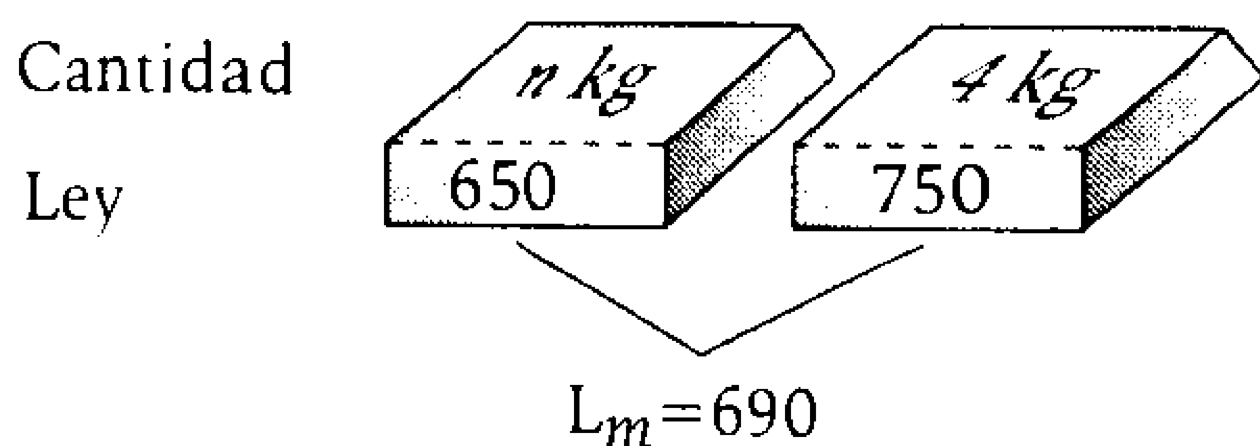
$$\text{Ley}=\frac{(\text{peso de oro puro})}{(\text{peso total})}=\frac{(\text{n.° de kilates})}{24}$$

Si es 18 kilates, su ley es

$$\frac{18}{24}=0,750 <> 750 \text{ milésimos}$$

- Ley+Liga=1

Se mezcla



$L_m=690$

De la mezcla:

Liga: 310 milésimos

Ley: 1000–310=690 milésimos

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(690-650)\times n=(750-690)\times 4$$

También

$$40\times n=60\times 4$$

$$\rightarrow \quad n=6$$

Por lo tanto, se utilizan: 6 kg.

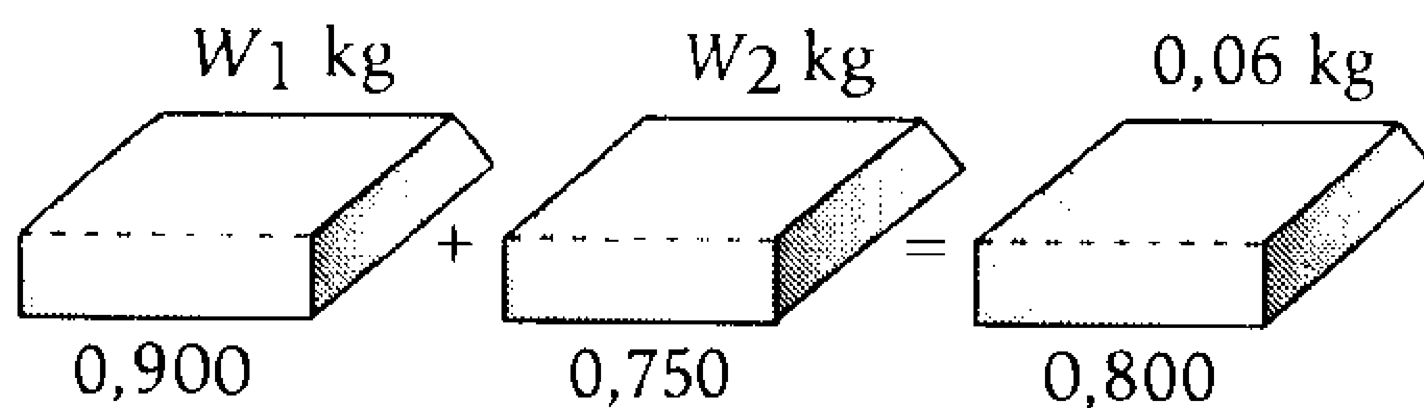
Clave C

PROBLEMA N.° 42

Se tiene plata de ley 0,900 y plata de ley 0,750. ¿Cuántos gramos hay que tomar de cada una para obtener 0,06 kg de plata de ley 0,800? Indique como respuesta el tanto por ciento que representa la cantidad que participa de la primera aleación respecto de la segunda.

A) 25% B) 40% C) 50%
D) 60% E) 75%

Resolución



Luego

$$\overbrace{0,050(W_2)}^{\text{G. aparente}}=\overbrace{0,100(W_1)}^{\text{P. aparente}}$$

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{1}{2} <> 50\%$$

Por lo tanto, la cantidad de la primera aleación representa el 50% de la segunda.

Clave C

PROBLEMA N.° 43

Se retiraron de la circulación tres millones de monedas de 1 peseta que luego se fundieron para fabricar esos tres millones de pesetas en monedas de 5 pesetas. ¿Qué pesos de plata y cobre hubo que agregar o quitar a la fundición?
Las monedas retiradas de la circulación perdieron, por su uso, 1/600 de su peso.
Peso de las monedas de una peseta: 5 gramos y ley de la misma 0,835.
Peso de la moneda de 5 pesetas: 25 gramos y su ley de 0,900.

A) Aumentar 999,850 kg de plata.
B) Aumentar 995,875 kg de plata y disminuir 970,875 kg de cobre.
C) Disminuir 970,875 kg de cobre.
D) Aumentar 80 kg de plata y disminuir 50 kg de cobre.
E) Disminuir 50 kg de cobre.

Resolución

De los datos tenemos

- 3 millones de pesetas en monedas de 5 pesetas, son necesarias: $\frac{3\times 10^6}{5}=600\,000$ monedas.
- De las monedas de 1 peseta se perdió 1/600 de su peso; solo se tendrá 599/600 de su peso.

$$\begin{pmatrix}\text{Peso de}\\ \text{plata}\end{pmatrix}=(\text{ley})(\text{peso total})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Peso de}\\ \text{cobre}\end{pmatrix}=(\text{liga})(\text{peso total})$$

- Compararemos el peso de plata y cobre en las monedas retiradas de circulación con las que se fabricarán.

	Se retira de circulación	Se fabricarán
n.° de monedas	3 000 000	600 000
Peso de cada una	$\left(5\times\frac{599}{600}\right)$ g	25 g
Ley	0,835	0,900
Liga	0,165	0,100
Peso de plata	$3\,000\,000\times 5\times\frac{599}{600}\times(0,835)=12\ 504\ 125$	$600\,000\times 25\times(0,900)=13\ 500\ 000$
Peso de cobre	$3\,000\,000\times 5\times\frac{599}{600}\times(0,165)=2\ 470\ 875$	$600\,000\times 25\times(0,100)=1\ 500\ 000$

Entonces

- Debe aumentar plata: 13 500 000 − 12 504125 = 995875 g < > 995,875 kg
- Debe disminuir cobre: 2 470 875 − 1 500 000 = 970 875 g < > 970,875 kg

Clave B

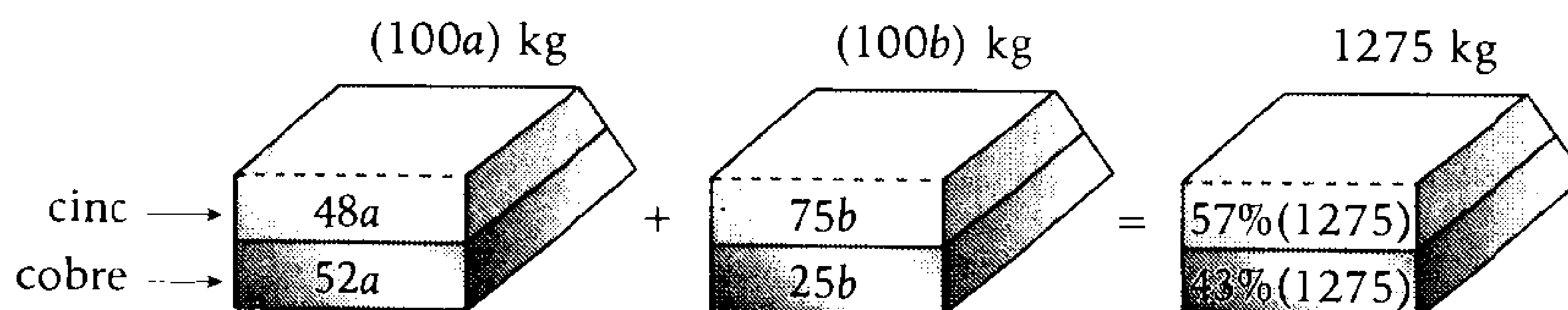
PROBLEMA N.° 44

Se han preparado dos soldaduras de cinc y cobre: una contiene 48% de cinc y 52% de cobre, y la otra 75% de cinc y 25% de cobre. Si se quiere preparar 1275 kg de soldadura, con 57% de cinc y 43% de cobre, ¿qué peso ha de tomarse de la primera?

A) 800 kg B) 810 kg C) 820 kg D) 830 kg E) 850 kg

Resolución

Tomamos convenientemente



Luego, la relación final de cinc y cobre es $\frac{48a+75b}{52a+25b}=\frac{57}{43} \rightarrow a=2b$

Además

$$100a+100b=1275$$
$$\downarrow$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$150a=1275$$
$$50a=425$$

Piden el peso de la primera soldadura. $100a=850$

Por lo tanto, se deben tomar 850 kg de la primera soldadura.

Clave E

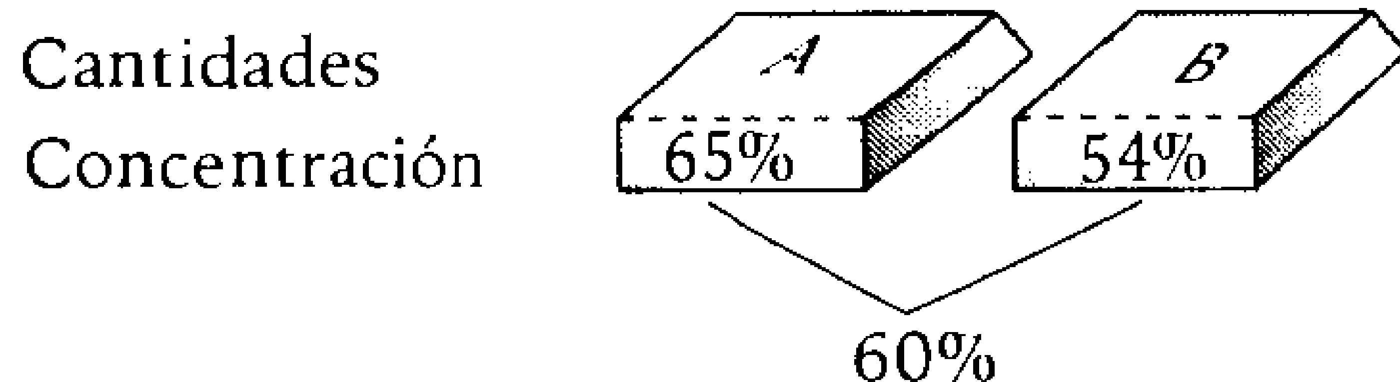
PROBLEMA N.° 45

De dos minas diferentes se extrae mineral de hierro: el de la primera contiene un 65 por 100 de hierro; y el de la otra, un 54 por 100. Se mezclan los minerales que se extraen en el día de cada mina y se obtiene un mineral con el 60 por 100 de hierro. La extracción del primer mineral cuesta S/.175 la tonelada métrica; y la del segundo, S/.147,50. Se vende la mezcla obteniéndose un beneficio que es los 2/13 de los gastos de extracción. ¿Cuántas toneladas métricas de mineral se ha sacado en total de las minas durante un mes de 30 días, si se sabe que se ha obtenido un beneficio de S/.275 000 en ese tiempo?

A) 6000 B) 5000 C) 11 000
D) 16 000 E) 21 000

Resolución

En un mes se extrae de cada mina



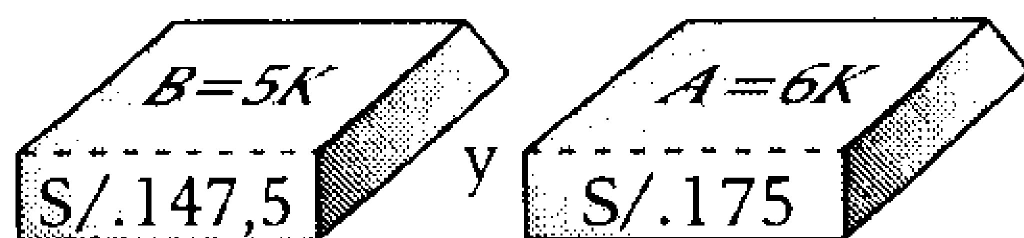
De la mezcla:

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\\text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\\text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$(60\%-54\%)B=(65\%-60\%)\times A$$

$$6\%\times B=5\%\times A \rightarrow \frac{B}{A}=\frac{5}{6}$$

Entonces



Por dato:

$$\text{ganancia}=\frac{2}{13}(\text{costo total})$$

$$275\,000=\frac{2}{13}((147,5)\times 5K+(175)\times 6K)$$

Resolviendo: $K=1000$

Por lo tanto, en total se extrae $A+B=11K$

$A+B=11\times 1000=11\ 000$ toneladas.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 46

Una barra de latón de 8 kg contiene el 61 por 100 de cobre; otra del mismo metal, de 7 kg, el 65 por 100; y una tercera, de 5 kg, el 60 por 100. ¿Qué tanto por ciento de cobre contendrá la barra que resulte de la fundición de las tres anteriores?

A) 62,15%
B) 61,25%
C) 73,45%
D) 58%
E) 43,25%

Resolución

Observación

En una mezcla, cada ingrediente conserva su propia naturaleza.

Entonces, para hallar el peso del cobre en la aleación final, sumaremos

$$61\%(8)+65\%(7)+60\%(5)=12,43\text{ kg}$$

Además, el peso total de la aleación resultante es 20 kg.

Luego, piden el tanto por ciento de cobre que contiene la aleación resultante.

$$\therefore\ \frac{12,43}{20}\times 100\% = 62,15\%$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 47

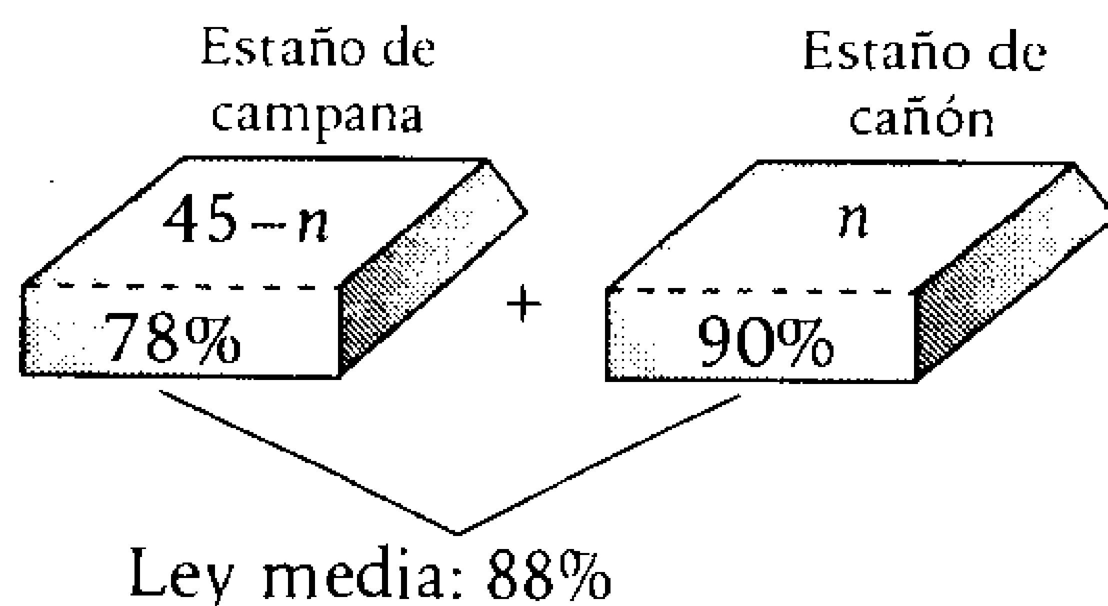
Hay que hacer nueve cojinetes, de 5 kg cada uno, con porciones de dos lingotes resultantes de la fundición de una campana y de un cañón; para esto se desea saber qué cantidad habrá que tomar de cada lingote. Considere que el bronce de las campanas se compone de 78 partes, en peso, de cobre y 22 de estaño; el de los cañones de 90 y 10 y el de los cojinetes de 88 y 12, respectivamente.

A) 30 kg y 15 kg
B) 40 kg y 5 kg
C) 32,5 kg y 12,5 kg
D) 37,5 kg y 7,5 kg
E) 25 kg y 20 kg

Resolución

Se obtiene

$$9\times(5\text{kg}) = 45\text{kg de mezcla}$$



De la mezcla

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$10\%(45-n) = 2\%(n) \quad\rightarrow\quad 450-10n=2n$$

$$\rightarrow \quad 37,5=n$$

Por lo tanto, las cantidades de cada uno son:

$$n=37,5\text{ kg} \rightarrow 45-n=7,5\text{ kg}$$

Clave **D**

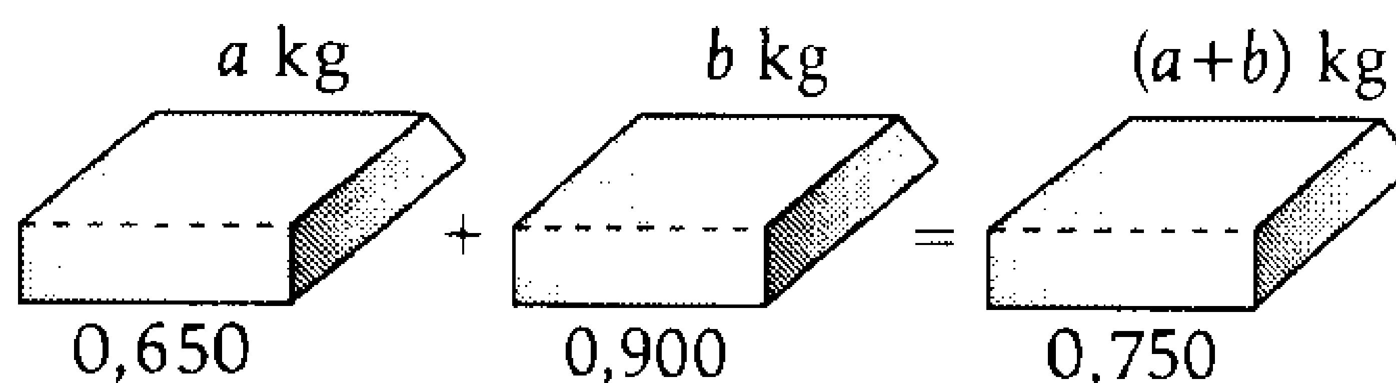
PROBLEMA N.° 48

Se dispone de varios lingotes iguales de 1 kg y de 0,650 de ley, además, se tienen otros lingotes de 1 kg y de 0,900 de ley. ¿Cuántos lingotes de cada clase hay que tomar para que luego de efectuar su aleación se obtenga un lingote de 0,750 de ley, cuyo peso esté comprendido entre 35 y 44 kg?

A) 21 y 18
B) 20 y 18
C) 20 y 16
D) 24 y 16
E) 24 y 18

Resolución

Tomamos, a lingotes de 1 kg y 0,650 de ley cada uno, con b lingotes de 1 kg y 0,900 de ley cada uno. Entonces, tenemos:



Luego

$$\underbrace{0{,}100\times(a)}_{\text{G. aparente}}=\underbrace{0{,}150\times(b)}_{\text{P. aparente}}$$

$$\left.\frac{a}{b}=\frac{3}{2}\right\}\begin{matrix} a=3n \\ b=2n \end{matrix}$$

Además

$35 < a+b < 44$

$35 < 5n < 44;\ n \in \mathbb{Z}^+$

$\downarrow$

8

Por lo tanto, se deben tomar: 24 lingotes de ley 0,650 y 16 lingotes de ley 0,900.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 49

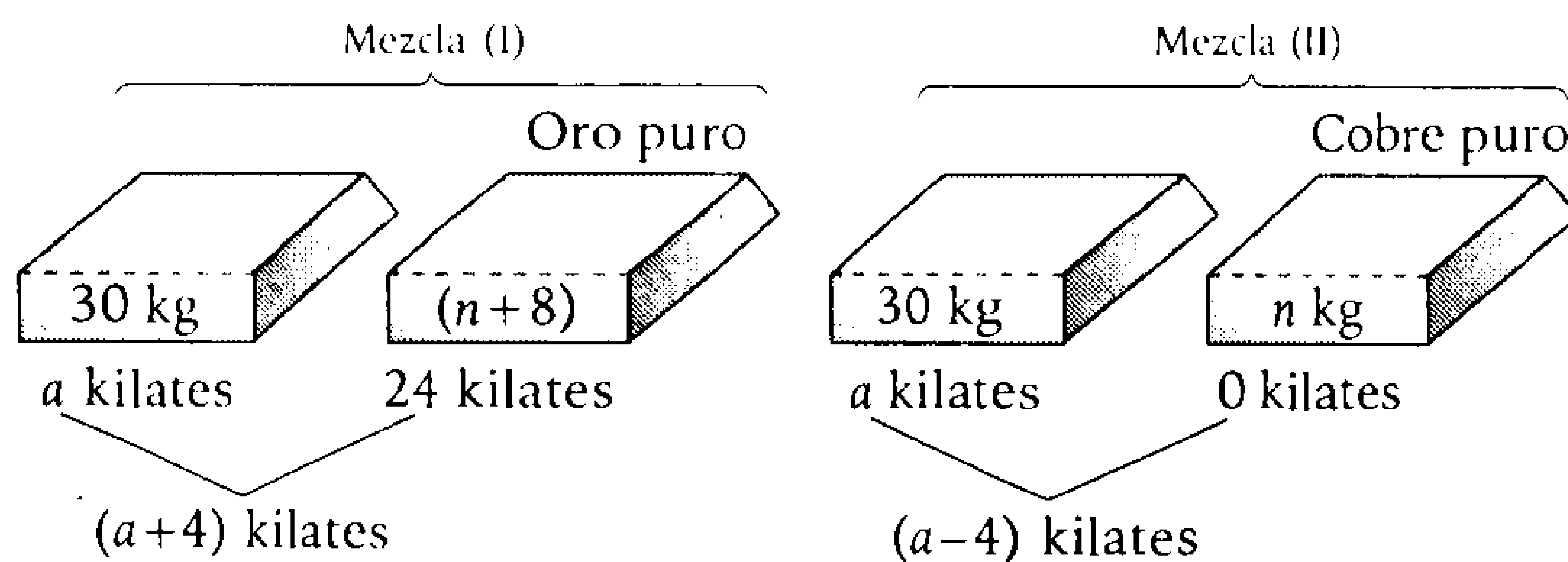
Se desea variar la ley de un lingote de 30 kg en cuatro kilates. Si la cantidad de oro puro que se necesitaría excede en 8 kg a la cantidad de cobre que se podría utilizar para el mismo fin, halle la ley en kilates de la aleación que resultaría al fundir las cantidades de oro puro y de cobre indicados.

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Resolución

Para variar en 4 kilates hay dos posibilidades

- Aumentar en 4 kilates al aumentar oro puro.
- Disminuir en 4 kilates al aumentar cobre puro.



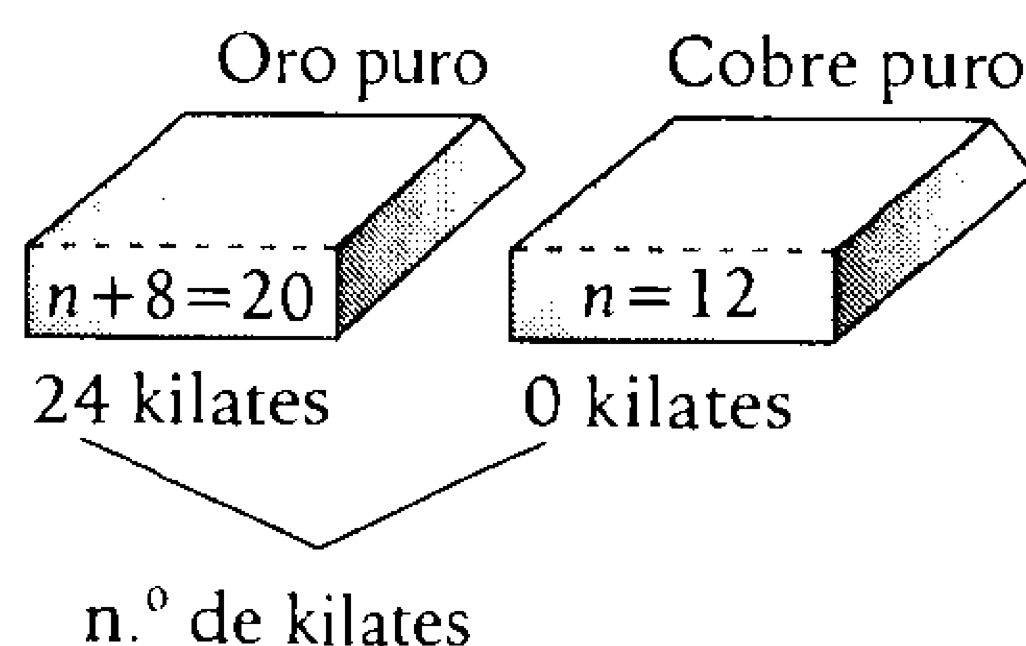
Aplicamos: $\begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$

En (I): $4\times30=(20-a)\times(n+8)$

En (II): $(a-4)n=4\times30$

Resolvemos $n=12;\ a=14$

Mezclamos



El n.º de kilates de la mezcla es: $\dfrac{20(24)+12\times 0}{20+12}=15$ kilates

Clave **C**

PROBLEMA N.º 50

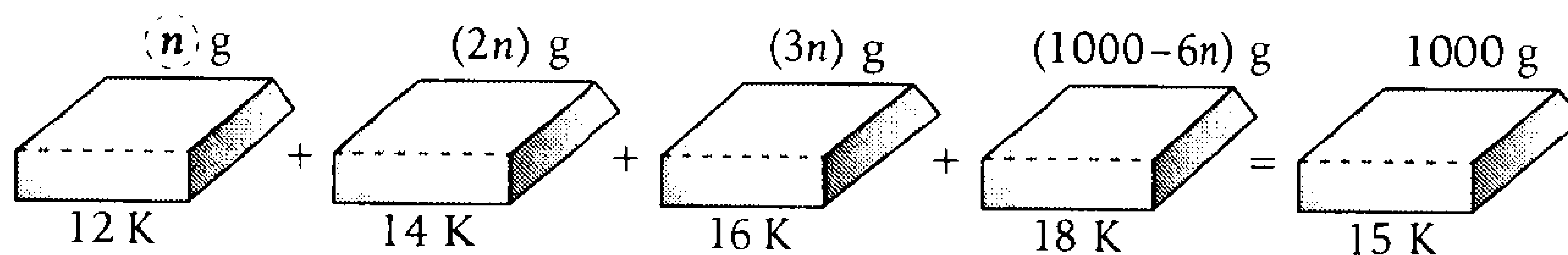
Se funden cuatro lingotes de oro de 12 K, 14 K, 16 K y 18 K, resultando una aleación de 15 K. Si por cada 2 g del primero hay 4 g del segundo y 6 g del tercero, ¿cuántos gramos del cuarto habrá en una aleación de 1 kg?

A) 80 g   B) 100 g   C) 120 g   D) 140 g   E) 150 g

Resolución

Tenemos una aleación de 1 kg <> 1000 g

Además, del enunciado, los pesos de las tres primeras aleaciones están en la misma relación que los números 1, 2 y 3, respectivamente.



Luego

$$\overbrace{(3\text{ K})(n)+\text{K}(2n)}^{\text{G. aparente}}=\overbrace{\text{K}(3n)+(3\text{ K})(1000-6n)}^{\text{P. aparente}}$$

$$n=150$$

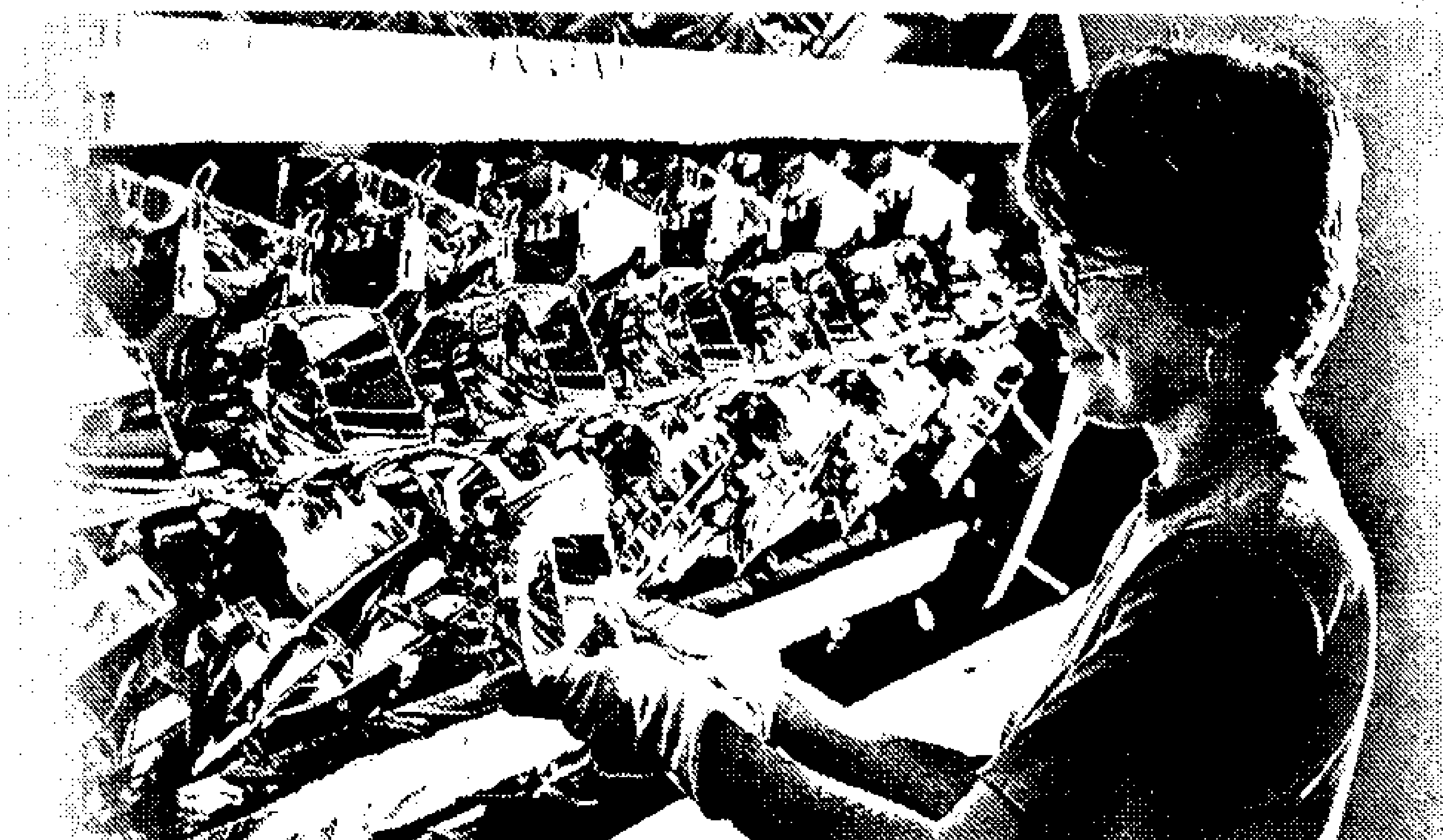
Por lo tanto, el cuarto lingote pesa $(1000-6n)=100$ g.

Clave **B**

Capítulo

18

Introducción a la Estadística



Los comienzos de la estadística, del latín *statísticum collégium* ('consejo de Estado') y de su derivado italiano *statista* ('hombre de Estado' o 'político'), pueden ser hallados en el antiguo Egipto, donde los faraones, hacia el año 3050 a.n.e., recopilaron información acerca de la población y riqueza de su país; también los chinos efectuaron censos hace más de cuarenta siglos; igual los griegos, con fines tributarios, sociales y militares. Pero fueron los romanos, maestros de la organización política, quienes mejor supieron emplear los recursos de la estadística. Cada cinco años realizaban un censo de la población y sus funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, defunciones y matrimonios.

En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos.

En este capítulo se desarrollan problemas sobre la estadística descriptiva, la cual se dedica a los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de datos originados a partir de los fenómenos en estudio.

Capítulo **18**

Introducción a la Estadística

PROBLEMA N.° 1

Se debe elaborar un cuadro de distribución de frecuencias con las edades de un grupo de personas. Considere lo siguiente:

- Edad mínima: 10 años
- Edad máxima: 30 años
- Ancho de clase: 4

Además $h_2=h_4=h_5$; $h_1=\frac{4}{5}h_2$; $5h_3=6h_4$

Si el promedio de las edades es $\overline{ab},\overline{cd}$; calcule $a+b+c+d$.

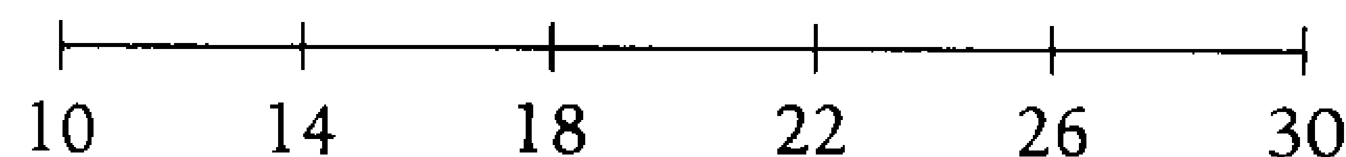
A) 5 B) 12 C) 7 D) 10 E) 8

Resolución

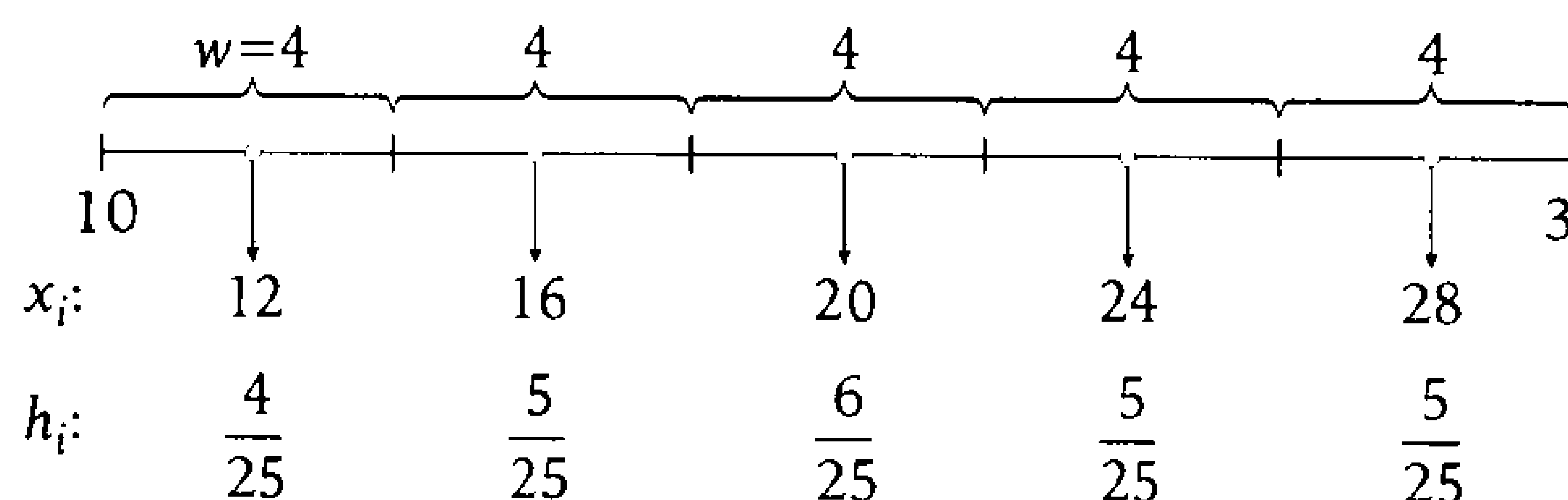
De las frecuencias relativas, tenemos

$$\frac{h_1}{4}=\frac{h_2}{5}=\frac{h_3}{6}=\frac{h_4}{5}=\frac{h_5}{5}=\frac{\sum_{i=1}^{5}h_i}{4+5+6+5+5} \rightarrow \frac{h_1}{4}=\frac{h_2}{5}=\frac{h_3}{6}=\frac{h_4}{5}=\frac{h_5}{5}=\frac{1}{25}$$

Como $A=[10;\ 30]$ y el ancho es $w=4$, los intervalos son



Tenemos



Sabemos

$\overline{MA}=x_1h_1+x_2h_2+x_3h_3+x_4h_4+x_5h_5$

$$\overline{ab},\overline{cd}=12\left(\frac{4}{25}\right)+16\left(\frac{5}{25}\right)+20\left(\frac{6}{25}\right)+24\left(\frac{5}{25}\right)+28\left(\frac{5}{25}\right)$$

$$\overline{ab},\overline{cd}=20,32$$

$a=2;\ b=0;\ c=3;\ d=2$

$\therefore\ a+b+c+d=7$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Los pesos (en kilogramo) de ocho personas son 30; 30; 33; 28; 180; 31; 35 y 34. La medida de tendencia central que representa mejor estos datos es la media aritmética.
II. El peso, el estado civil, la talla y el sexo son variables cuantitativas.
III. Dados los datos: 10; 15; 18; 12; 10; 13; 15; 20; 23; 18; 17; 21; 15; 14 y 24, se afirma que generan una distribución amodal.

A) VFF B) FFV C) VVF D) FVF E) FFF

Resolución

I. **Falsa**
En el cálculo de la media aritmética intervienen todos los datos, por lo tanto, los valores extremos (en este caso, 180) producen grandes variaciones.

II. **Falsa**
El estado civil y el sexo son variables cualitativas, ya que sus valores son cualidades o atributos de la población o muestra en estudio.

III. **Falsa**
El dato 15 es el que más se repite (3 veces). En este caso, la distribución es unimodal, por lo tanto, $Mo=15$.

$\therefore$ FFF

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

Se tienen los promedios ponderados de las notas de 10 estudiantes del curso de Matemática Básica I.

10,2	12,6	11,2	14,4	10,8
16,4	13,6	14,9	12,5	11,5

Si se clasifican los datos para 4 intervalos de clase, calcule h_2+H_3.

A) 50% B) 75% C) 84% D) 92% E) 100%

Resolución

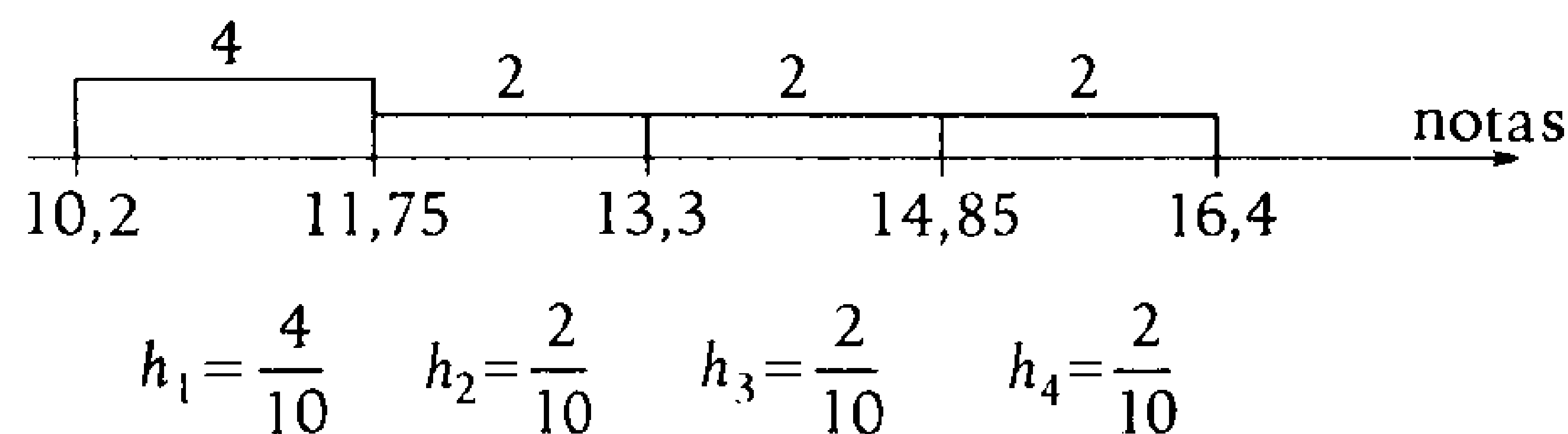
Los promedios de las notas de $n=10$ estudiantes en $K=4$ intervalos

Dato mínimo: 10,2 ⎫ Alcance: $A=[10{,}2;\ 16{,}4]$
Dato máximo: 16,4 ⎭ Rango: $R=16{,}4-10{,}2=6{,}2$

El ancho de clase es: $W=\dfrac{R}{K} \rightarrow W=\dfrac{6{,}2}{4}=1{,}55$

Ordenando los datos

$\underbrace{10{,}2\quad 10{,}8\quad 11{,}2\quad 11{,}5}_{f_1=4}\quad \underbrace{12{,}5\quad 12{,}6}_{f_2=2}\quad \underbrace{13{,}6\quad 14{,}4}_{f_3=2}\quad \underbrace{14{,}9\quad 16{,}4}_{f_4=2} \rightarrow n=10$



$h_1=\dfrac{4}{10}\quad h_2=\dfrac{2}{10}\quad h_3=\dfrac{2}{10}\quad h_4=\dfrac{2}{10}$

- $h_2=\dfrac{2}{10}=20\%$
- $H_3=h_1+h_2+h_3$

$H_3=\dfrac{4}{10}+\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10}$

$H_3=\dfrac{8}{10}<>80\%$

Nos piden $h_2+H_3=20\%+80\%$

$\therefore\ h_2+H_3=100\%$

Clave E

PROBLEMA N.° 4

Si se tiene la siguiente distribución de frecuencias sobre las estaturas (en metros) de un grupo de 50 jóvenes, calcule $M+0,\overline{ba}$.

I_i	f_i	h_i	H_i
[1,55 - 1,60⟩			
[1,60 - 1,65⟩			
[1,65 - 1,70⟩		$0,\overline{ab}$	
[1,70 - 1,75⟩	5		0,96
[1,75 - 1,80⟩			

$h_1=h_5$
$h_2=h_4$

M: tanto por ciento de jóvenes que poseen una estatura no menor de 1,70 m.

A) 27% B) 31% C) 19%
D) 38% E) 41%

Resolución

Total de datos: $n=50$
Como hay 5 intervalos de clase

$$\underset{\substack{\downarrow\\0,96}}{H_4}+h_5=H_5=1 \rightarrow h_5=0,04$$

$$h_5=\frac{f_5}{n} \rightarrow 0,04=\frac{f_5}{50};\ f_5=2$$

Además

- $h_1=h_5$

$$\frac{f_1}{n}=\frac{f_5}{n} \rightarrow f_1=f_5=2$$

- $h_2=h_4$

$$\frac{f_2}{n}=\frac{f_4}{n} \rightarrow f_2=f_4=5$$

- $\sum_{i=1}^{5} f_i=50 \rightarrow f_3=36$

Luego

$$h_3=0,\overline{ab}\ ;\ h_3=\frac{f_3}{n}$$

$$\frac{36}{50}=0,\overline{ab}$$

$$0,\overline{ab}=0,72$$

- La cantidad de jóvenes que poseen una estatura no menor de 1,70 m es $f_4+f_5=7$.

$$\rightarrow M=\frac{7}{50}=14\%$$

Piden

$$M+0,\overline{ba}=14\%+\underbrace{0,27}_{27\%}=41\%$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

Se tiene el siguiente cuadro de frecuencias:

Ingreso	h_i	f_i
[500 - 800⟩	$1/a$	a
[800 - 1100⟩	$2/a$	
[1100 - 1400⟩	$9/a$	
[1400 - 1700⟩	$3/a$	

Calcule cuántas personas ganan entre S/.840 y S/.1480 mensuales, además, determine el valor de F_4, respectivamente.

A) 135 y 250 B) 120 y 225
C) 135 y 225
D) 173 y 225 E) 173 y 250

Resolución

Completando la tabla $\sum_{i=1}^{K} h_i = 1$

$h_1+h_2+h_3+h_4=1$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{9}{a}+\frac{3}{a}=1$

$\rightarrow \quad a=15$

hi DP *fi*

Ingreso	h_i	f_i	F_i
[500-800⟩	$\frac{1}{15}$	$a=15$	$F_1=15$
[800-1100⟩	$\frac{2}{15}$	$2a=30$	$F_2=45$
[1100-1400⟩	$\frac{9}{15}$	$9a=135$	$F_3=180$
[1400-1700⟩	$\frac{3}{15}$	$3a=45$	$F_4=225$
Total		$n=225$	

$\therefore \quad F_4=225$

- Ubicando los que ganan entre S/.840 y S/.1480.

N.° de personas
135
45
30
15
30
x
x
$b=135$
45
c
c
ingreso(S/.)
(I_i)
500 800 840 1100 1400 1480 1700
260
300
80
300

Por la proporción

$\frac{x}{260}=\frac{30}{300}$ $\qquad$ $\frac{c}{80}=\frac{45}{300}$

$x=26$ $\qquad$ $c=12$

Cantidad de personas que ganan entre S/.840 y S/.1480 es $x+b+c=26+135+12=173$

Por lo tanto, 173 personas ganan la cantidad establecida, y el valor de F_4 es 225

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Se tiene la siguiente tabla de distribución de frecuencias sobre las estaturas (en metros) de un grupo de 50 jóvenes.

Intervalo de clase	f_i	H_i
[1,55; 1,60⟩		
[1,60; 1,65⟩		
[1,65; 1,70⟩		
[1,70; 1,75⟩	5	0,96
[1,75; 1,80⟩		

Determine qué tanto por ciento de jóvenes posee una estatura menor de 1,70 m.

A) 86% B) 14% C) 17%
D) 20% E) 28%

Resolución

Total de datos: $n=50$

$$h_4=\frac{f_4}{n};\quad h_4=\frac{5}{50}=0{,}10$$

Además: $H_3+h_4=H_4=0{,}96 \rightarrow H_3=0{,}86$

Piden: $\frac{F_3}{n}\times 100\%$

$$H_3=\frac{F_3}{n} \rightarrow H_3\times 100\%=86\%$$

Por lo tanto, el 86% de jóvenes posee una estatura menor de 1,70 m.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

En una encuesta sobre los ingresos anuales en miles de soles de un grupo de familias, se obtuvo la siguiente información:

$[L_i;L_s\rangle$	x_i	f_i
[10-30⟩		20
[30-50⟩		
[50-70⟩		
[70-90⟩		20

Además, la media es

$$\bar{x}=54 \text{ y } \frac{f_2}{f_3}=\frac{1}{5}.$$

Calcule el número de familias con ingresos no menores de 50 000 soles.

A) 50
B) 60
C) 70
D) 80
E) 85

Resolución

$f_3=5f_2 \rightarrow f_2=a$

$f_3=5a$

I_i**(miles)**	x_i	f_i	$x_i \times f_i$
[10, 30⟩	20	20	400
[30, 50⟩	40	a	$40a$
[50, 70⟩	60	$f_3=5a$	$300a$
[70, 90⟩	80	$f_4=20$	1600
		$n=40+6a$	$2000+340a$

La media es

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i f_i}{n}$$

$$54=\frac{2000+340a}{40+6a}$$

Resolviendo

$a=10$

Cantidad de familias que ganan 50 mil o más

$I_3=[50;\ 70\rangle \rightarrow f_3=50$

$I_4=[70;\ 90\rangle \rightarrow f_4=20$

$f_3+f_4=70$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

La tabla muestra la distribución de los pesos (en kilogramos) de 40 estudiantes de la academia César Vallejo del Ciclo Semestral.

Peso (kg)	Frecuencia (f_i)
[50; 56⟩	6
[56; 62⟩	6
[62; 68⟩	
[68; 74⟩	12
[74; 80⟩	4

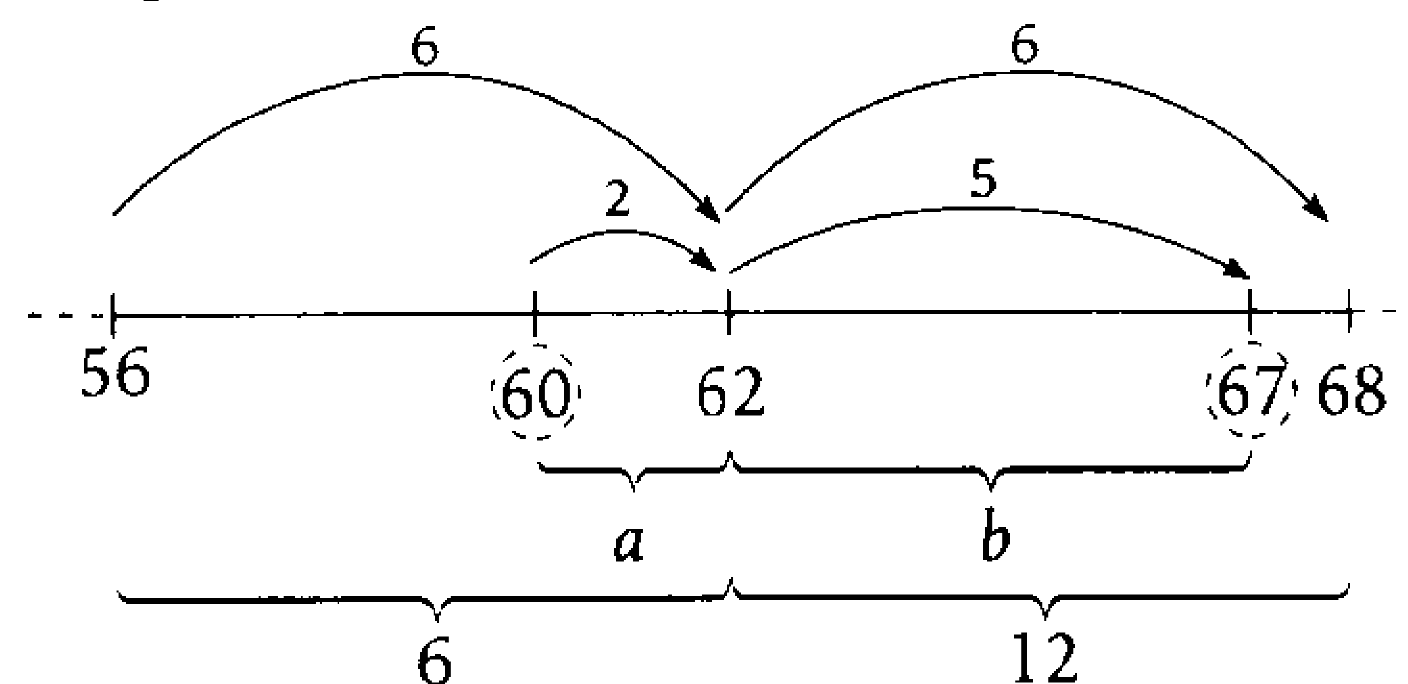
¿Qué tanto por ciento de los estudiantes pesa entre 60 y 67 kg?

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 50% E) 60%

Resolución

Como $\sum_{i=1}^{5} f_i=40 \rightarrow f_3=12$

Luego



Por proporcionalidad

$$\frac{a}{2}=\frac{6}{6} \qquad \frac{b}{5}=\frac{12}{6}$$

$$\rightarrow a=2 \qquad \rightarrow b=10$$

Piden $\left(\frac{a+b}{40}\right)\times 100\%=30\%$

Por lo tanto, el 30% de los estudiantes pesa entre 60 y 67 kg.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Se tiene la siguiente tabla correspondiente al ahorro diario de un conjunto de niños de un determinado centro educativo.

Intervalos de clase	Frecuencia relativa
[0,20; 0,40⟩	0,10
[0,40; 0,60⟩	h_2
[0,60; 0,80⟩	h_3
[0,80; 1,00⟩	0,10

Si se sabe que la media aritmética es 0,61, calcule h_3-h_2; considere que

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{K} x_i h_i$$

A) 0,02 B) 0,01 C) 0,10
D) 0,20 E) 0,03

Resolución

I_i	x_i	h_i
[0,20; 0,40⟩	0,30	0,10
[0,40; 0,60⟩	0,50	h_2
[0,60; 0,80⟩	0,70	h_3
[0,80; 1,00⟩	0,90	0,10
		$\sum h_i=1$

Observación

$\sum_{i=1}^{K} h_i = 1$

$0,10+h_2+h_3+0,10=1$

$h_2+h_3=0,8$

Por dato:

$\bar{x}=0,61$

$\sum_{i=1}^{4} x_i h_i = 0,61$

$(0,30)(0,10)+(0,50)h_2+(0,70)h_3+(0,90)(0,10)=0,61$

$5h_2+7h_3=4,9$

Tenemos

$5h_2+7h_3=4,9$

$h_2+h_3=0,8$

Resolviendo

$h_3=0,45$

$h_2=0,35$

$\therefore\ h_3-h_2=0,10$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

El siguiente cuadro estadístico tiene ancho de clase constante e igual a 20.

$[L_i - L_s\rangle$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[- ⟩				880
[- ⟩				1950
[- ⟩			35	
[- ⟩		13		
[-200⟩				
[-]		4	70	

Determine la media de los datos.

A) 157 B) 158,6 C) 159
D) 160 E) 162,5

Resolución

Sabemos que $F_3+f_4+f_5+f_6=F_6$

$$\underset{35}{F_3}+\underset{13}{f_4}+f_5+\underset{4}{f_6}=\underset{70}{F_6}$$

$\rightarrow\ f_5=18$

Sea w el ancho de clase constante igual a 20

$x_{i+1}-x_i=w=20$

Completando lo necesario en el cuadro estadístico:

$[L_i-L_s\rangle$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[- ⟩	110 →	8		**880**
[- ⟩	130 →	15		**1950**
[- ⟩	150	12 ←	**35**	1800
[- ⟩	170	**13**		2210
[180-**200**⟩	190	18		3420
[-]	210	**4**	**70**	840
			$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_i =$	11 100

Para datos tabulados

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_i}{n}$$

n: total de datos

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{11100}{70}=158,\widehat{571428}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Se tiene la siguiente distribución de frecuencias, calcule el valor de m, si la mediana es $61,\hat{6}$.

A) 12
B) 18
C) 20
D) 22
E) 24

I_i	f_i
[20-30⟩	3
[30-40⟩	1
[40-50⟩	2
[50-60⟩	6
[60-70]	m

Resolución

Su histograma es

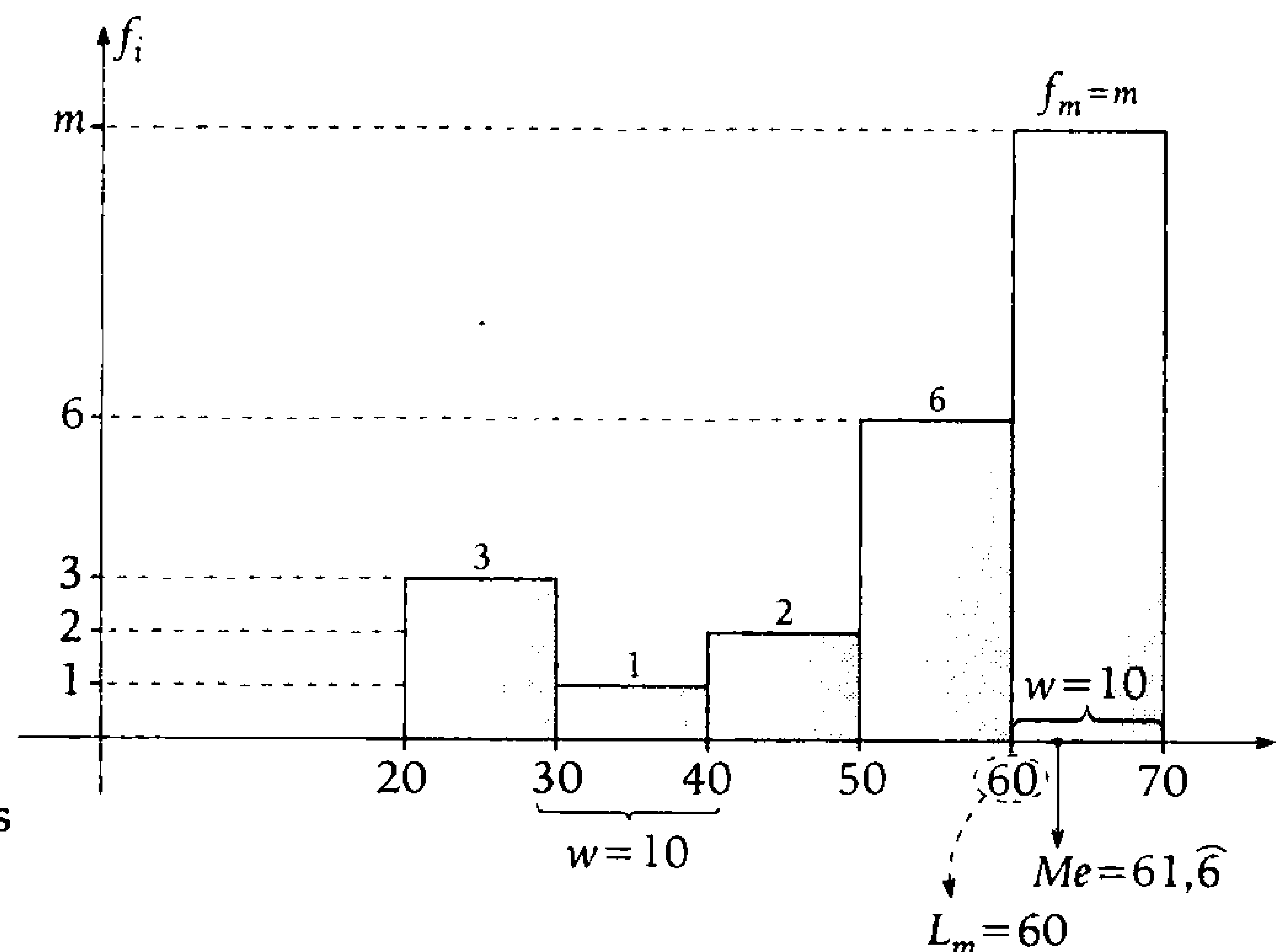
- $F_{m-1}=3+1+2+6$

  $F_{m-1}=12$

- $n=\sum_{i=1}^{5} f_i$

  $n=3+1+2+6+m$

  $n=m+12$



Para calcular la mediana, utilizamos

$$Me=L_m+w\left(\frac{\frac{n}{2}-F_{m-1}}{f_m}\right)$$

Reemplazamos

$$61,\bar{6}=60+10\left[\frac{\left(\frac{m+12}{2}\right)-12}{m}\right]$$

Resolviendo

$m=18$

Por lo tanto, el valor de m es 18.

Clave B

PROBLEMA N.° 12

Una empresa dispone del intervalo y la frecuencia relativa de los sueldos de sus trabajadores. Indique el sueldo promedio de un trabajador de la empresa.

Intervalo de sueldos	h_i
[1200-1800⟩	0,75
[1800-2400⟩	
[2400-3000⟩	0,05

A) 1670 B) 1860 C) 1680
D) 2000 E) 1900

Resolución

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{3} h_i=1 \rightarrow h_2=0,20$$

Además, para datos tabulados

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{3} x_1\cdot h_i$$

Luego

Intervalo de sueldos	x_i	h_i	$x_i\cdot h_i$
[1200-1800⟩	1500	0,75	1125
[1800-2400⟩	2100	0,20	420
[2400-3000⟩	2700	0,05	135

$\bar{x}=1125+420+135=1680$

Por lo tanto, el sueldo promedio de un trabajador es

S/.1680.

Clave C

PROBLEMA N.° 13

Se tienen los promedios ponderados de las notas de 10 estudiantes.

En la tabla, se muestran los resultados de un estudio con amplitud constante.

$[x_{i-1}-x_i⟩$	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10- ⟩			30		
[- ⟩		75		0,375	
[- ⟩					0,8
[- ⟩	27,5				

Halle $\bar{x}+F_2+F_4$.

A) 324,125
B) 325,125
C) 220,125
D) 225,125
E) 235,125

Resolución

Se tiene el cuadro

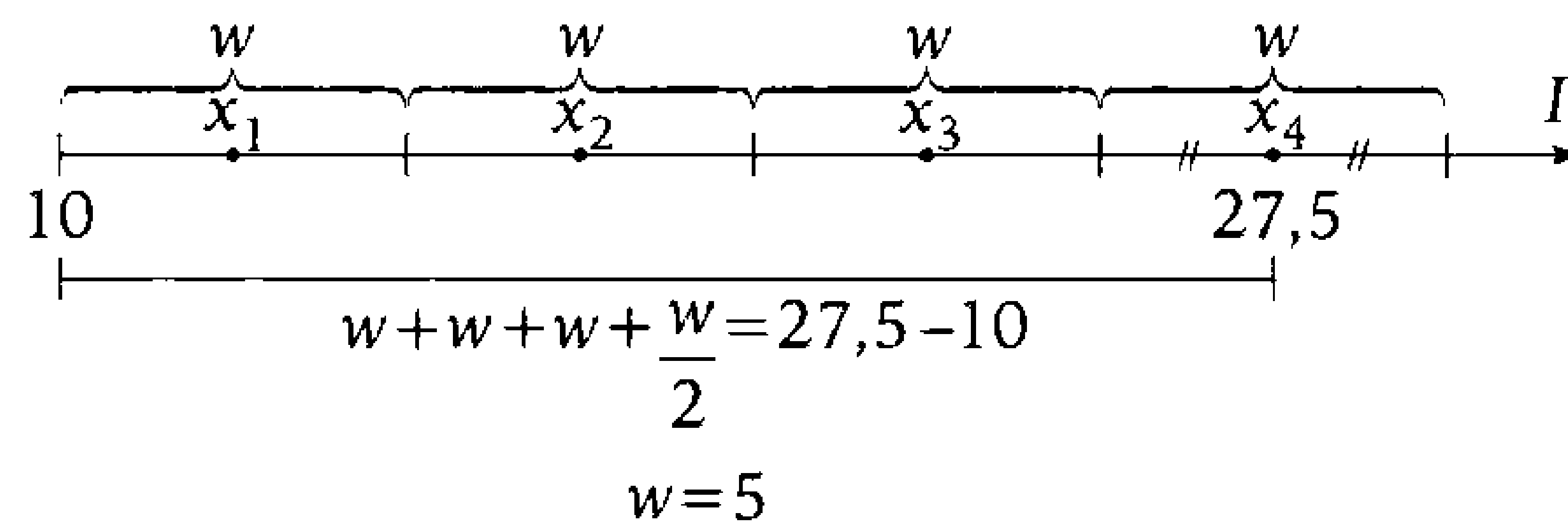
I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10- ⟩		$f_2=30$	$F_1=30$		
[- ⟩		$f_2=75$		$h_2=0,375$	
[- ⟩					$H_3=0,8$
[- ⟩	$x_4=27,5$				

$H_3=0,8=80\%$: 80% (primeras tres filas); 20% (última fila)

- $h_2=\dfrac{f_2}{n} \rightarrow 0,375=\dfrac{75}{n}$ $\qquad n=200$
- $H_3=\dfrac{F_3}{n} \rightarrow 0,8=\dfrac{F_3}{200}$ $\qquad F_3=160$
- $F_2=f_1+f_2 \rightarrow F_2=30+75=105$
- $F_4=n$ (por ser 4 intervalos)

  $F_4=200$

Para calcular la media $(\bar{x})$



$$w+w+w+\frac{w}{2}=27,5-10$$

$$w=5$$

x_i	f_i
12,5	30
17,5	75
22,5	55
27,5	40
	$n=200$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4} xi\cdot fi}{n}$$

$$\bar{x}=\frac{(12,5)30+(17,5)\cdot 75+(22,5)\cdot 55+(27,5)\cdot 40}{200}$$

$$\bar{x}=20,125$$

$\therefore\ F_2+F_4+\bar{x}=105+200+20,125=325,125.$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

Al completar la tabla, halle
$x_4 + \bar{x} - \overline{ab}$.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[15- ⟩		20			
[- ⟩			$\overline{b5}$		0,55
[- ⟩		10	$\overline{a5}$		
[- ⟩					0,80
[- ⟩					
[- ⟩	64,5	8	100		

A) 13,27 B) 14,26 C) 12,26
D) 17,92 E) 12,76

Resolución

n: total de datos

Como son 6 intervalos de clase

$F_6 = n = 100$

- $H_2 = \dfrac{F_2}{100} = \dfrac{\overline{b5}}{100} = 0,55$

  $\rightarrow \overline{b5} = 55$

- $F_2 + f_3 = F_3 = \overline{a5}$

  $\rightarrow \overline{a5} = 65$

- $H_4 = \dfrac{F_4}{100} = 0,80$

  $\rightarrow F_4 = 80$

- $F_3 + f_4 = F_4$

  $\rightarrow f_4 = 15$

- $\sum_{i=1}^{6} f_i = 100 \rightarrow f_5 = 12$

- $f_1 + f_2 = \overline{b5} = 55 \rightarrow f_2 = 35$

Sea w el ancho de clase constante

$x_{i+1} - x_i = w$

$15 + 5,5w = 64,5 \rightarrow w = 9$

Luego

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
19,5	**20**	390
28,5	35	997,5
37,5	**10**	375
46,5	15	697,5
55,5	12	666
64,5	**8**	516
	$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_i =$	3642

Entonces, para datos tabulados

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{3642}{100} = 36,42$$

Además

$x_4 = 46,5$

$\overline{ab} = 65$

$\therefore\ x_4 + \bar{x} - \overline{ab} = 17,92$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

Dado el siguiente cuadro estadístico, halle $m+q+p$ si los intervalos de clase presentan una amplitud común.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[- ⟩			20		
[40- ⟩		30			
[- ⟩	q		m	0,20	
[- ⟩		p			0,70
[82- ⟩		60			

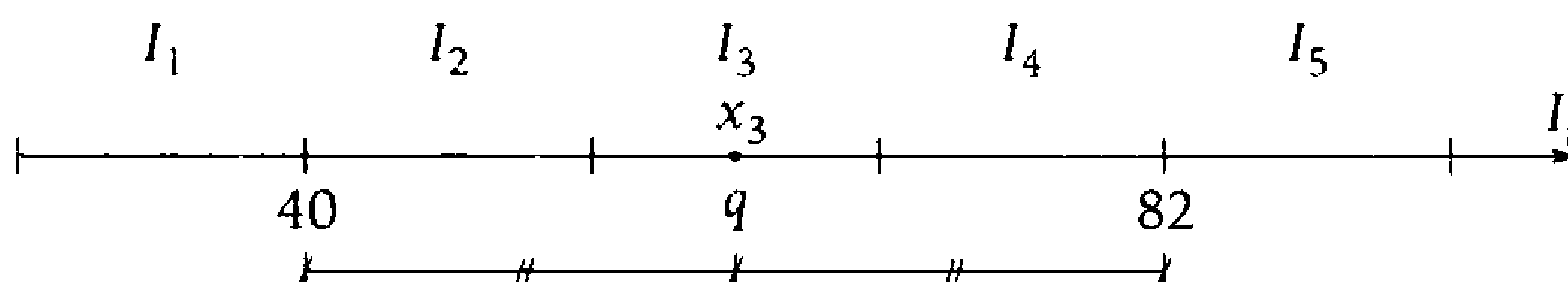
A) 150 B) 201 C) 241 D) 202 E) 101

Resolución

Tenemos

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[- ⟩		$f_1=20$	$F_1=20$		
[40; ⟩		$f_2=30$			
[- ⟩	$x_3=q$		$F_3=m$	$h_3=0,20$	
[- ⟩		$f_4=p$			$H_4=0,70$
[82; ⟩		$f_5=60$	n		1
Total		n		1	

De los intervalos, tenemos



q está al centro de 40 y 82 $\quad q=\dfrac{40+82}{2}$

$q=61$

De las frecuencias

- $h_5=\frac{f_5}{n} \rightarrow 0,30=\frac{60}{n}$

  $n=200$

- $h_3=\frac{f_3}{n} \rightarrow 0,20=\frac{f_3}{200}$

  $f_3=40$

- $F_3=f_1+f_2+f_3$

  $\rightarrow m=20+30+40 \rightarrow m=90$

- $n=f_1+f_2+f_3+f_4+f_5$

Reemplazando

$200=20+30+40+p+60$

$p=50$

$\therefore\ q+m+p=61+90+50=201$

Clave B

PROBLEMA N.° 16

En la tabla se muestra la distribución de salarios de 100 empleados de la compañía Jely S.A.

Intervalos de salarios	f_i	F_i	h_i	H_i
[200-280⟩				
[280-360⟩				0,35
[360-440⟩				
[440-520⟩				
[520-600⟩			0,1	

Si se sabe que $2f_4=3f_3$, ¿cuántos empleados ganan menos de 440 soles?

A) 50 B) 57 C) 67
D) 53 E) 42

Resolución

Total de datos:

$n=100$

Sabemos que:

- $H_2=\frac{F_2}{n}=\frac{F_2}{100}=0,35 \rightarrow F_2=35$

- $2f_4=3f_3;\ \frac{f_3}{f_4}=\frac{2}{3}\left.\right\}\begin{array}{l} f_3=2K \\ f_4=3K \end{array}$

Luego, como son 5 intervalos de clase

$H_2+h_3+h_4+h_5=1$

$0,35+\frac{2K}{100}+\frac{3K}{100}+0,1=1$

$\rightarrow K=11$

Piden $F_3=F_2+f_3=57$

Por lo tanto, 57 empleados ganan menos de S/. 440.

Clave B

PROBLEMA N.° 17

Se tiene la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[40-50⟩	6			
[50-60⟩	a		0,35	
[60-70⟩		52		c
[70-80⟩			b	
[80-90⟩	d			
[90-100⟩	$2d$	60		

Halle $a+b+c$

Si $f_4 \neq \overset{o}{2}$.

A) 21,2 B) 21,867 C) 29,15
D) 21,95 E) 20,95

Resolución

Por dato:

$f_4 \neq \overset{o}{2}$ (f_4 es impar)

Del cuadro se tiene:

- $\left.\begin{array}{l} n = F_6 = 60 \\ h_2 = 0,35 \\ f_2 = a \end{array}\right\}$ $h_2 = \dfrac{f_2}{n}$; $0,35 = \dfrac{a}{60}$

$a=21$

- $\left.\begin{array}{l} H_3 = c \\ F_3 = 52 \\ n = 60 \end{array}\right\}$ $H_3 = \dfrac{F_3}{n}$; $c = \dfrac{52}{60}$

$c = \dfrac{13}{15}$

- $n = \underbrace{f_1+f_2+f_3}+f_4+f_5+f_6$

$60 = \quad 52 \quad +f_4+d+2d$

$8 = f_4 + 3d$ (f_4 es impar)

solo hay 2 casos $\begin{cases} \text{no: } 5 & 1 \\ \text{si: } 2 & 2 \end{cases}$

Solo puede ser

$\rightarrow f_4=5 \wedge d=1$

- $\left.\begin{array}{l} h_4 = b \\ f_4 = 5 \\ n = 60 \end{array}\right\}$ $h_4 = \dfrac{f_4}{n}$; $b = \dfrac{5}{60}$

Nos piden $a+b+c$:

$$a+b+c = 21 + \frac{5}{60} + \frac{13}{15}$$

$\therefore\ a+b+c=21,95$

Clave D

PROBLEMA N.° 18

Considerando que la siguiente distribución de frecuencias tiene ancho de clase común, halle $\overline{x}+Me$.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[- ⟩				0,08
[- ⟩	17,5			
[- ⟩			0,06	
[-30⟩		17		0,80
[- ⟩		10		

A) 40,7 B) 42,3 C) 48,3
D) 49,4 E) 51,2

Resolución

Como son 5 intervalos de clase:

- $H_4+h_5=1 \rightarrow h_5=0,20$

n: total de datos

$$h_5 = \frac{f_5}{n} = \frac{10}{n} = 0,20 \rightarrow n = 50$$

- $h_1 = H_1 = 0{,}08 = \dfrac{f_1}{50} \rightarrow f_1=4$
- $h_3 = 0{,}06 = \dfrac{f_3}{50} \rightarrow f_3=3$

Como

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 50 \rightarrow f_2=16$$

Sea w el ancho de clase constante

$$x_{i+1}-x_i=w$$

$$17{,}5+2{,}5w=30 \rightarrow w=5$$

Luego

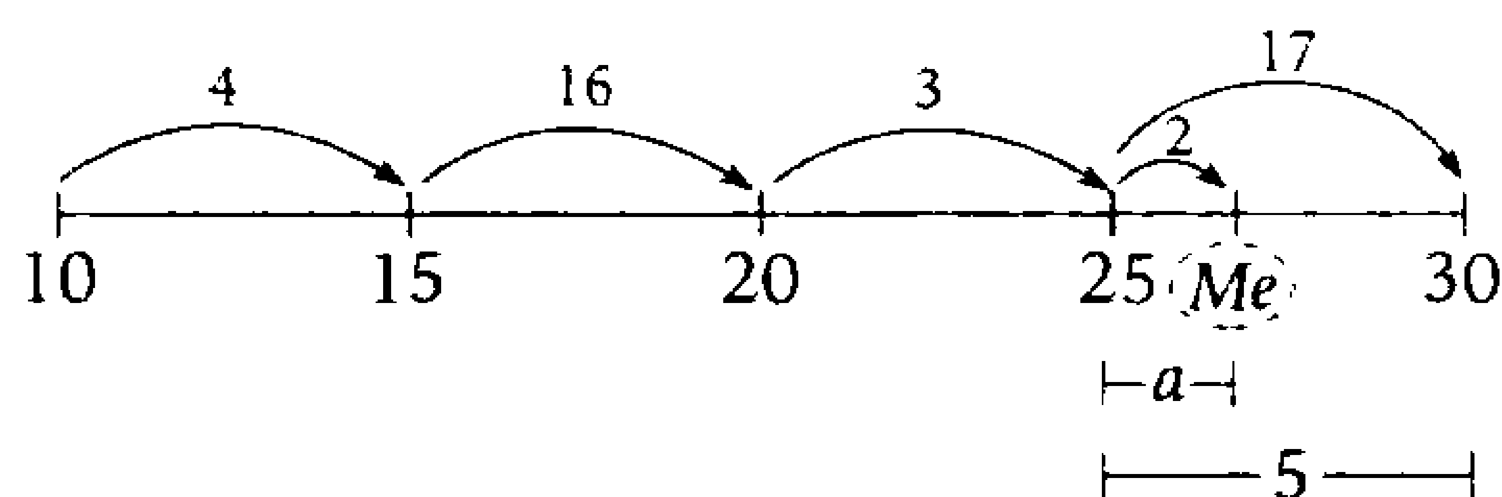
I_i	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[10-15⟩	12,5	4	50
[15-20⟩	**17,5**	16	280
[20-25⟩	22,5	3	67,5
[25-**30**⟩	27,5	**17**	467,5
[- ⟩	32,5	**10**	325
		$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i =$	1190

Entonces, para datos tabulados

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1190}{50} = 23{,}8$$

- Como hay 50 datos, la *Me* estará en el cuarto intervalo de clase.



Por proporcionalidad, en el cuarto intervalo tenemos: $\dfrac{a}{5} = \dfrac{2}{17}$

$a=0{,}588$ (aprox.)

$\rightarrow Me=25+a=25{,}588$

$\therefore \bar{x}+Me=49{,}388$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Dada la siguiente tabla de distribución de frecuencia, calcule la mediana más la moda.

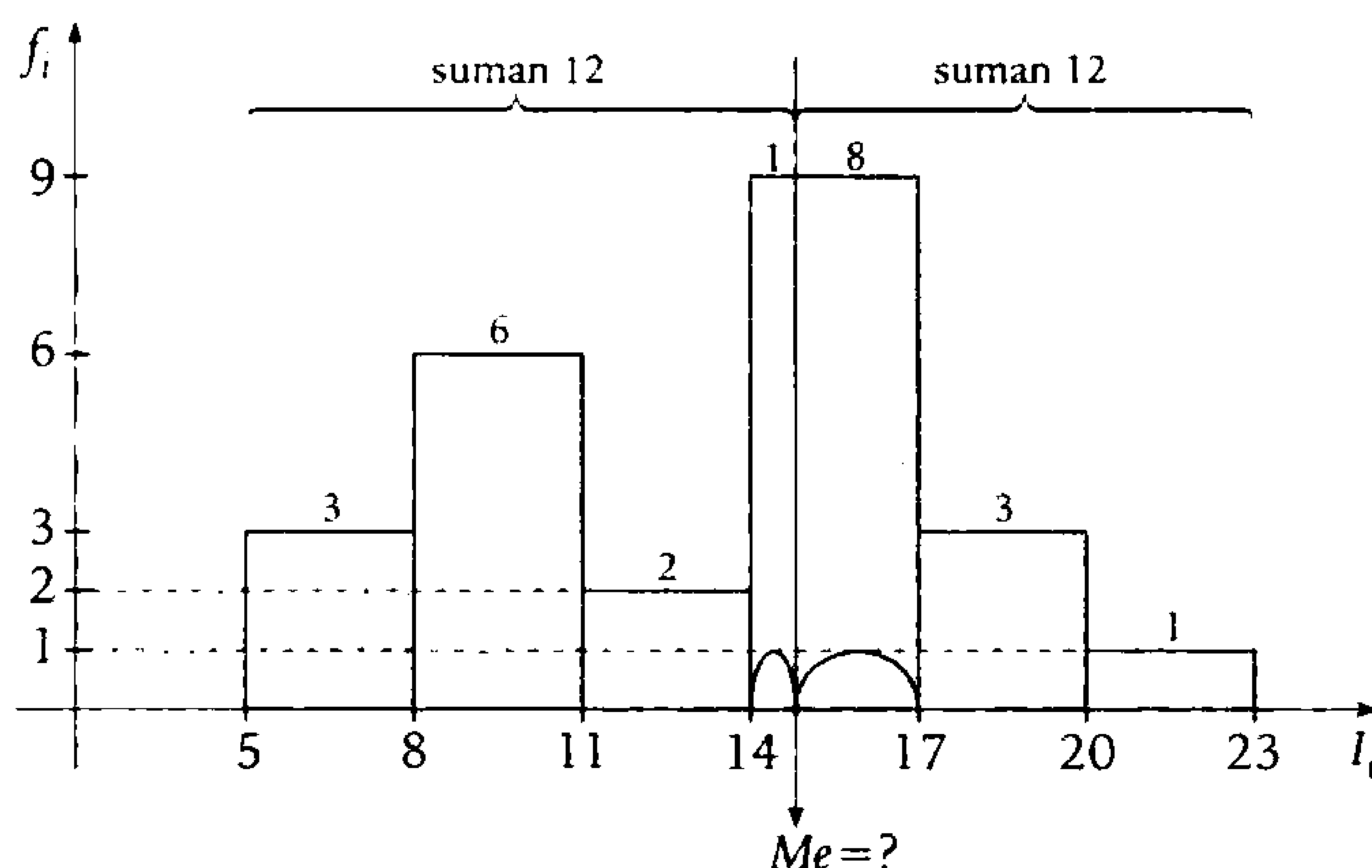
I_i	f_i
[5-8⟩	3
[8-11⟩	6
[11-14⟩	2
[14-17⟩	9
[17-20⟩	3
[20-23⟩	1

A) 29,721
B) 29,95
C) 29,721
D) 28,95
E) 28,721

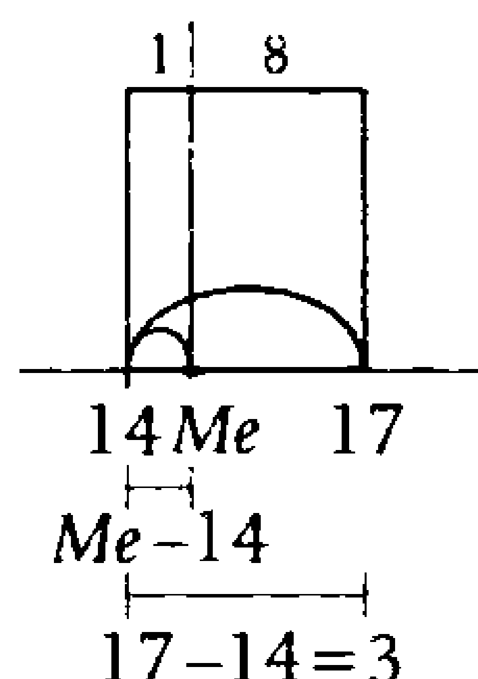
Resolución

De la tabla

- $n=24$, entonces, la mediana (*Me*) separa los datos en dos partes iguales. Ubicamos proporcionalmente la media.



Para ubicar la mediana



Proporciones

$$\frac{Me-14}{17-14}=\frac{1}{9}$$

$$\rightarrow \quad Me=14\frac{1}{3}$$

- Para la moda; la mayor frecuencia es $f_4=9$.
  Entonces la moda está en el 4.° intervalo
  $d_1=9-2 \;\rightarrow\; d_1=7$
  $d_2=9-3 \;\rightarrow\; d_2=6$

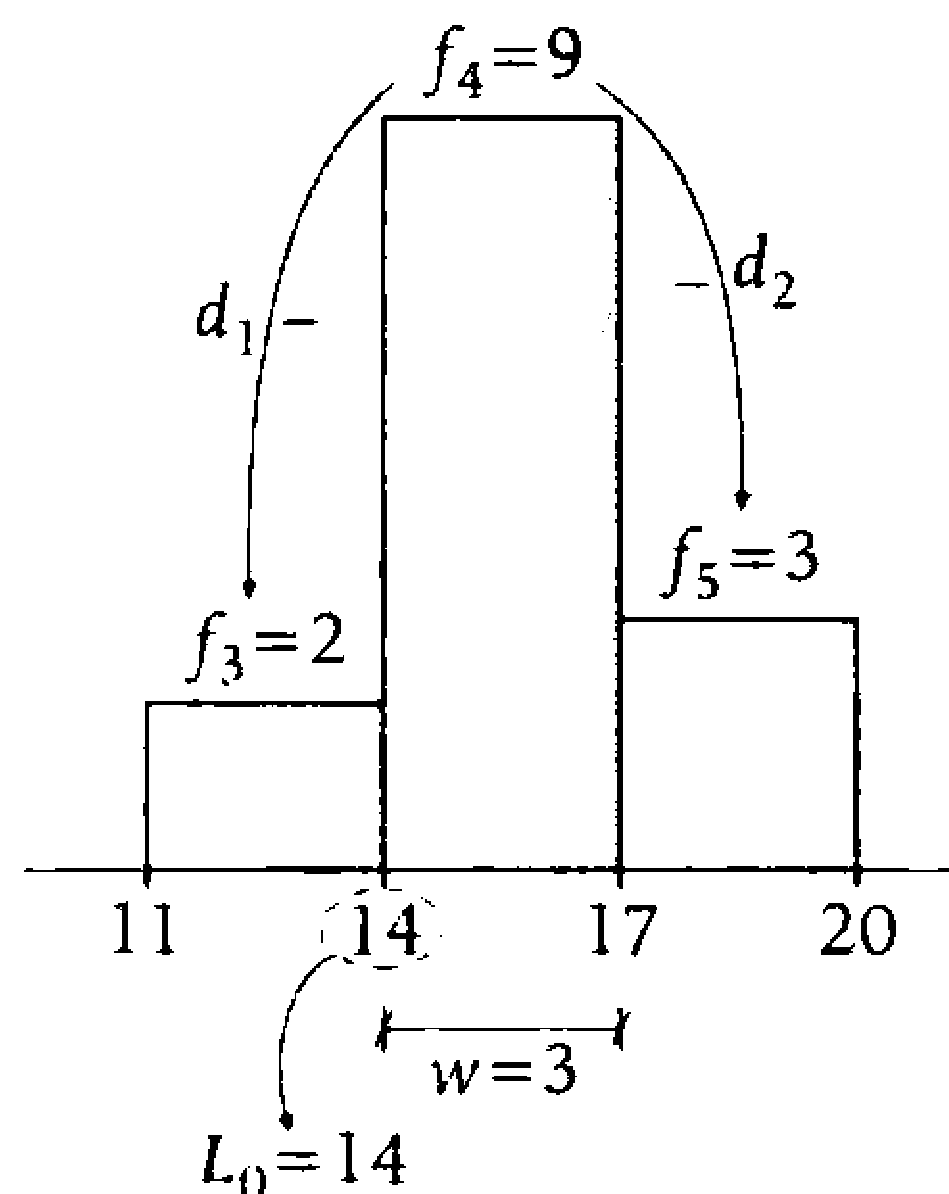
La moda es

$$Mo=L_0+w\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

Reemplazando

$$Mo=14+3\left(\frac{7}{7+6}\right)$$

$$Mo=15\frac{8}{13}$$



Nos piden

$Me+Mo$

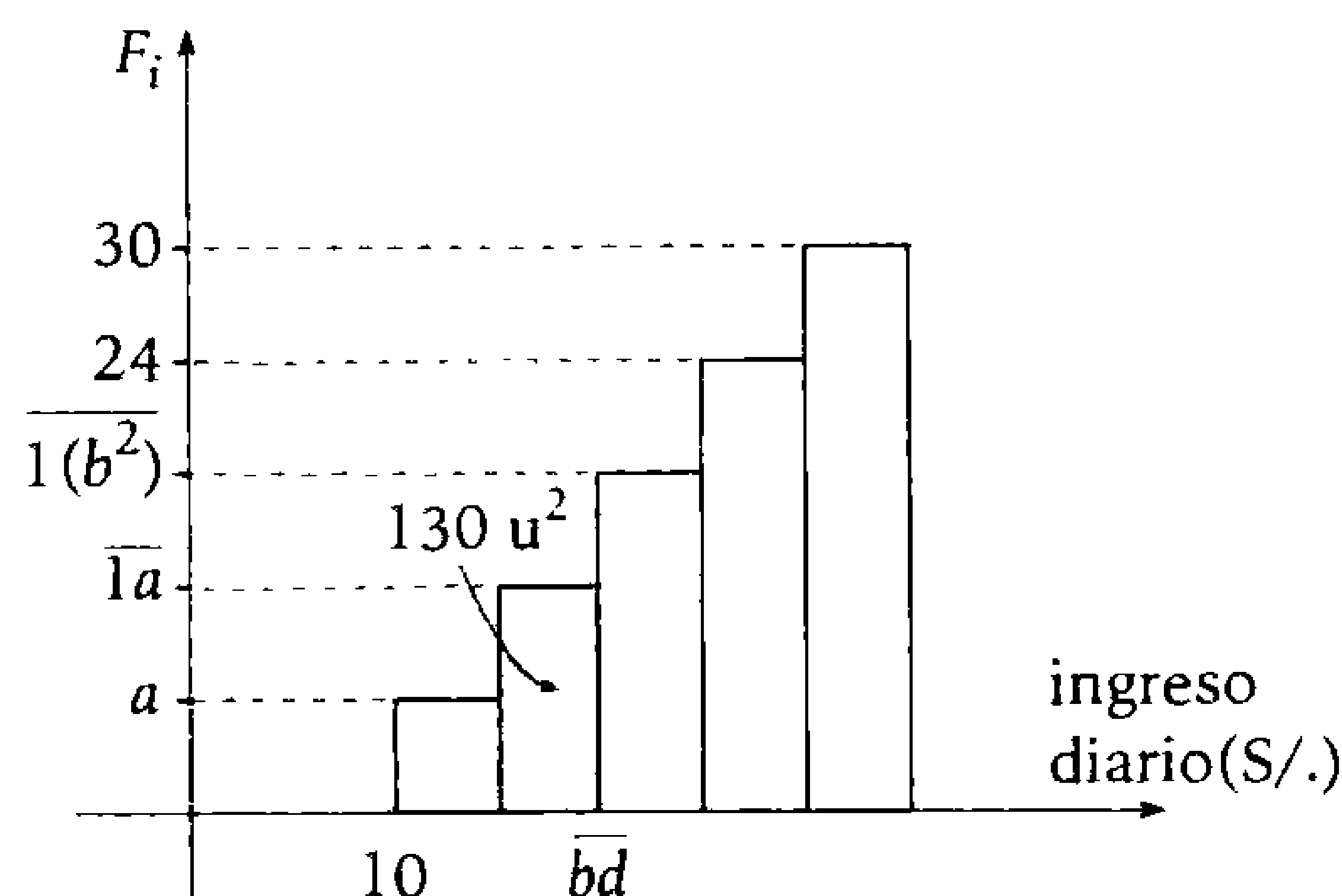
$Me+Mo=14\frac{1}{3}+15\frac{8}{13} \rightarrow Me+Mo=29\frac{37}{39}$

$\therefore \; Me+Mo=29,\overset{\frown}{948717}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

Dado el siguiente diagrama escalonado de igual ancho de clase y entero, ¿cuántos tienen ingreso de S/.24 a S/.48?



A) 28 B) 32 C) 46 D) 38 E) 41

Resolución

Del diagrama escalonado, observamos $a > 0$; b: 2 ó 3

Sea w el ancho de clase constante; $w \in \mathbb{Z}^+$

$10+2w=\overline{bd}$ (d es par) (I)

Luego, en el rectángulo sombreado (área=130 u²)

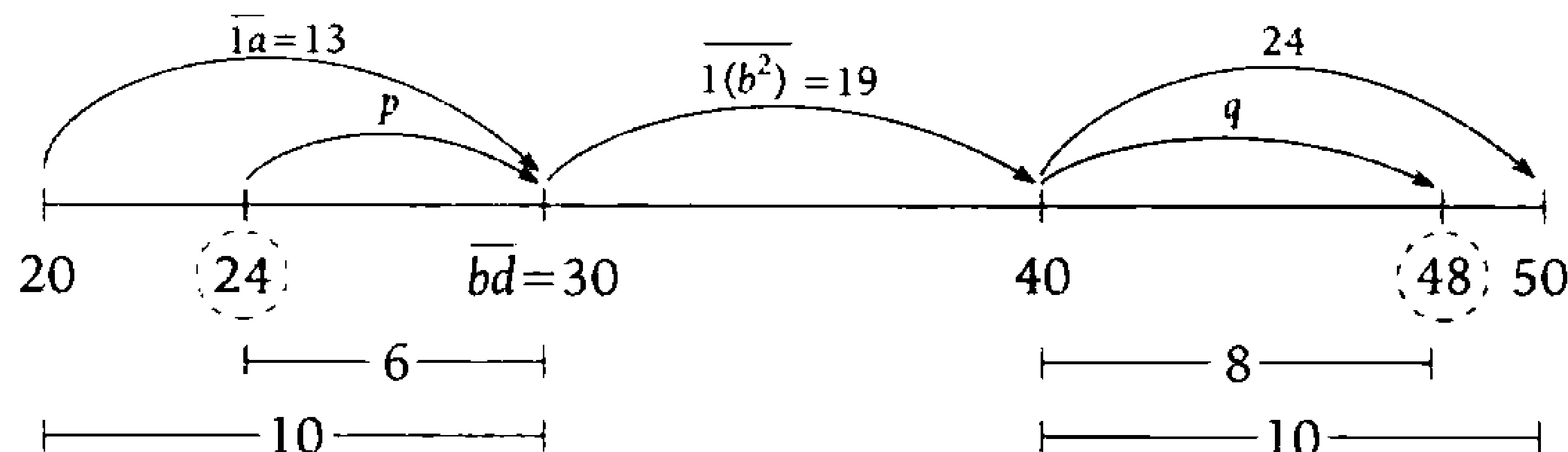
- $\overline{1a}\times\left(\frac{\overline{bd}-10}{2}\right)=130 \rightarrow \overline{1a}\times\overline{(b-1)d}=2\times13\times2\times5$

- Si $b=2 \rightarrow \overline{1a}\times\overline{1d}=2\times13\times2\times5$; no hay solución

- Si $b=3 \rightarrow \overline{1a}\times\overline{2d}=2\times2\times5\times13$

$a=3;\quad d=0$

En (I): $w=10$
Luego



Por proporcionalidad

$$\frac{6}{10}=\frac{p}{13} \qquad\qquad \frac{8}{10}=\frac{q}{24}$$

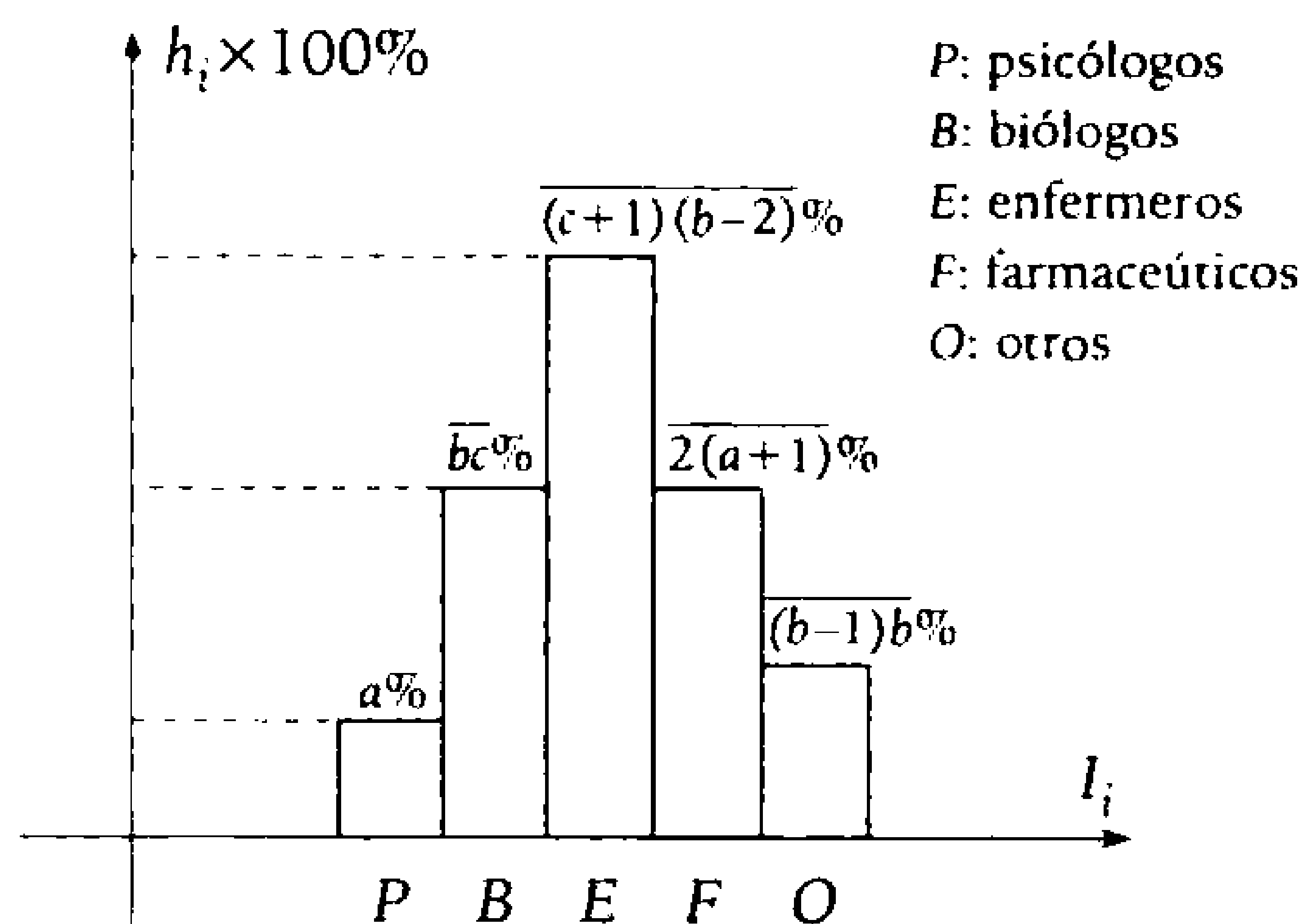
$$p=7{,}8 \qquad\qquad q=19{,}2$$

Piden $p+19+q=46$
Por lo tanto, 46 tienen ingreso de S/.24 a S/.48

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

El siguiente histograma muestra los oficios de las personas (%) que asistieron a una conferencia médica.



¿Qué tanto por ciento son psicólogos o farmacéuticos?

A) 32% B) 35% C) 34%
D) 36% E) 25%

Resolución

- Del gráfico se observa que

$h_2=h_4$

$\overline{bc}\,\%=\overline{2(a+1)}\%$

$\overline{b\,c}=\overline{2\,(a+1)}$

$b=2 \;\wedge\; c=a+1$

- También $\sum_{i=1}^{5} h_i=100\%$

$a\%+\overline{bc}\,\%+\overline{(c+1)\,(b-2)}\,\%+\overline{2\,(a+1)}\,\%+$

$+\overline{(b-1)\,b}\,\%=100\%$

Reemplazando $b=2$ y $c=a+1$

$a+\overline{2\,(a+1)}+\overline{(a+2)0}+\overline{2\,(a+1)}+12=100$

$13a+74=100$

$a=2$

Tenemos

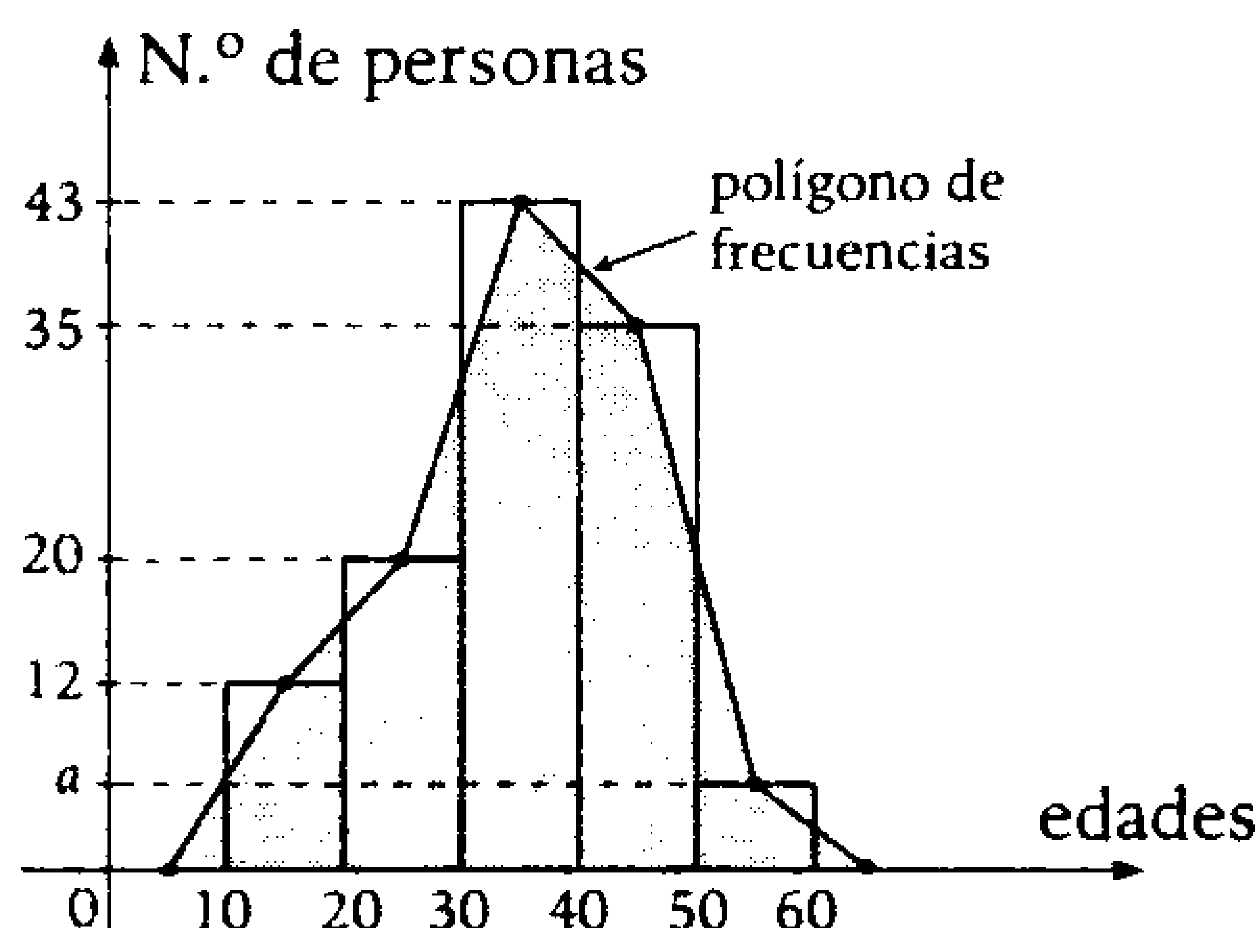
Psicólogos:	2%
Farmacéuticos:	23%
Psicólogos o Farmacéuticos:	25%

Clave E

PROBLEMA N.° 22

El siguiente gráfico muestra la distribución de las edades de un grupo de personas, en el cual el área de la región sombreada es 1200 u^2.
¿Qué cantidad de personas son mayores de 24 años, pero menores de 54 años?

A) 81
B) 84
C) 86
D) 91
E) 94



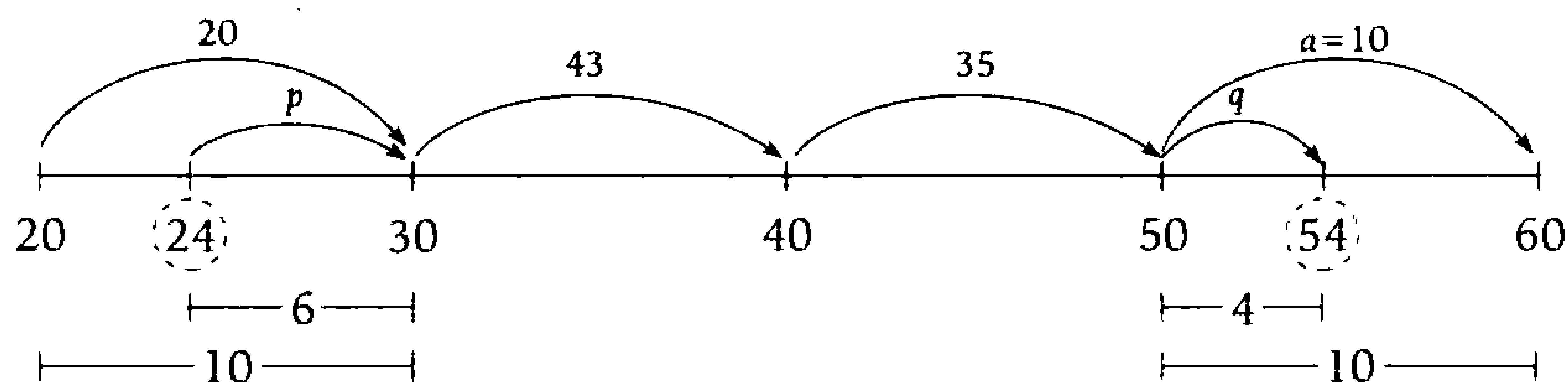
Resolución

Recuerda

El área de la región sombreada es igual al área del histograma.

Entonces: $10\times[12+20+43+35+a]=1200 \rightarrow a=10$

Luego



Por proporcionalidad: $\frac{6}{10}=\frac{p}{20} \rightarrow p=12$ $\frac{4}{10}=\frac{q}{10} \rightarrow q=4$

Piden: $p+43+35+q=94$

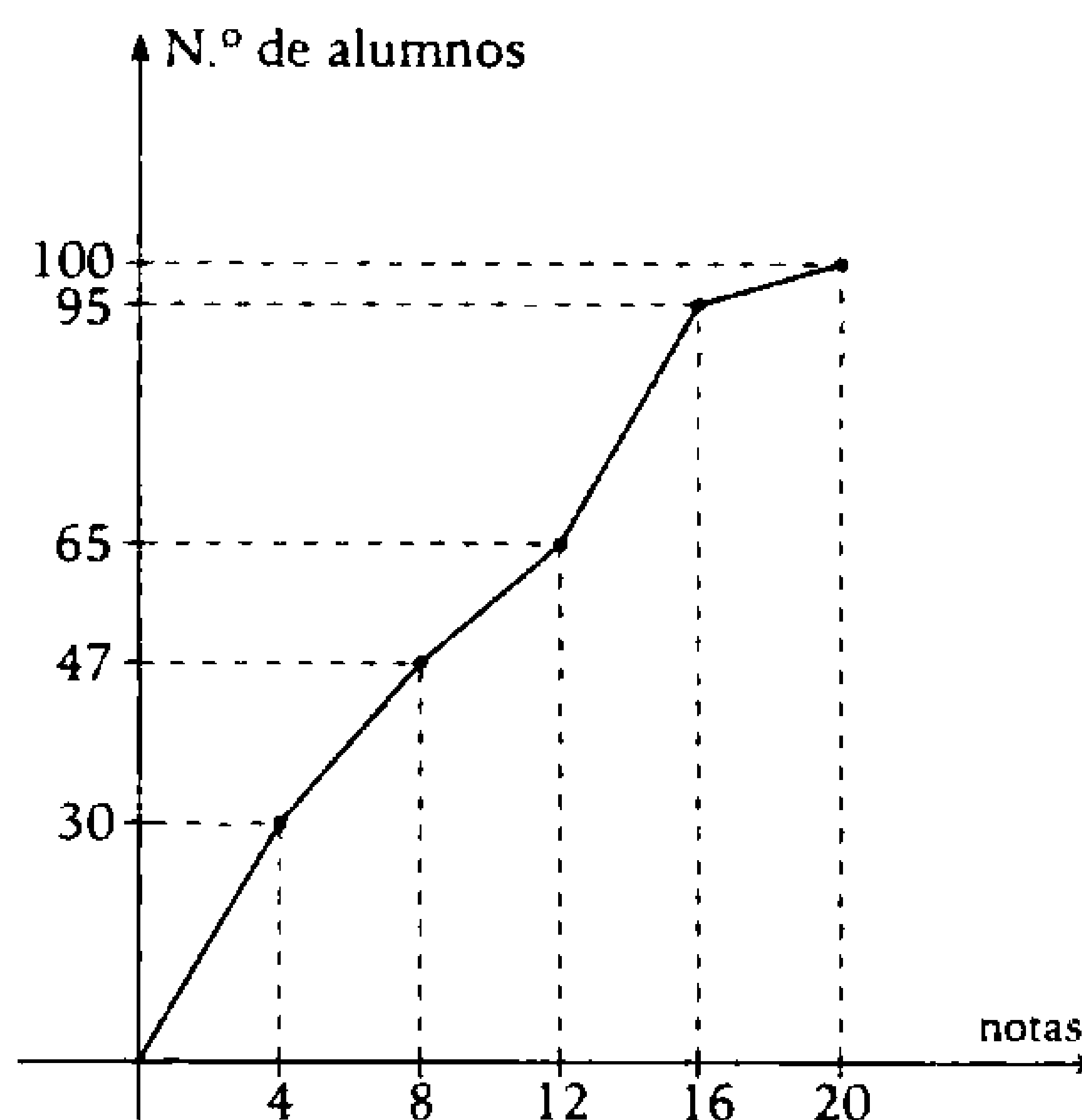
Por lo tanto, 94 personas son mayores de 24 años, pero menores de 54 años.

Clave E

PROBLEMA N.° 23

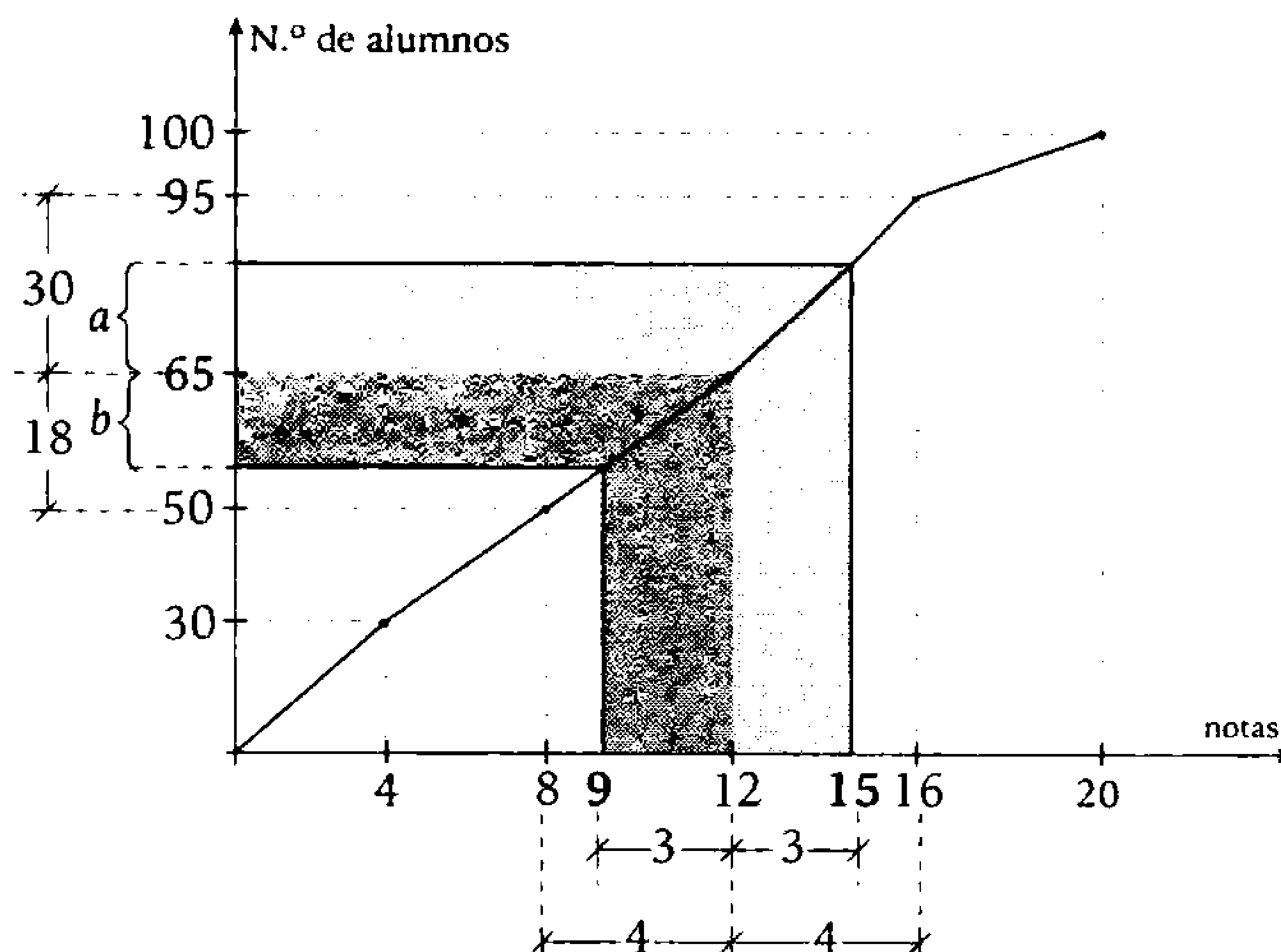
Se muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las notas de un examen. ¿Qué tanto por ciento de los alumnos tuvo una nota desde 9 hasta 15?

A) 32%
B) 33%
C) 34%
D) 35%
E) 36%



Resolución

De la ojiva se estima proporcionalmente cuántos alumnos tiene nota desde 9 hasta 15.



Por proporcionalidad

- $\frac{a}{30}=\frac{3}{4} \rightarrow a=\frac{90}{4}$
- $\frac{b}{18}=\frac{3}{4} \rightarrow b=\frac{54}{4}$

$\left.\right\}$ $a+b=36$

Entonces, son 36 alumnos que tienen nota desde 9 hasta 15.

100 < > 100%

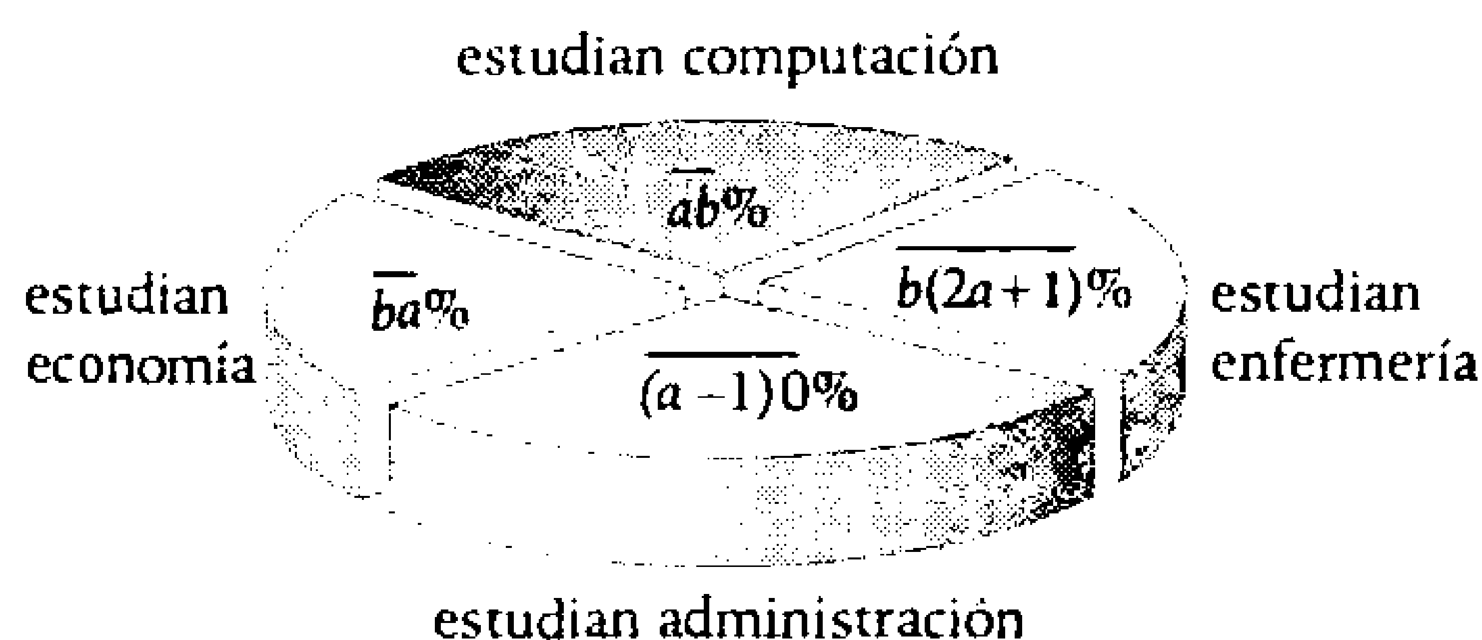
36 < > 36%

Por lo tanto, son 36% del total.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 24

En el siguiente diagrama circular, ¿cuántos jóvenes asistieron y cuántos estudian computación?



Dé como respuesta la suma, sabiendo, además, que 50 personas estudian administración.

A) 615 B) 515 C) 415
D) 625 E) 700

Resolución

Vemos que

$(a-1)>0 \rightarrow a>1$

$(2a+1)<10 \rightarrow a<4{,}5$

$\rightarrow a$: 2; 3 ó 4

Además

$\overline{ab}\%+\overline{b(2a+1)}\%+\overline{(a-1)0}\%+\overline{ba}\%=100\%$

$23a+21b=109$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 3$

Del diagrama circular:

- 50 estudian administración
  $10\%(\text{total})=50 \rightarrow \text{total}=500$
- Estudian computación
  $23\%(\text{total})=23\%(500)=115$

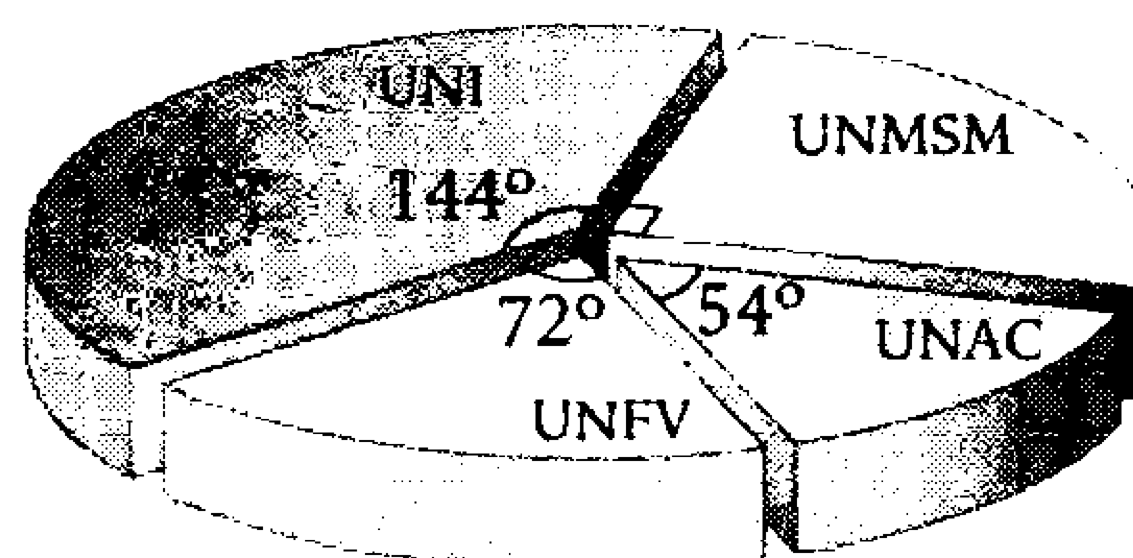
Piden la suma

$\therefore\ 500+115=615$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 25

En el siguiente diagrama circular se muestran las preferencias de 5000 alumnos de la academia Aduni por 4 universidades.



¿En cuánto excede el total de alumnos que postulan a la UNI o la UNFV, al número de alumnos que postulan a la UNAC o la UNMSM?

A) 800 B) 900 C) 1000
D) 1200 E) 1500

Resolución

	Ángulo	N.° de alumnos
UNI	144°	a
UNMSM	90°	b
UNAC	54°	c
UNFV	72°	d
		$n=500$

De la tabla
(N.º de alumnos) DP (ángulo)

$$\rightarrow \quad \frac{a}{144}=\frac{b}{90}=\frac{c}{54}=\frac{d}{72}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{8}=\frac{\overset{5000}{\boxed{a+b+c+d}}}{5+3+4+8}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{8}=250$$

$a=1250$; $b=750$; $c=1000$; $d=2000$

Nos piden

$(a+d)-(b+c)=1000$

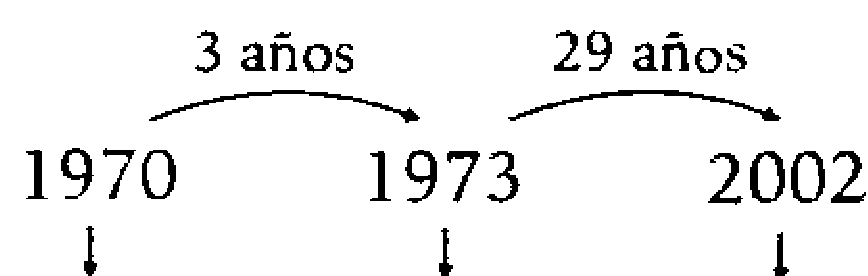
Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

En el año 1970, se casaron Luis y Jimena, cuando ella cumplió la mayoría de edad, y luego de 3 años tuvieron mellizos. Para el año 2002, esta familia estaba conformada por 8 miembros. Además, la media, la mediana y la moda de sus edades eran 26; 21 y 10, respectivamente. Halle la suma de las edades del padre y el hijo mayor, si sus tres últimos hijos son trillizos.

A) 62 años
B) 66 años
C) 81 años
D) 86 años
E) 92 años

Resolución



Jimena:	18 años	21 años	50 años
Mellizos:	—	0 años	29 años

Además, de los 8 miembros de la familia, se sabe que:

- $\bar{x}=26=\dfrac{\text{suma de las edades}}{8}$

  → Suma de las edades=208 años

- $Mo=10$ (la edad que más se repite)

  → Los trillizos tienen 10 años

- $Me=21$

  Debemos ordenar las 8 edades en forma creciente o decreciente; luego, la mediana será la semisuma de las dos edades centrales.

padres	mellizos	3.er hijo	trillizos
Edad de Luis; 50 ó 50; edad de Luis	29; 29;	a;	10; 10; 10

$$\frac{29+a}{2}=21$$

$\rightarrow 29+a=42$

Además, como sus edades suman 208:

Edad de Luis$+50+29+\boxed{42}+3\times10=208$

→ edad de Luis=57 años

Piden

(Edad del padre) + (Edad del hijo mayor)

Por lo tanto, $57+29=86$ años

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

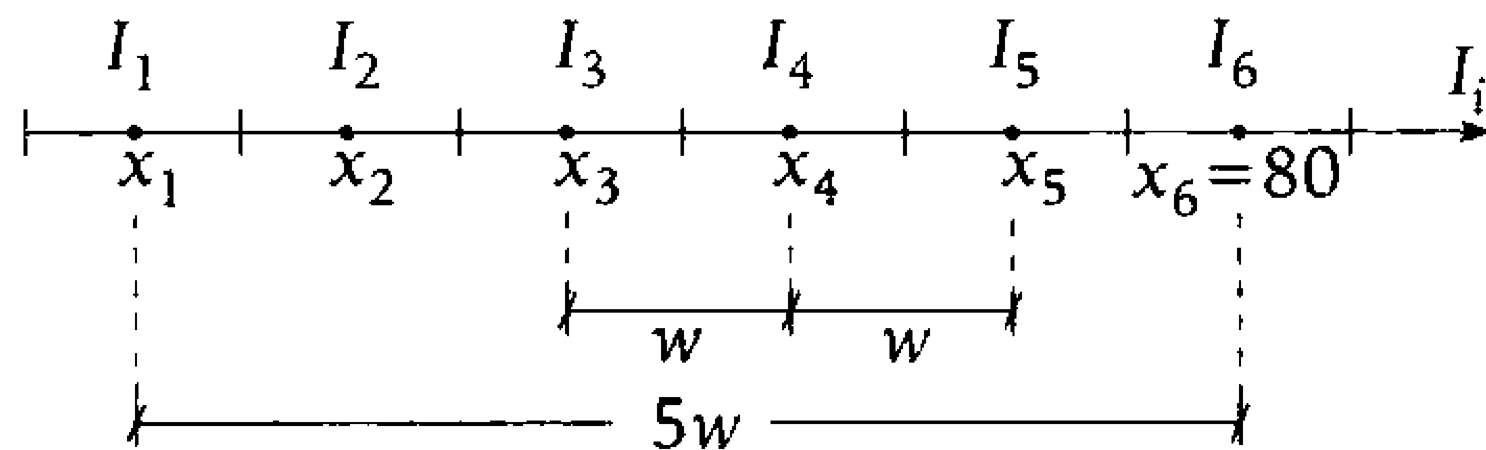
En una tabla de distribución de frecuencias hay 6 intervalos que tienen un ancho de clase común. Si $x_5-x_3=20$, además, $x_6=80$, halle x_1.

A) 25 B) 5 C) 30
D) 20 E) 35

Resolución

Se tiene $K=6$ intervalos, y ubicamos a las marcas de clase (x_i).

Dato: $x_5-x_3=20$



Se observa

- $\underbrace{x_5-x_3}_{20}=w+w$

  $20=2w$

  $10=w$

- $x_6-x_1=5w+w$

  $80-x_1=5\cdot 10$

  $x_1=30$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

Se tiene la siguiente tabla:

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[- ⟩			0,1	
[20- ⟩				
[- ⟩			0,3	
[- ⟩	24			0,85
[-60]	30			

Sea z la marca de clase de la clase mediana. Calcule $f_1+F_1+z+H_2$.

A) 84,15 B) 95,12 C) 72,76
D) 75,43 E) 94,15

Resolución

Como son 5 intervalos de clase

- $H_4+h_5=1 \rightarrow h_5=0,15$

  $H_4 = 0,85$

n: total de datos

- $h_5=0,15=\dfrac{30}{n} \rightarrow n=200$

Recuerda

La relación en la cual se encuentran las f_i es la misma relación en la cual se encuentran sus respectivas h_i.

- $\dfrac{h_1}{2}=\dfrac{h_3}{6}=\dfrac{h_5}{3} \rightarrow \dfrac{f_1}{2}=\dfrac{f_3}{6}=\dfrac{f_5}{3}$

Como

$f_5=30 \rightarrow f_1=20 \wedge f_3=60$

Además

$$\sum_{i=1}^{5} f_i=200 \rightarrow f_2=66$$

- $H_2=h_1+h_2=\dfrac{20}{200}+\dfrac{66}{200}=0,43$

Sea w el ancho de clase constante

$20+4\times w=60 \rightarrow w=10$

Luego, como son 200 datos, la Me estará en el tercer intervalo.

$F_3>\dfrac{n}{2}$

[30-40⟩ $\rightarrow$ $z=35$

Piden

$f_1+F_1+z+H_2$; $(F_1=f_1)$

$\therefore$ $f_1+F_1+z+H_2=75,43$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Determine qué tanto por ciento del total tienen edades desde 20 hasta 33 años.

Edades	f_i	h_i	H_i
[-18⟩			0,10
[- ⟩		0,30	
[- ⟩	40		
[-36⟩	20		

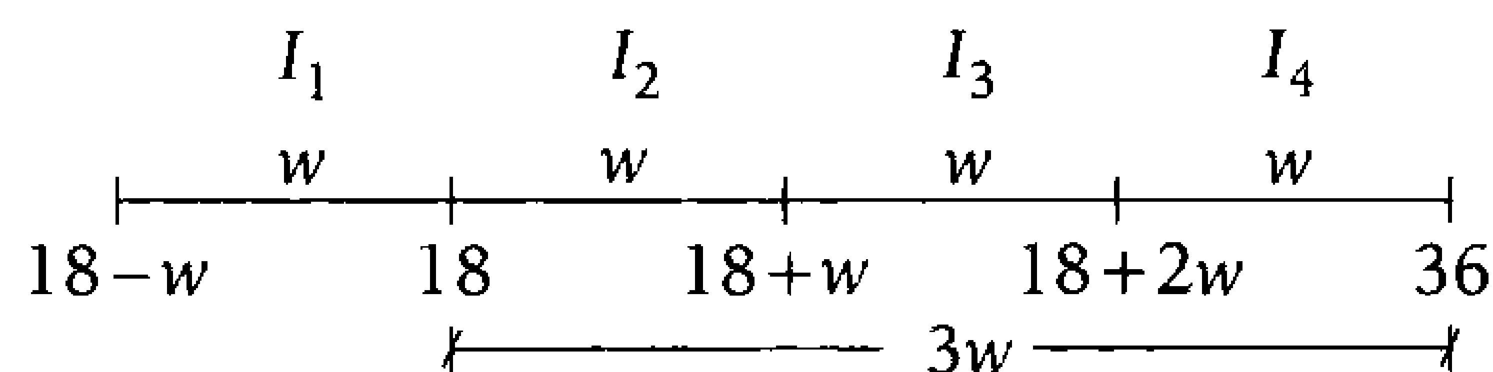
A) 50% B) 60% C) 70% D) 80% E) 90%

Resolución

DP ($f_i \to h_i$)

Edades	f_i	h_i	H_i	
[-18⟩		h_1=0,10	0,10	0,40
[18 - ⟩		h_2=0,30	0,40	
[- ⟩	f_3=40	h_3		0,60
[-36⟩	f_4=20	h_4		
		1		

- De los intervalos



- $3w=36-18 \rightarrow w=6$

- $\sum_{i=1}^{4} h_i = 1$

$$h_1+h_2+h_3+h_4=1 \rightarrow h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$$

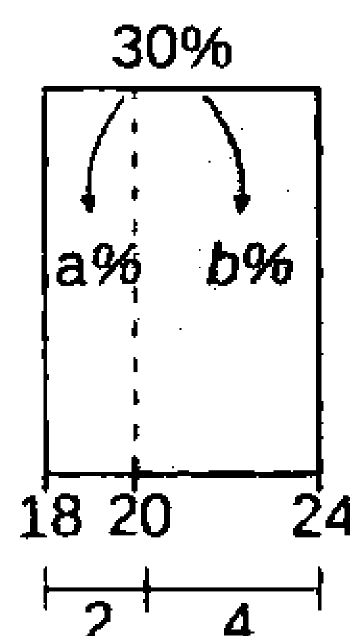
$$0,10+0,30+\frac{40}{n}+\frac{20}{n}=1 \rightarrow n=100$$

Además $n=100$; $h_3=0{,}40$; $h_4=0{,}20$

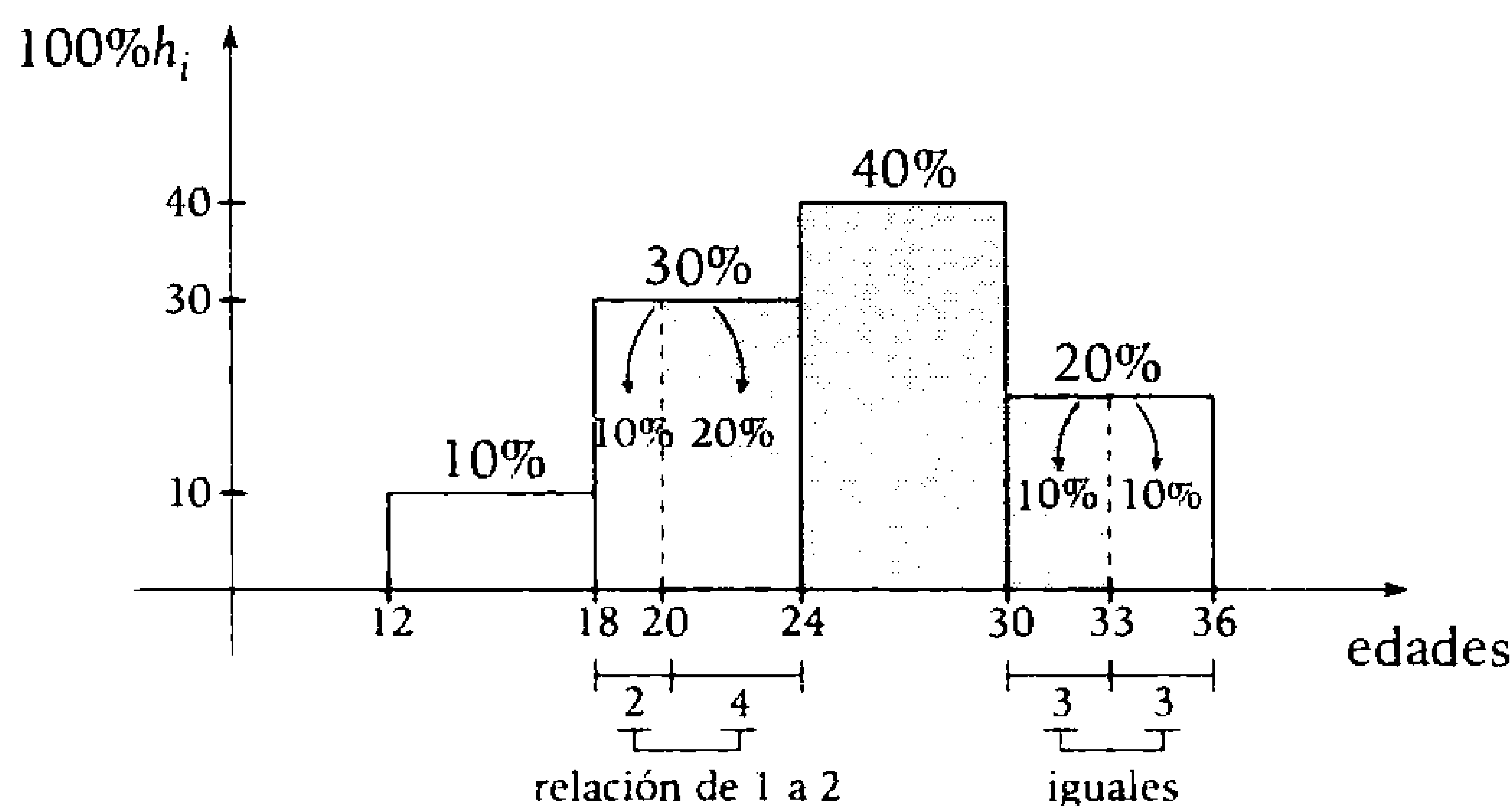
Observación

- $a\%+b\%=30\%$
- $\frac{a}{2}=\frac{b}{4}$
- $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{a+b}{1+2}=\frac{30}{3}=10$

$a=10$ y $b=20$



Los que tienen edades desde 20 años hasta 33 años los ubicamos en los intervalos; aplicamos proporción entre el tanto por ciento y los segmentos que le corresponden:



Por lo tanto, de 20 a 33 años son: $20\%+40\%+10\%=70\%$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Construya una tabla de distribución de frecuencias con 5 intervalos de clase de ancho común, teniendo en cuenta lo siguiente:

- $f_1=15=f_5$
- $h_2=h_4$
- $h_5=0{,}15$
- $H_3=0{,}73$
- $x_3=63=x_2+30$

Determine $\bar{x}+Me$.

A) 105 B) 110 C) 114
D) 117 E) 126

Resolución

Como $h_2=h_4$; $\frac{f_2}{n}=\frac{f_4}{n} \rightarrow f_2=f_4$

Luego, como $f_1=f_5$ y $f_2=f_4$, la distribución es simétrica, entonces: $\bar{x}=Me$.

Además, como son 5 intervalos de clase, la Me estará en el tercer intervalo, siendo esta la marca de clase de dicho intervalo.

$\rightarrow \bar{x}=Me=x_3=63$

$\therefore \bar{x}+Me=126$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 31

Dada la siguiente tabla de distribución sobre los pesos de 120 niños de tres aulas de primaria de un colegio del cono norte de Lima, calcule la mediana.

I_i	x_i	f_i	h_i
[; ⟩	12		0,25
[; ⟩		45	
[; ⟩			0,25
[; 33⟩			

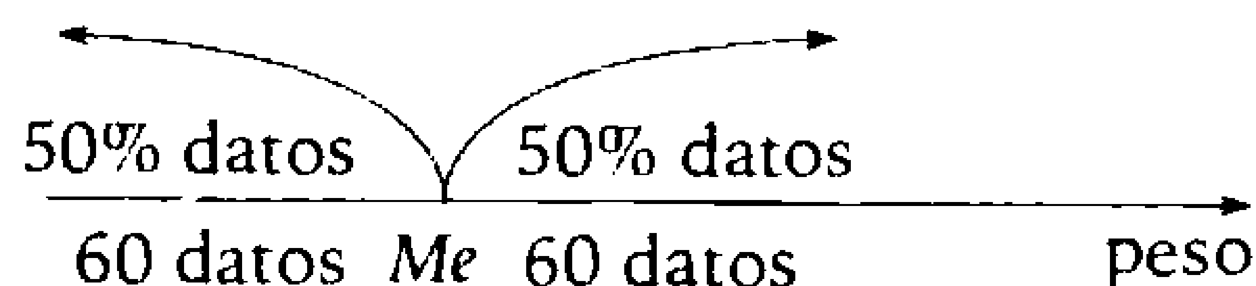
A) 17 B) 18 C) 19
D) 21 E) 23

Resolución

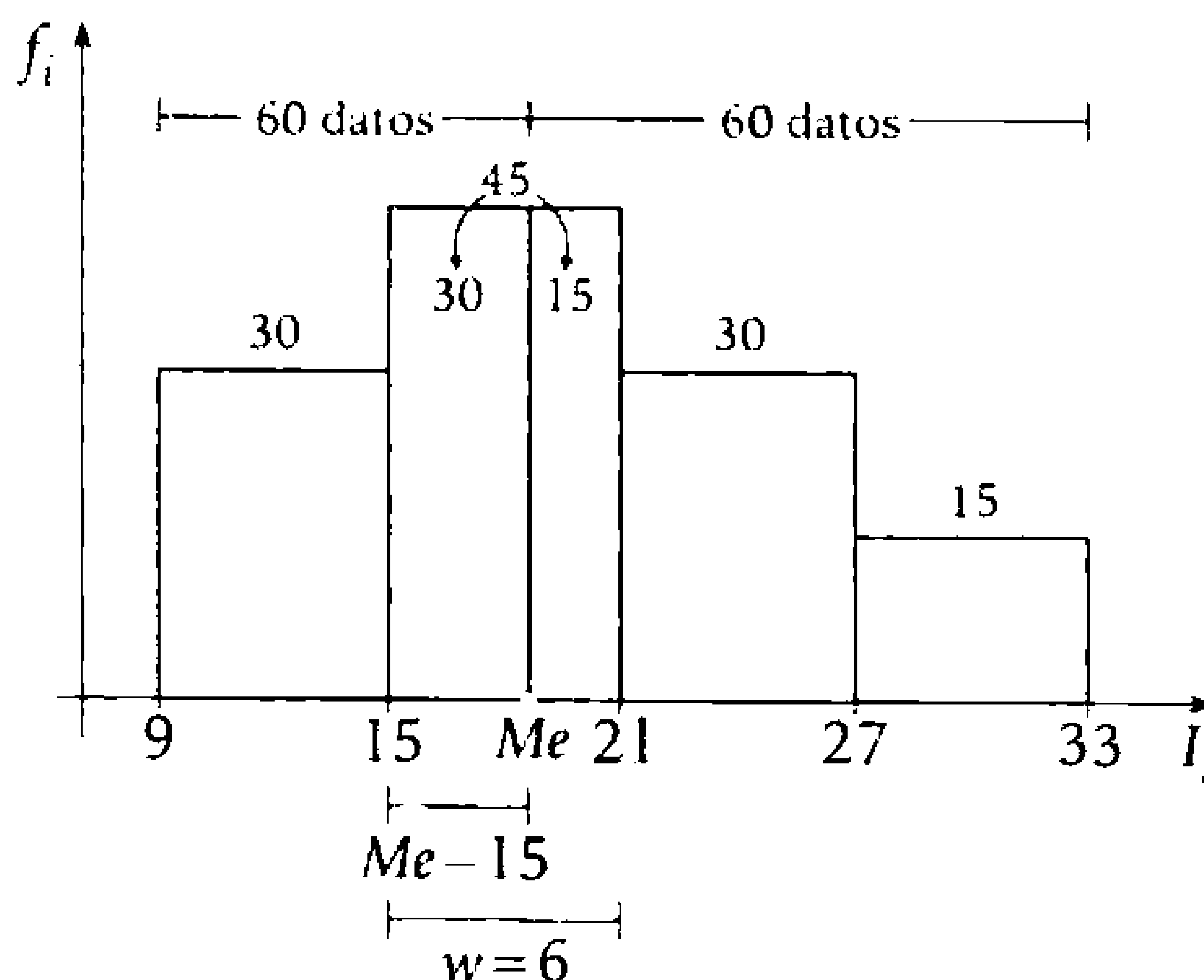
Se tiene

- Variable: peso de un niño.
- Tamaño de la muestra: $n=120$ niños

La mediana (Me) separa los datos en dos partes iguales:



Completando el cuadro, tenemos



El número de datos es DP al segmento.

$$\frac{30}{Me-15}=\frac{45}{6}$$

$\therefore\ Me=19$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

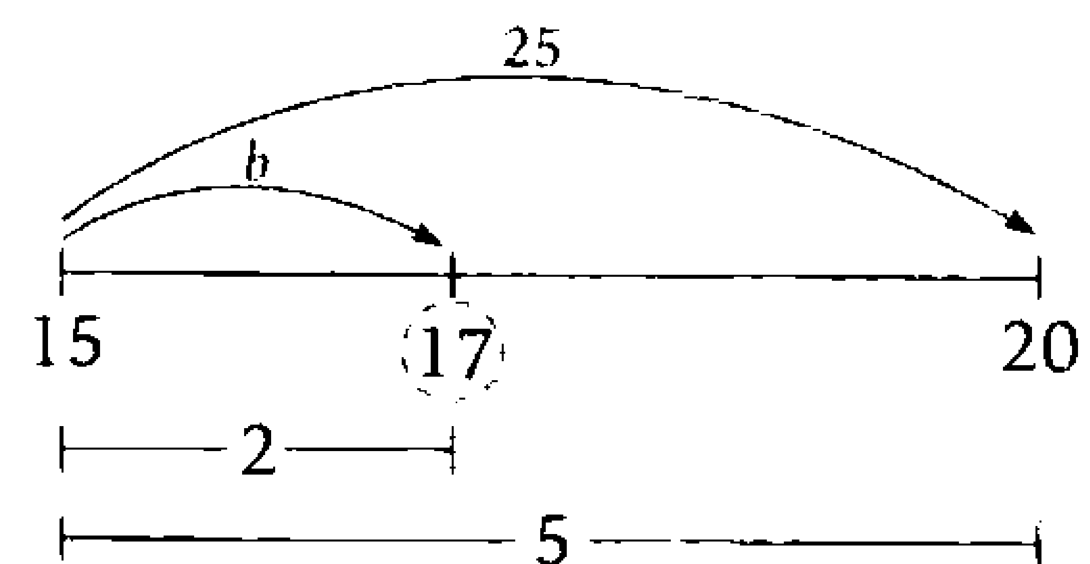
Las notas de un grupo de alumnos de un mismo año escolar fueron las siguientes: los 18 alumnos de la sección *A* obtuvieron notas menores a 05; los 25 alumnos de la sección B, notas mayores o iguales a 15; los 40 alumnos de la sección *C*, notas menores a 10; y los 17 alumnos de la sección *D*, notas entre 10 y 15. Si la menor y mayor calificación fue 00 y 20, respectivamente, ¿qué tanto por ciento del total de alumnos obtuvieron una nota entre 7 y 17?

A) 30% B) 40% C) 39%
D) 35% E) 42%

Resolución

Solo interesan los alumnos que obtuvieron una nota entre 7 y 17; por lo tanto, no tomaremos en cuenta a los alumnos de la sección *A*.

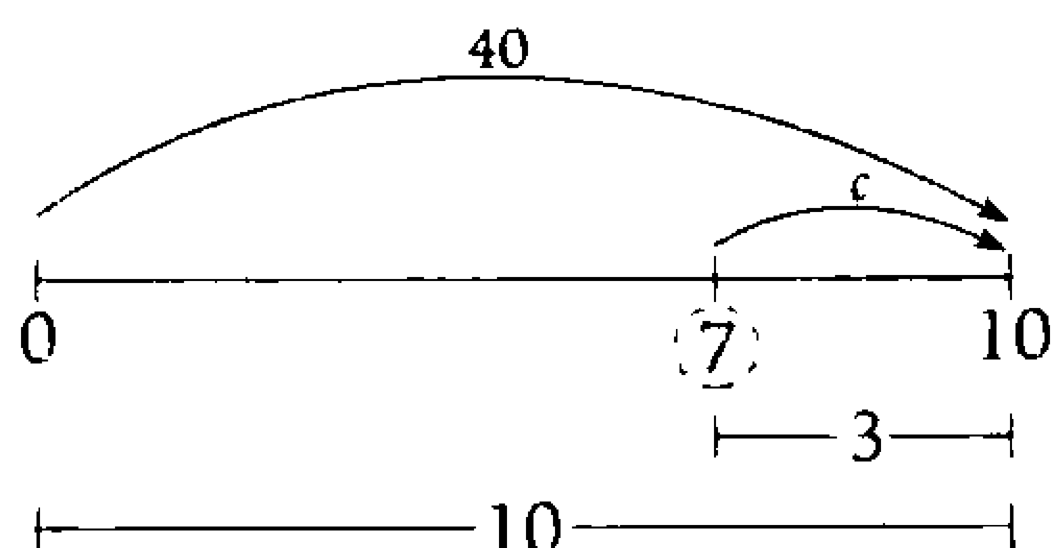
- Sección B



Por proporcionalidad

$$\frac{2}{5}=\frac{b}{25}\ \rightarrow\ b=10$$

- Sección C



Por proporcionalidad

$$\frac{3}{10}=\frac{c}{40} \rightarrow c=12$$

- Sección D (todos cumplen la condición).

Piden

$$\frac{10+12+17}{18+25+40+17}=\frac{39}{100}=39\%$$

Por lo tanto, el 39% del total de alumnos obtuvieron una nota entre 7 y 17.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Se muestra la distribución de edades de un cierto número de personas.

I_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20 - 30⟩	80			
[30 - 40⟩	40	0,25		z
[40 - 50⟩		0,15	y	
[50 - 60⟩	x			

Halle $x+y+z$.

A) 120,5 B) 130 C) 14,25
D) 160,75 E) 180

Resolución

I_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20-30⟩	f_1 80	h_1		
[30-40⟩	$f_2=40$	$h_2=0,25$		$H_2=z$
[40-50⟩		$h_3=0,15$	$F_3=y$	
[50-60⟩	$f_4=x$			
Total	n	1		

Por sus frecuencias tenemos

- $h_2=\frac{f_2}{n} \rightarrow 0,25=\frac{40}{n}$

$n=160$

- $h_1=\frac{f_1}{n} \rightarrow h_1=\frac{80}{160}$

$h_1=0,50$

- $h_3=\frac{f_3}{n} \rightarrow 0,15=\frac{f_3}{160}$

$f_3=24$

- $\sum_{i=1}^{4} f_i=n$

$f_1+f_2+f_3+f_4=n$

$80+40+24+x=160 \rightarrow x=16$

- $F_3=f_1+f_2+f_3$

$y=80+40+24 \rightarrow y=144$

- $H_2=h_1+h_2$

$z=\frac{80}{160}+0,25 \rightarrow z=0,75$

Por lo tanto, $x+y+z=160,75$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Se tiene la siguiente tabla de ancho de clase común.

I_i	x_i	f_i	F_i
$[a\ -\ \rangle$			
$[\ -\ \rangle$			
$[\ -\ \rangle$	18		10
$[\ -\ \rangle$			
$[\ -\ b\rangle$			28

Se sabe que las f_i son números primos.

Además

$f_1+f_5=13;\ f_3+f_4=12 \ \wedge\ b-a=20$

Halle $a+b+f_1+f_4$.

A) 40 B) 43 C) 45
D) 51 E) 57

Resolución

Sabiendo que

- Las f_1 son números primos
- De la tabla

$F_5-F_3=f_4+f_5=18$

Tenemos

f_1	+	$f_5=13$		f_4	+	$f_5=18$	
↓		↓		↓		↓	
2		11	→	7		11	Sí cumple
11		2	→	16		2	No cumple

Además, se observa que $x_3=18$ es el punto medio del alcance, entonces

$$\frac{a+b}{2}=18 \rightarrow a+b=36$$

$\therefore\ a+b+f_1+f_4=45$

Clave C

PROBLEMA N.° 35

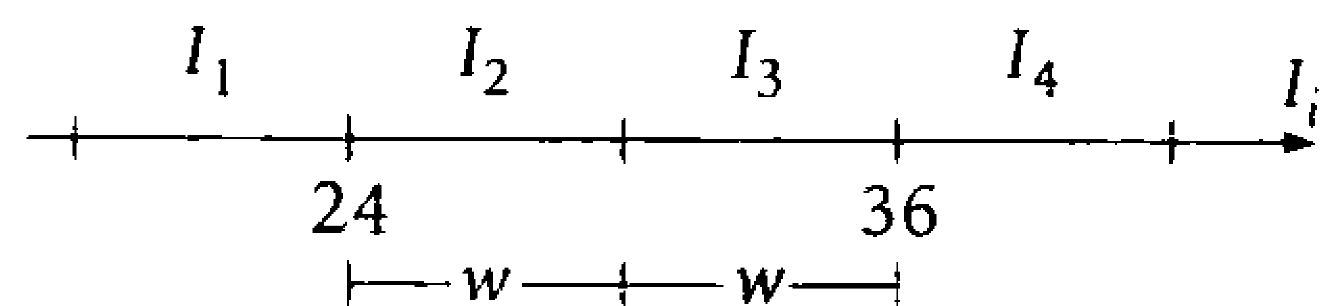
En la siguiente tabla se consideran las edades de un conjunto de personas que asistieron a un Congreso de Pedagogía realizado en Lima. Si se obtuvo la distribución de frecuencias de igual ancho de clase, halle $(\bar{x}+H_2)$.

I_i	f_i	h_i	H_i
$[\ -24\rangle$			
$[\ -\ \rangle$		30%	
$[\ -\ \rangle$	40		80%
$[36-\ \rangle$	20		

A) 32,4 B) 31,6 C) 30,8
D) 31,8 E) 32,2

Resolución

Analizando los intervalos



$w+w=36-24$

$w=6$

Analizando la tabla

I_i	f_i	h_i	H_i
$[18-24\rangle$			
$[24-30\rangle$		$h_2=30\%$	
$[30-36\rangle$	$f_3=40$		$H_3=80\%$
$[36-42\rangle$	$f_4=20$	h_4	
Total	n	100%	

- $\underbrace{h_1+h_2+h_3}_{80\%}+h_4=100\%$

$80\%+h_4=100\% \rightarrow h_4=20\%$

- $h_4=\dfrac{f_4}{n} \rightarrow 20\%=\dfrac{20}{n} \rightarrow n=100$

- $h_2=\dfrac{f_2}{n} \rightarrow 30\%=\dfrac{f_2}{100} \rightarrow f_2=30$

Tenemos

x_i	f_i	$xi \cdot f_i$
21	10	210
27	30	810
33	40	1320
39	20	780
	$n=100$	$\sum_{i=1}^{4} x_i f_i=3120$

- $H_2=\dfrac{F_2}{n} \rightarrow H_2=\dfrac{40}{100}$

$H_2=0{,}4$

- $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i f_i}{n}$

$\bar{x}=\dfrac{3120}{100}$

$\bar{x}=31{,}2$

$\therefore\ \bar{x}+H_2=31{,}6$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

Dada la siguiente tabla de distribución de frecuencias de igual ancho de clase, calcule $\bar{x}$.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[- ⟩			0,1	
[- ⟩				
[- ⟩	35		0,2	
[- ⟩		15		0,9
[50-]		5		

A) 25 B) 31 C) 35
D) 38 E) 42

Resolución

Como son 5 intervalos de clase

- $H_4+h_5=H_5=1 \rightarrow h_5=0{,}10$
  (H_4 = 0,9)

n: total de datos

- $h_5=\dfrac{f_5}{n}=\dfrac{5}{n}=0{,}10 \rightarrow n=50$

Recuerda

La relación en la cual se encuentran las f, es la misma relación en la cual se encuentran sus respectivas h_i.

- $h_1=h_5 \rightarrow f_1=5$
- $h_3=2\cdot h_1 \rightarrow f_3=10$
- $\sum_{i=1}^{5} f_i=50 \rightarrow f_2=15$

Como: $f_1=f_5 \ \wedge\ f_2=f_4$

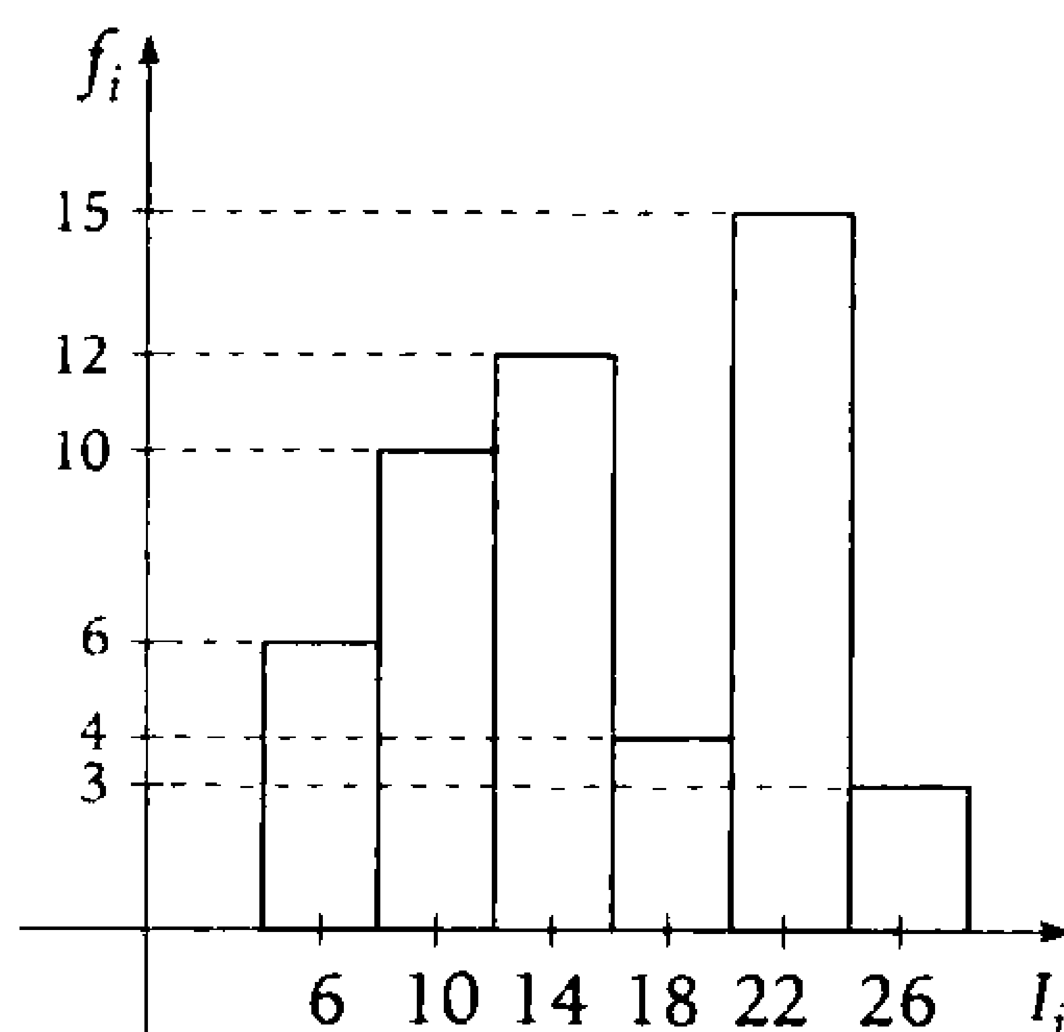
Tenemos una distribución simétrica, entonces, la $\bar{x}$ es el punto medio del alcance, e igual a x_3.

$\therefore\ \bar{x}=35$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

Del diagrama, calcule la suma de la media y la mediana.



A) 28,30
B) 29,68
C) 30,68
D) 31,53
E) 32,32

Resolución

- Cálculo de la media ($\bar{x}$)

x_i	f_i	$xi \cdot f_i$
6	6	36
10	10	100
14	12	168
18	4	72
22	15	330
26	3	78
	$n=50$	$\sum x_i f_i=784$

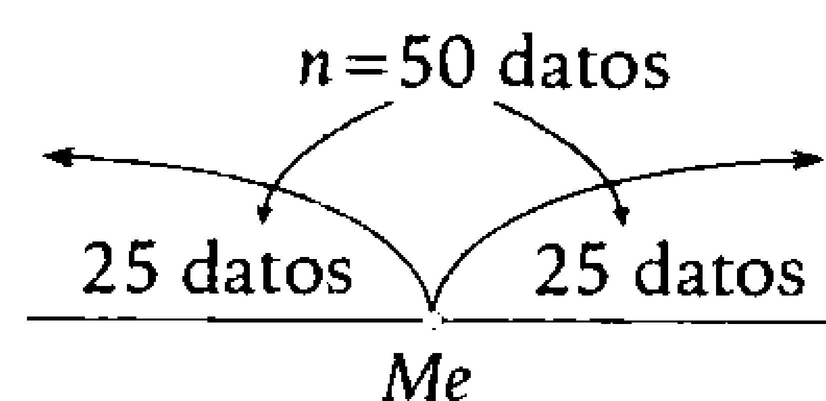
Tenemos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{n}$$

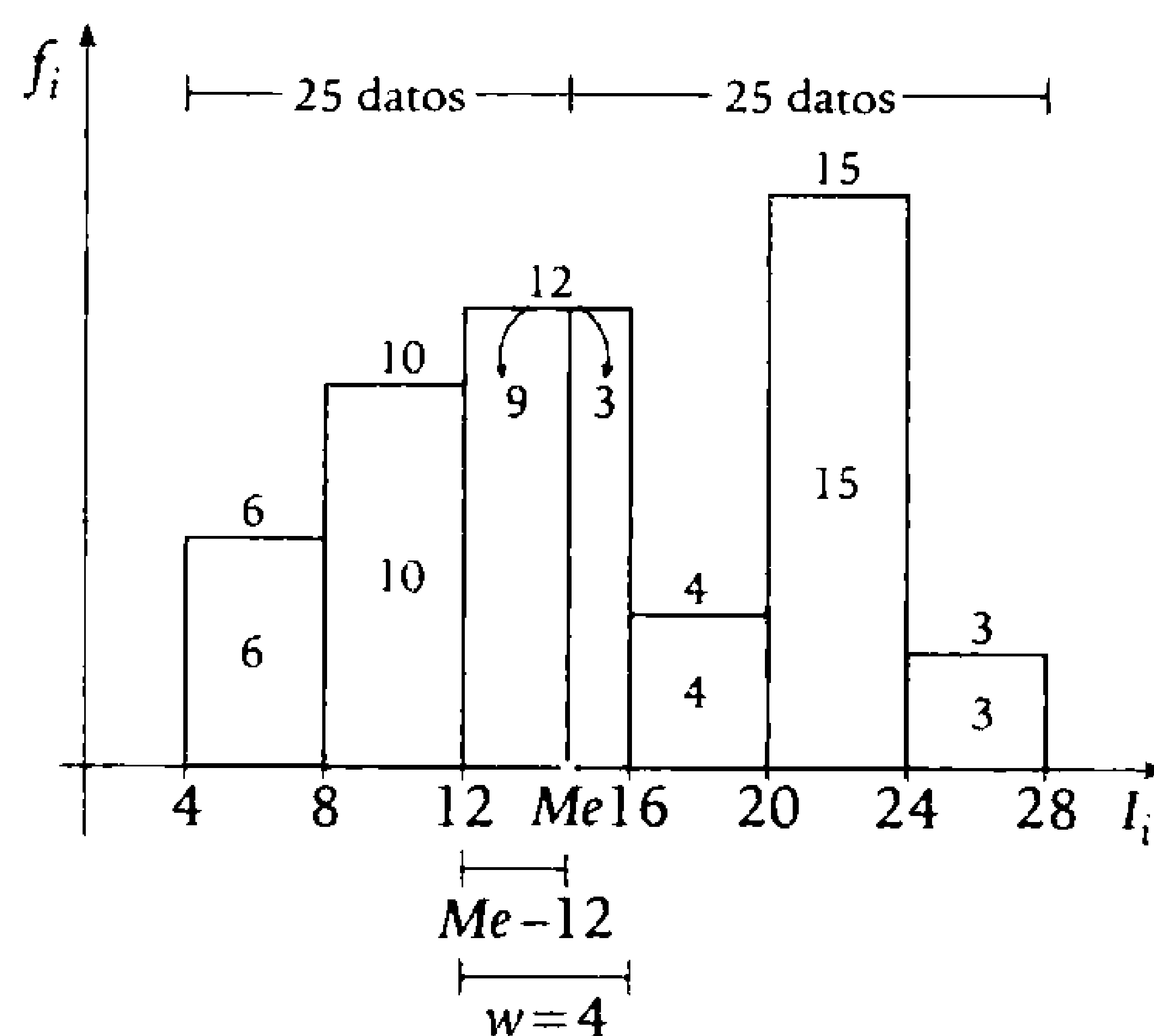
$$\bar{x} = \frac{784}{50}$$

$\rightarrow \ \bar{x}=15,68$

- Cálculo de la mediana



Ubicamos la mediana en los intervalos



Por proporción

$$\rightarrow \ \frac{Me-12}{4} = \frac{9}{12}$$

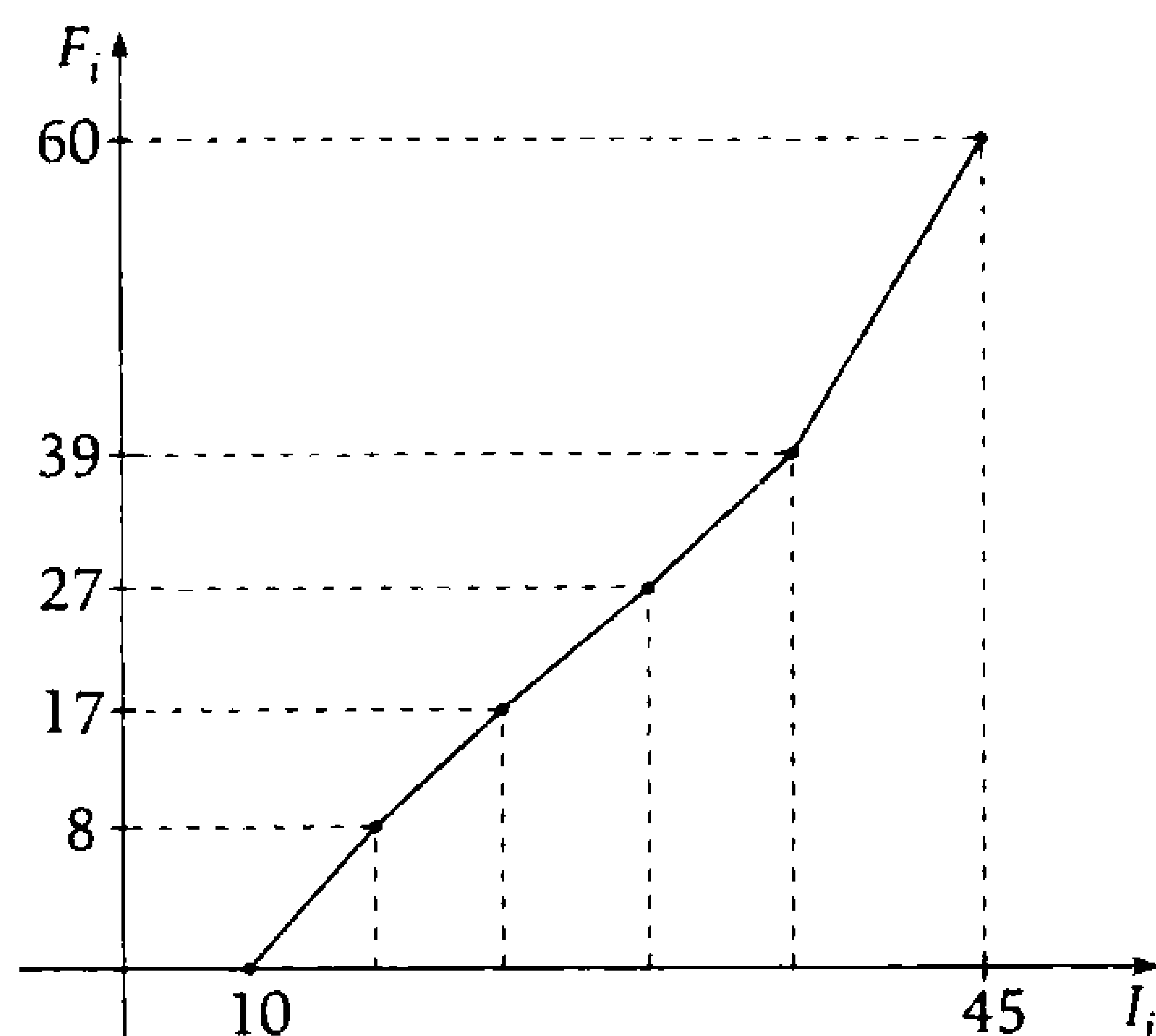
$Me=15$

$\therefore \ Me+\bar{x}=30,68$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

De la siguiente ojiva, determine el valor de la mediana, considerando el ancho de clase constante.



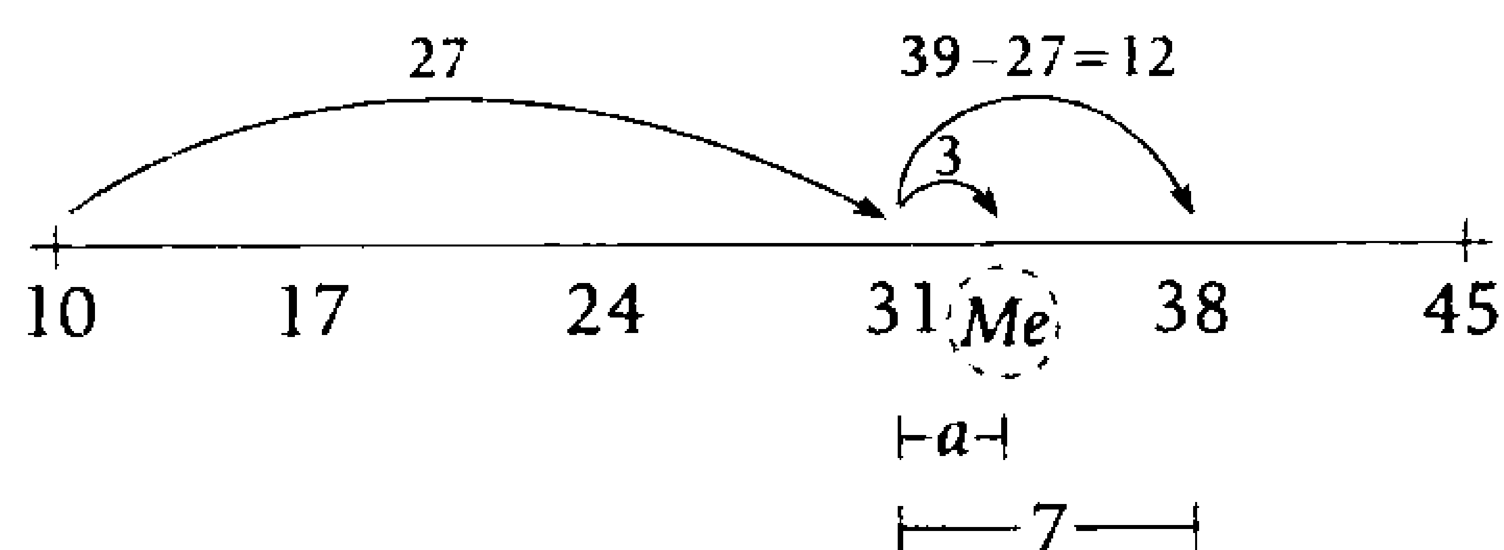
A) 30,5 B) 32,75 C) 31,25
D) 33,25 E) 34,5

Resolución

Observamos que son 5 intervalos de clase.
Sea w el ancho de clase constante, entonces:

$$w=\frac{45-10}{5}=7$$

Además, como el total de datos es 60 ($F_5=60$), la Me estará en el cuarto intervalo ($F_4>30$)



Por proporcionalidad

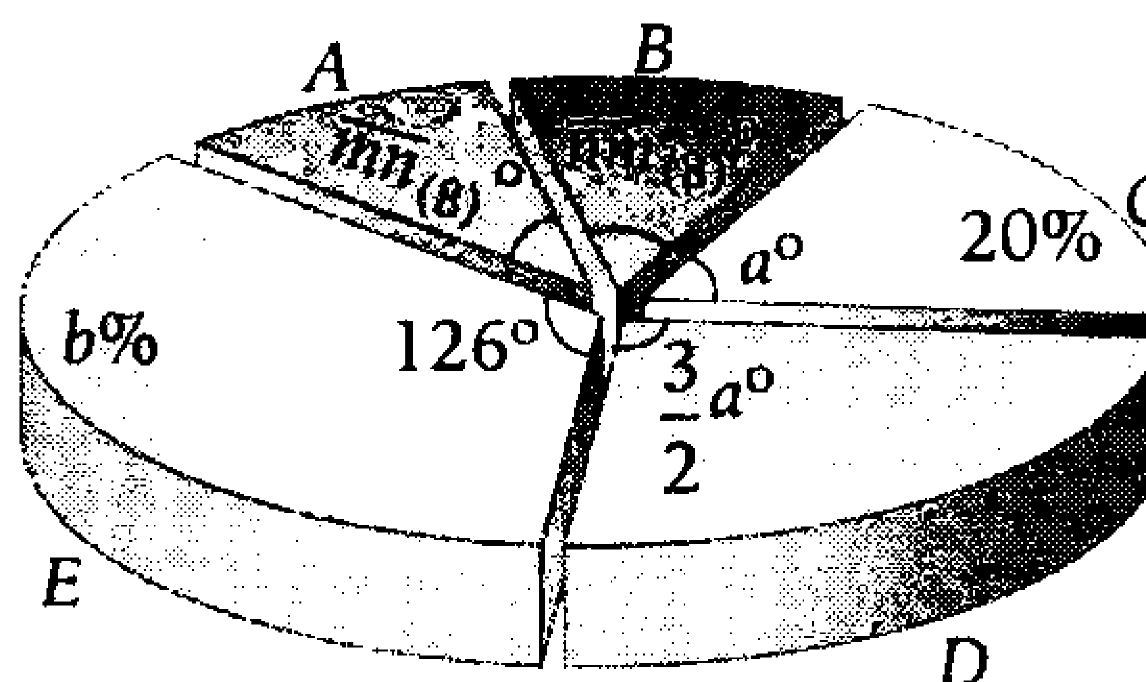
$$\frac{a}{7}=\frac{3}{12} \rightarrow a=1,75$$

$\therefore\ Me=31+a=32,75$

Clave B

PROBLEMA N.° 39

Dado el siguiente diagrama circular sobre las preferencias de las revistas A, B, C, D y E, calcule $a+b+m+n$.



A) 101 B) 108 C) 113
D) 117 E) 126

Resolución

Del diagrama circular obtenemos

Revistas	Ángulo	%
A	$\overline{mn}_{(8)}$	h_1
B	$\overline{nm}_{(8)}$	h_2
C	a	20%
D	$\frac{3a}{2}$	h_4
E	126	$b\%$
	360	100%

Por ser proporcionales

$$\underbrace{\frac{h_1}{\overline{mn}_{(8)}}=\frac{h_2}{\overline{nm}_8}}_{(IV)}=\underbrace{\frac{20\%}{a}=\frac{h_4}{\frac{3}{2}a}}_{(III)}=\underbrace{\frac{b\%}{126}=\frac{100\%}{360}}_{(II)}$$

(I): $\frac{20\%}{a}=\frac{100\%}{360}$

De (I) se obtiene $a=72$
De (II) se obtiene $b=35$
De (III) se obtiene $h_4=30\%$

De (IV) tenemos

$$\frac{\overline{h_1+h_2}}{\overline{mn_8}+\overline{nm_8}}=\frac{100\%}{360}$$

$$\frac{h_1+h_2}{(8m+n)+(8n+m)}=\frac{1}{360}$$

$$h_1+h_2=\frac{(n+m)}{40}$$

- $\underbrace{h_1+h_2}+h_3+h_4+h_5=100\%$

$$\frac{(n+m)}{40}+20\%+30\%+35\%=100\%$$

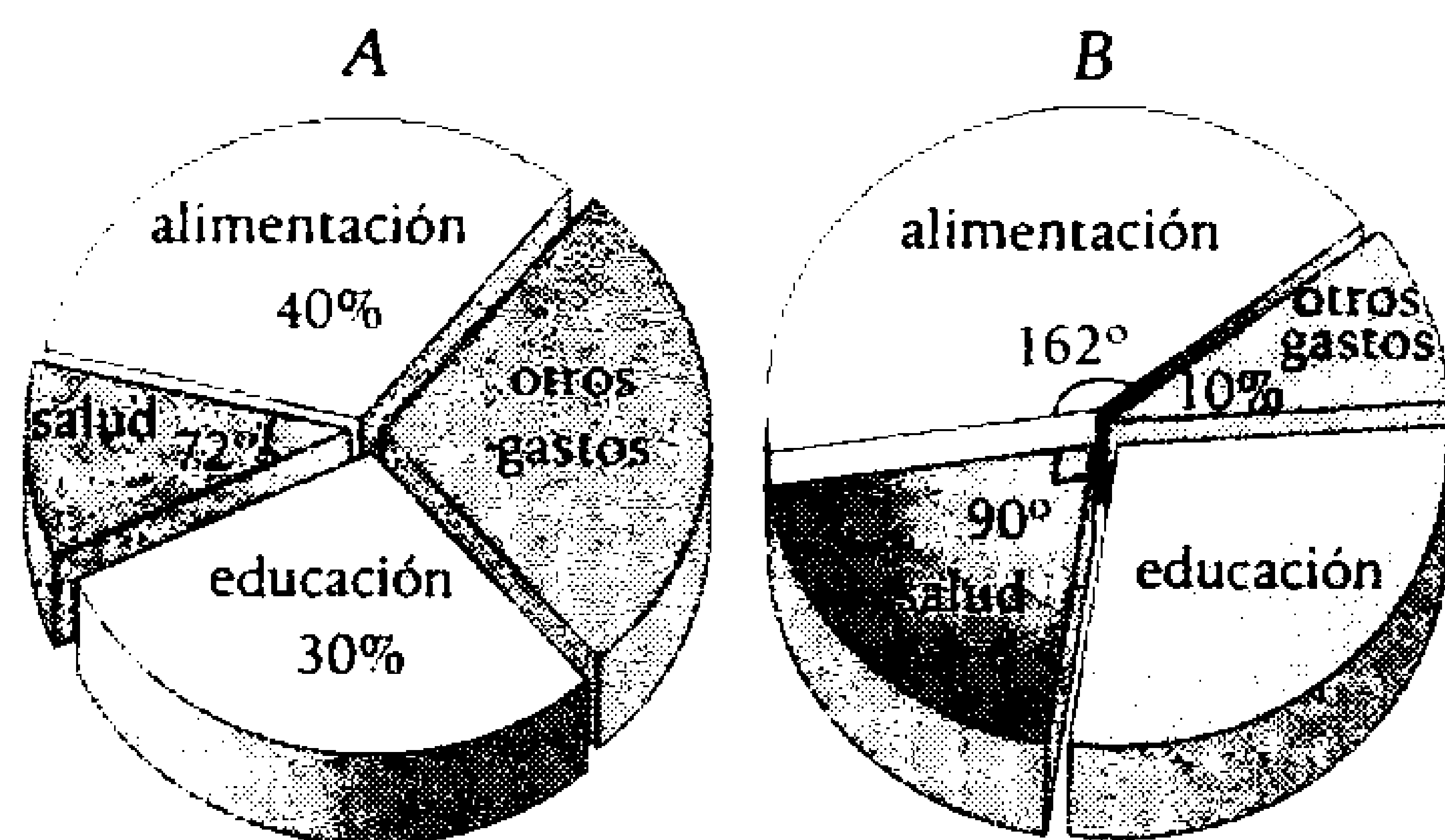
$n+m=6$

$\therefore\ a+b+n+m=113$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

A continuación, se muestran los gráficos de sectores referentes a los presupuestos mensuales de dos trabajadores.



Además, se sabe que el sueldo del trabajador *A* es 3/5 veces más que el sueldo del trabajador *B*. ¿Qué tanto por ciento de los gastos adicionales de *A* representan los gastos de alimentación y educación de *B*?

A) 352,25% B) 343,75% C) 406,25%
D) 394,75% E) 388,75%

Resolución

Sabemos que en un gráfico de sectores 360° <>100%, entonces

- En *A*:

$$\frac{100\%}{360^\circ}=\frac{\text{salud}}{72^\circ}$$

salud=20%

→ otros gastos=10%

- En *B*:

$$\frac{100\%}{360^\circ}=\frac{\text{salud}}{90^\circ}=\frac{\text{alimentación}}{162^\circ}$$

Salud=25%; alimentación=45%

→ Educación=20%

Además

$$\text{sueldo}(A)=\left(1+\frac{3}{5}\right)\times\text{sueldo}(B)$$

$$\frac{\text{sueldo}(A)}{\text{sueldo}(B)}=\frac{8}{5}\ \left\}\begin{array}{l}\text{sueldo}(A)=8K\\ \text{sueldo}(B)=5K\end{array}\right.$$

Piden

$$\frac{[\text{alimentación}(B)+\text{educación}(B)]}{[\text{otros gastos}(A)]}\times 100\%$$

$$\therefore\ \frac{65\%(5K)}{10\%(8K)}\times 100\%=406,25\%$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 41

Se tienen cuatro cantidades enteras y positivas: su mediana es 9, su media es 8 y su moda es 9. Determine el producto de dichas cantidades si es mínima.

A) 1100 B) 1000 C) 472
D) 1053 E) 1134

Resolución

Sean los cuatro datos ordenados

$a \leq b \leq c \leq d$

- $Me = \dfrac{b+c}{2} = 9$

  $\rightarrow\ b+c=18$

- $Mo=9$ (se repite el dato 9 al menos 2 veces)

- $\bar{x} = \dfrac{a+b+c+d}{4} = 8$

  $a+d+\underbrace{b+c}_{18}=32$

  $a+d=14$

Tenemos varias soluciones

suman 14

a	$\leq$	b	$\leq$	c	$\leq$	d	
↓		↓		↓		↓	
5		9		9		9	
4		9		9		10	
3		9		9		11	
2		9		9		12	
1		9		9		13	(menor producto)

$\therefore\ a\times b\times c\times d=1\times 9\times 9\times 13=1053$

Clave D

PROBLEMA N.° 42

Las ganancias diarias de los establecimientos de un centro comercial se presentan en una tabla de frecuencias con 6 intervalos de clase, también se sabe que la mínima ganancia es de \$6 y el rango es 36.

Además, se tienen los siguientes datos:

- $f_4=304$
- $F_2=120$
- $f_2=2f_1$
- $H_2=0,15$
- $h_3=0,25$
- $H_5=0,93$

Calcule la moda de la distribución.

A) $26,1\overset{\frown}{6}$ B) $27,1\overset{\frown}{6}$ C) 26,34 D) 27,19 E) 25,51

Resolución

Sea w el ancho de clase común, tenemos

$$w = \frac{\text{rango}}{\text{número de intervalos}} = \frac{36}{6} = 6$$

Además

- $f_2=2f_1$

- $F_2=f_1+f_2=120=3f_1\ \rightarrow\ f_1=40\ \wedge\ f_2=80$

  n: total de datos

- $H_2 = 0,15 = \dfrac{F_2}{n} = \dfrac{120}{n}\ \rightarrow\ n = 800$

- $h_3 = \dfrac{f_3}{800} = 0,25\ \rightarrow\ f_3 = 200$

Como son 6 intervalos de clase

- $\underset{0,93}{H_5}+h_6=H_6=1\ \rightarrow\ h_6=0,07$

  $h_6 = \dfrac{f_6}{800} = 0,07\ \rightarrow\ f_6 = 56$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} f_i = 800\ \rightarrow\ f_5 = 120$

Luego

I_i	f_i
[6 - 12⟩	40
[12 - 18⟩	80
[18 - 24⟩	200
[24 - 30⟩	304
[30 - 36⟩	120
[36 - 42]	56

Como el intervalo [24-30⟩ tiene la mayor frecuencia absoluta, entonces dicho intervalo será la clase modal

$$\underset{24}{\vdash}\overset{a}{\frown}\underset{Mo}{+}\overset{b}{\frown}\underset{30}{\dashv} \quad ; \quad a+b=6$$

$$\frac{a}{304-200}=\frac{b}{304-120}$$

$$\frac{a}{13}=\frac{b}{23}=\frac{6}{36}$$

$$\rightarrow \ a=2,1\widehat{6}$$

$\therefore \ Mo=24+a=26,1\widehat{6}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 43

Se presenta una tabla de frecuencias con 5 intervalos de ancho de clase común y se sabe que los límites inferiores de los intervalos 2 y 5 son 16 y 52, respectivamente, además, se tiene lo siguiente:

- $f_5=60=2\times f_2=3\times f_1$
- $h_3=0{,}20$
- $H_4=0{,}70$

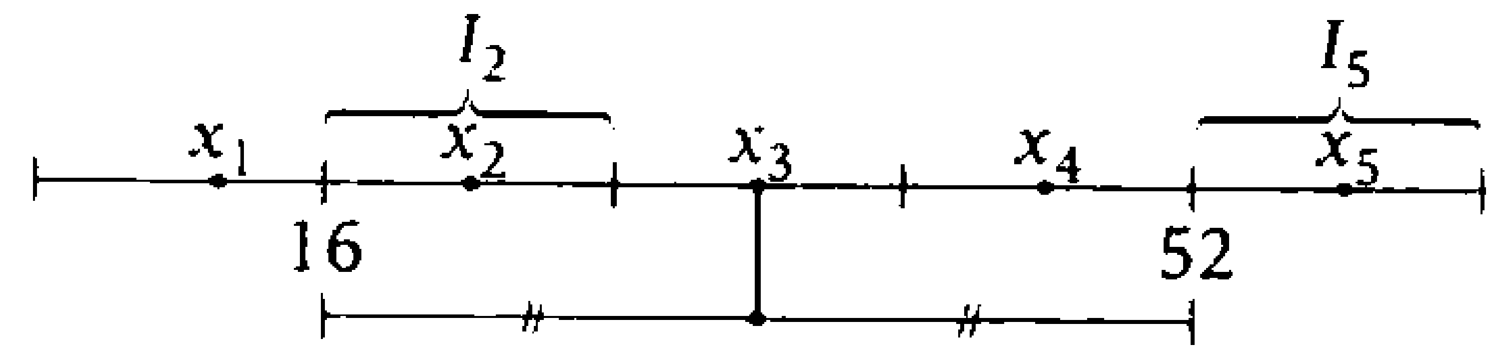
Calcule $x_3+f_4+F_3$.

A) 150 B) 160 C) 174
D) 170 E) 168

Resolución

Tenemos 5 intervalos ($K=5$)

$I_2=[16;\ \rangle$
$I_5=[52;\ \rangle$



x_3 es el punto medio del intervalo [16; 52]:

$$x_3=\frac{16+52}{2} \ \rightarrow \ x_3=34$$

De los datos, tenemos

$f_5=60$ $H_4=0{,}70$
$f_2=30$ $h_3=0{,}20$
$f_1=20$

- $\underbrace{h_1+h_2+h_3+h_4}_{H_4=0{,}70}+h_5=1$

  $h_5=0{,}30 \ \rightarrow \ \frac{f_5}{n}=0{,}30$

  $\frac{60}{n}=0{,}30$

  $n=200$

- $h_3=\frac{f_3}{n}$

  $0{,}20=\frac{f_3}{200}$

  $\rightarrow \ f_3=40$

- $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=n$

  $20+30+40+f_4+60=200$

  $f_4=50$

- $F_3=f_1+f_2+f_3$

  $F_3=20+30+40$

  $F_3=90$

$\therefore \ x_3+f_4+F_3=174$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 44

Dada la siguiente tabla de frecuencias cuya distribución es simétrica, calcule $x_m + Mo$ (x_m: mediana; Mo: moda).

I_i	f_i	F_i	h_i
[20- ⟩	12		
[- ⟩			0,15
[- ⟩			
[-52⟩		48	
[-]			

A) 80 B) 80,8 C) $88,\widehat{8}$
D) $89,\widehat{8}$ E) 79,8

Resolución

Como son 5 intervalos de clase y la distribución es simétrica, tenemos: $f_1 = f_5 = 12$

n: total de datos

Luego: $\underset{\substack{\downarrow \\ 48}}{F_4} + f_5 = F_5 = n = 60$

- $h_2 = 0{,}15 = \dfrac{f_2}{60} \rightarrow f_2 = 9 = f_4$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} f_i = 60 \rightarrow f_3 = 18$

Además, sea w el ancho de clase común:

$20 + 4 \times w = 52 \rightarrow w = 8$

Tenemos

I_i	f_i
[20 - ⟩	12
[- ⟩	9
[- ⟩	18
[-52⟩	9
[-60]	12

Observación

Como la distribución es simétrica y unimodal, entonces, se cumple que $\bar{x} = Me = Mo$, siendo este valor el punto medio del alcance.

$$\bar{x} = x_m = Mo = \frac{20+60}{2} = 40$$

Por lo tanto, $x_m + Mo = 80$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Se distribuye un total de 50 datos en el siguiente cuadro de ancho de clase común.

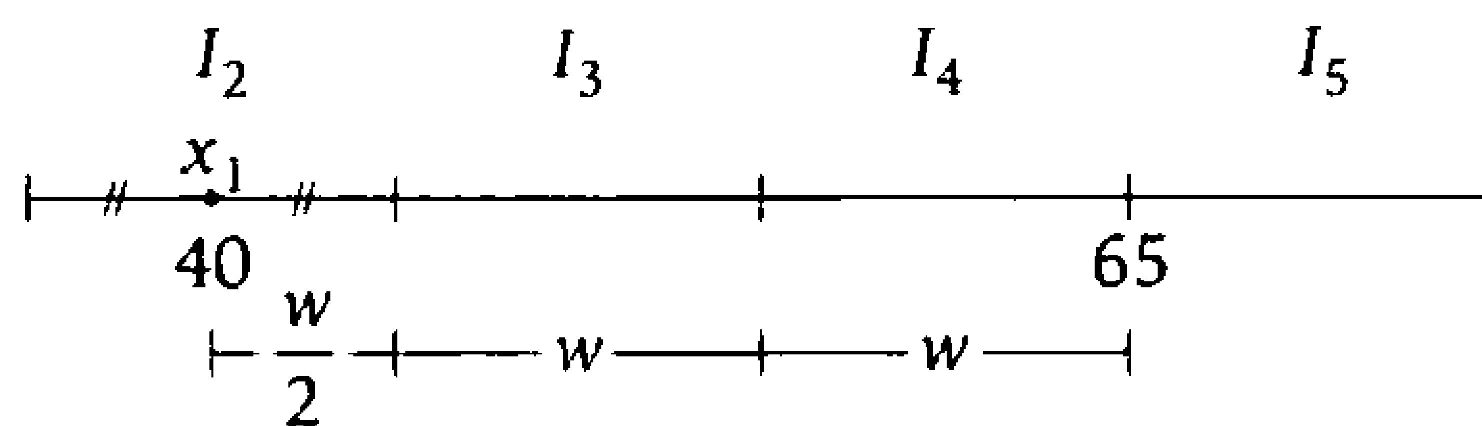
I_i	x_i	f_i	h_i	F_i
[- ⟩			0,18	
[- ⟩	40			21
[- ⟩				
[- ⟩			0,16	
[65 - ⟩				

Calcule la moda si se sabe que $\bar{x} = 46{,}8$.

A) 45,7 B) 47,5 C) 48,75
D) 47,7 E) 47,75

Resolución

Son $n = 50$ datos con media $\bar{x} = 46{,}8$.
Por los intervalos, obtenemos el ancho de clase (w)



$$\frac{w}{2} + w + w = 65 - 40 \rightarrow w = 10$$

Además

$f_1=h_1\times n \rightarrow f_1=(0,18)50$

$f_1=9$

$f_4=h_4\times n \rightarrow f_4=(0,16)50$

$f_4=8$

$F_2=f_1+f_2 \rightarrow 21=9+f_2$

$f_2=12$

Tenemos:

x_i	f_i	x_if_i
34	9	270
40	12	480
50	a	$50a$
60	8	480
70	$21-a$	$1470-70a$
	$n=50$	$2700-20a$

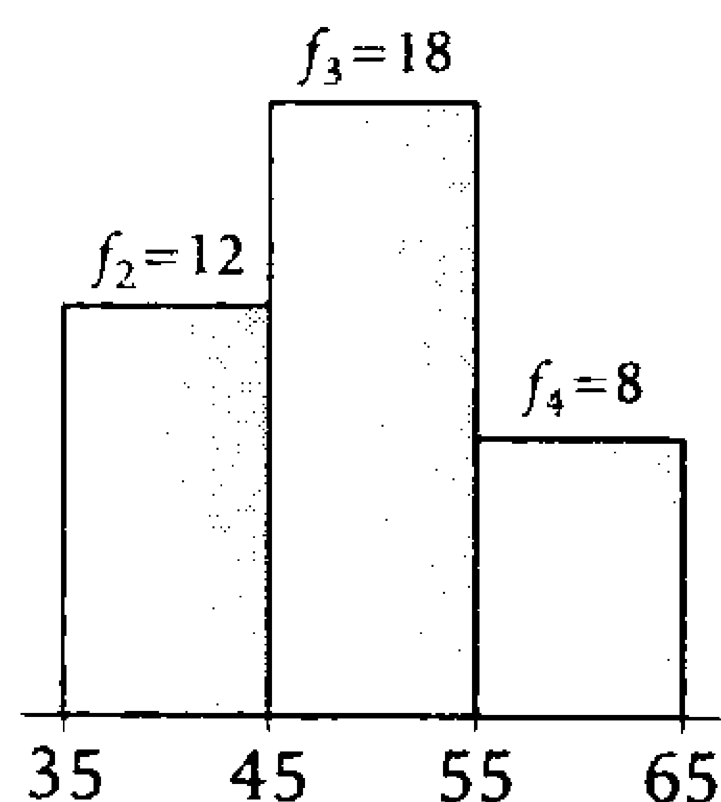
$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{n}$$

$$46,8=\frac{2700-20a}{50}$$

$a=18$

La mayor frecuencia es $f_3=18$, entonces la moda estará en el 3.er intervalo.

$M_0 \in I_3 \rightarrow M_0 \in [45; 55\rangle$



Tenemos

$L_0=45$

$w=10$

$d_1=18-12=6$

$d_2=18-8=10$

Reemplazando en

$$M_0=L_0+w\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

$$M_0=45+10\left(\frac{6}{6+10}\right)$$

$\therefore\ M_0=48,75$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 46

En un tramo de la Panamericana Sur se registran las velocidades de 40 carros (en km/h) que pasaron por un punto de control de velocidad. Si con estos datos se elabora una tabla de frecuencias de 6 intervalos de ancho de clase común, calcule la velocidad promedio. Considere los siguientes datos:

- $x_4=66$
- $x_6=98$
- $f_1=4$
- $h_4=0,275$
- $h_6=0,050$
- $H_2=0,175$

Además $\dfrac{f_5}{1}=\dfrac{f_3}{3}$

A) 48,5 km/h
B) 54,6 km/h
C) 49,6 km/h
D) 56,4 km/h
E) $48,\widehat{6}$ km/h

Resolución

Total de datos: $n=40$

- $h_6=\frac{f_6}{n}$; $0{,}050=\frac{f_6}{40}$

  $\rightarrow f_6=2$

- $h_4=\frac{f_4}{40}=0{,}275$

  $\rightarrow f_4=11$

- $H_2=\frac{F_2}{40}=0{,}175 \rightarrow F_2=7$

- $F_2=f_1+f_2$

  $\rightarrow f_2=3$

- $\sum_{i=1}^{6} f_i=40$

  $\rightarrow f_3+f_5=20$

Además

$$\frac{f_5}{1}=\frac{f_3}{3}$$

$\rightarrow f_5=5 \wedge f_3=15$

Sea w el ancho de la clase común

$x_{i+1}-x_i=w$

- $x_4+2w=x_6$

  $x_4 = 66$, $x_6 = 98$

  $\rightarrow w=16$

Luego

x_i	f_i	$(x_i)(f_i)$
18	4	72
34	3	102
50	15	750
66	11	726
82	5	410
98	2	196

Entonces, para datos tabulados

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \times f_i}{n}$$

$$\bar{x}=\frac{72+102+750+726+410+196}{40}=56{,}4$$

Por lo tanto, la velocidad promedio es 56,4 km/h.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 47

De la siguiente tabla de distribución, calcule F_2+w (w: ancho de clase común).

Clases	f_i	h_i	F_i	H_i
[10- ⟩		0,1		
[- ⟩				
[- ⟩		0,3		
[- ⟩	25			0,8
[-60⟩	20			

A) 90 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

Resolución

Por los intervalos, tenemos.

- Son $K=5$ intervalos.
- El alcance es $A=[10, 60]$ con rango $R=60-10=50$

Entonces, el ancho de clase (w) es:

$$w=\frac{R}{K} \rightarrow w=\frac{50}{5}$$

$$w=10$$

Por las frecuencias tenemos:

	f_i	h_i	H_i	
	f_1	0,10 < > 10%		80%
	f_2			
	f_3	0,30 < > 30%		
	$f_4=25$		0,80 < > 80%	
	$f_5=20$	20%		20%
total:	n	100%		

- Como f_i DP h_i: $\frac{f_i}{h_i}=$ cte.

$$\rightarrow \frac{f_1}{10\%}=\frac{f_3}{30\%}=\frac{\overset{20}{f_5}}{20\%}=\frac{n}{100\%}$$

como $f_5=20$, se obtiene

$f_1=10$ $f_3=30$ $n=100$

- $n=f_1+f_2+f_3+f_4+f_5$

$100=F_2+30+25+20$

$F_2=25$

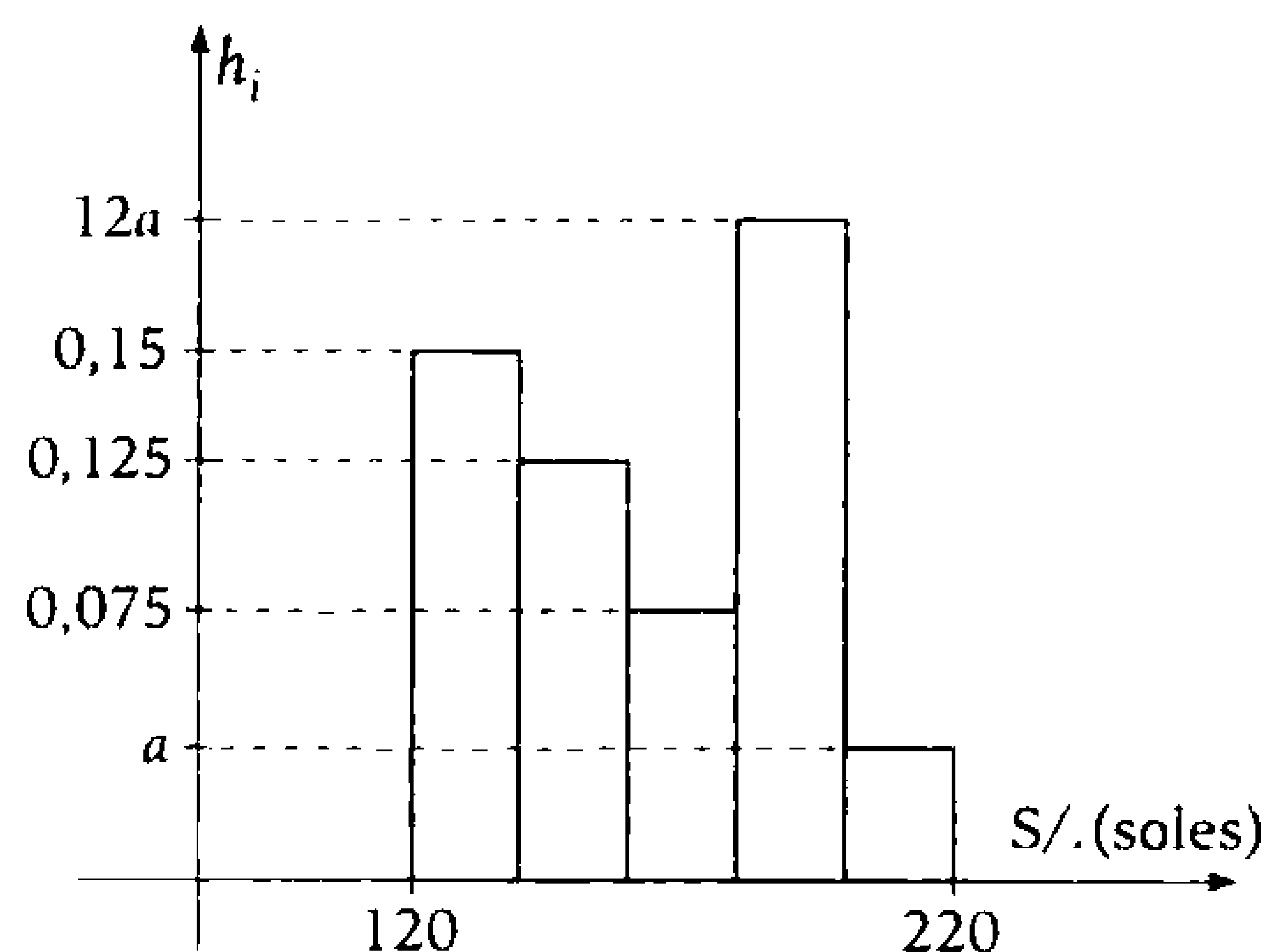
Nos piden

$w+F_2=35$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 48

¿Qué tanto por ciento de las familias gana menos de 200 soles según el histograma?



A) 85,5%
B) 88,7%
C) 90,5%
D) 95%
E) 65,5%

Resolución

En el histograma, observamos que son 5 intervalos de clase.
Sea w el ancho de clase común, entonces:

$$w=\frac{220-120}{5}=20$$

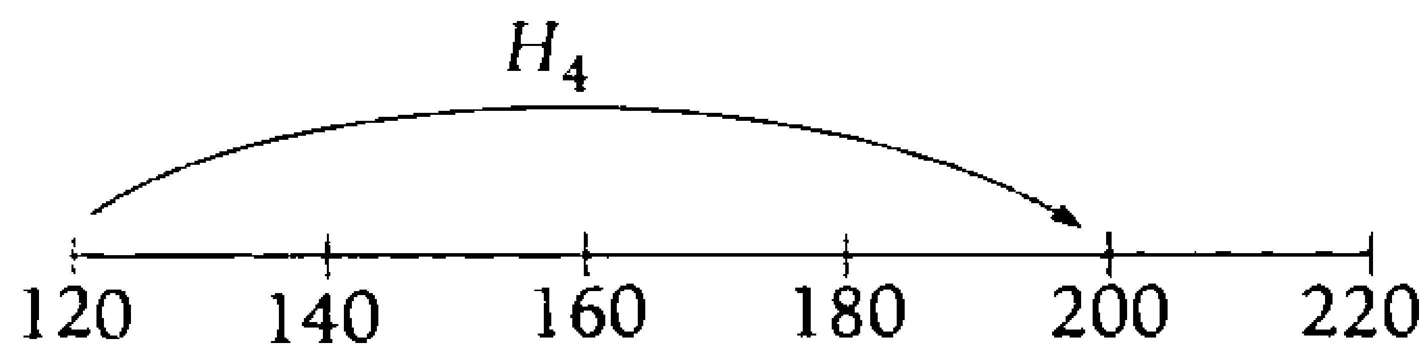
Además:

$$\sum_{i=1}^{5} h_i=1$$

$$0,15+0,125+0,075+12a+a=1$$

$$\rightarrow a=0,05$$

Luego



$H_4 = 1 - h_5$

$= 1 - a$

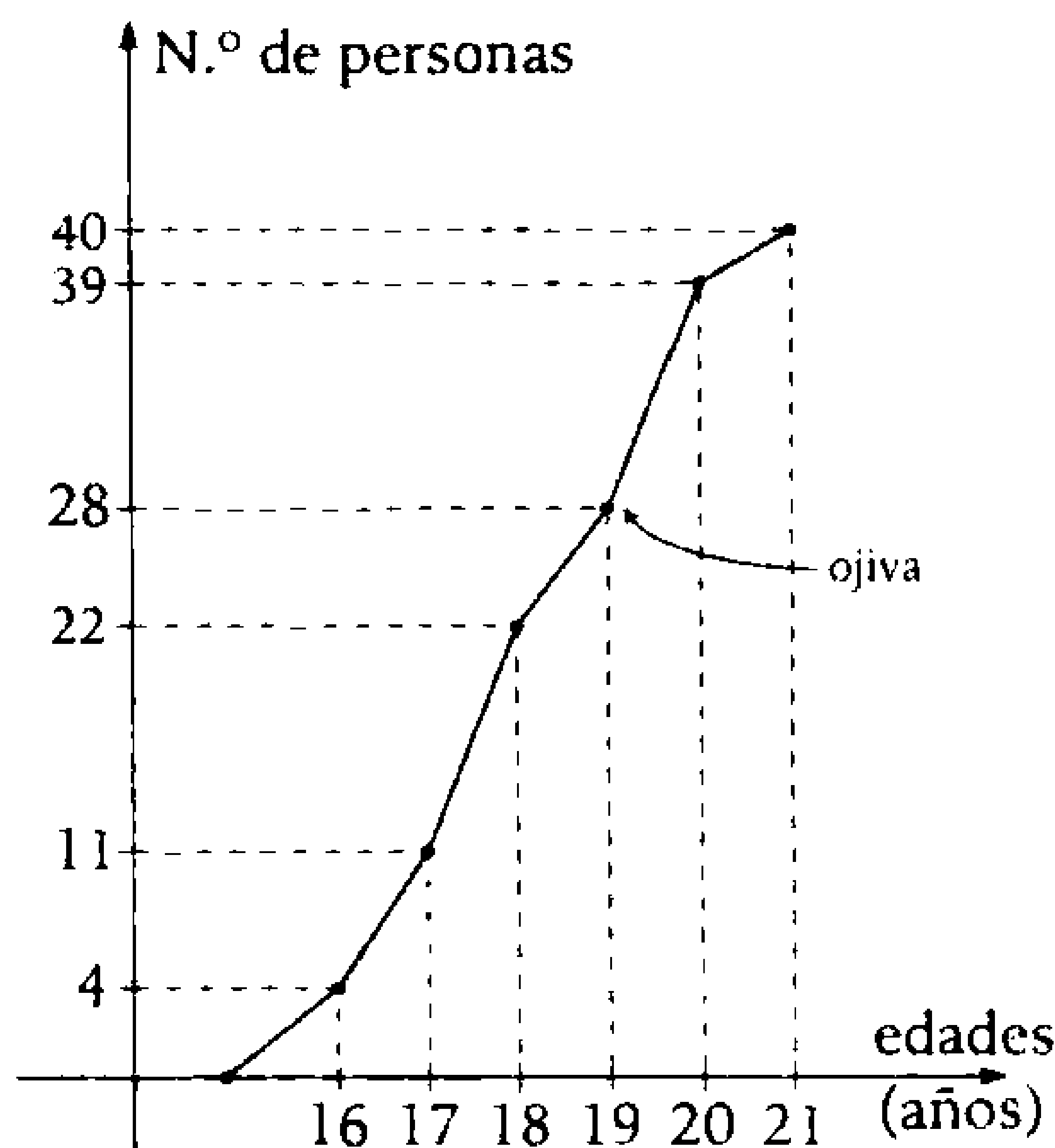
$= 0,95 = 95\%$

Por lo tanto, el 95% de las familias ganan menos de S/.200.

Clave **D**

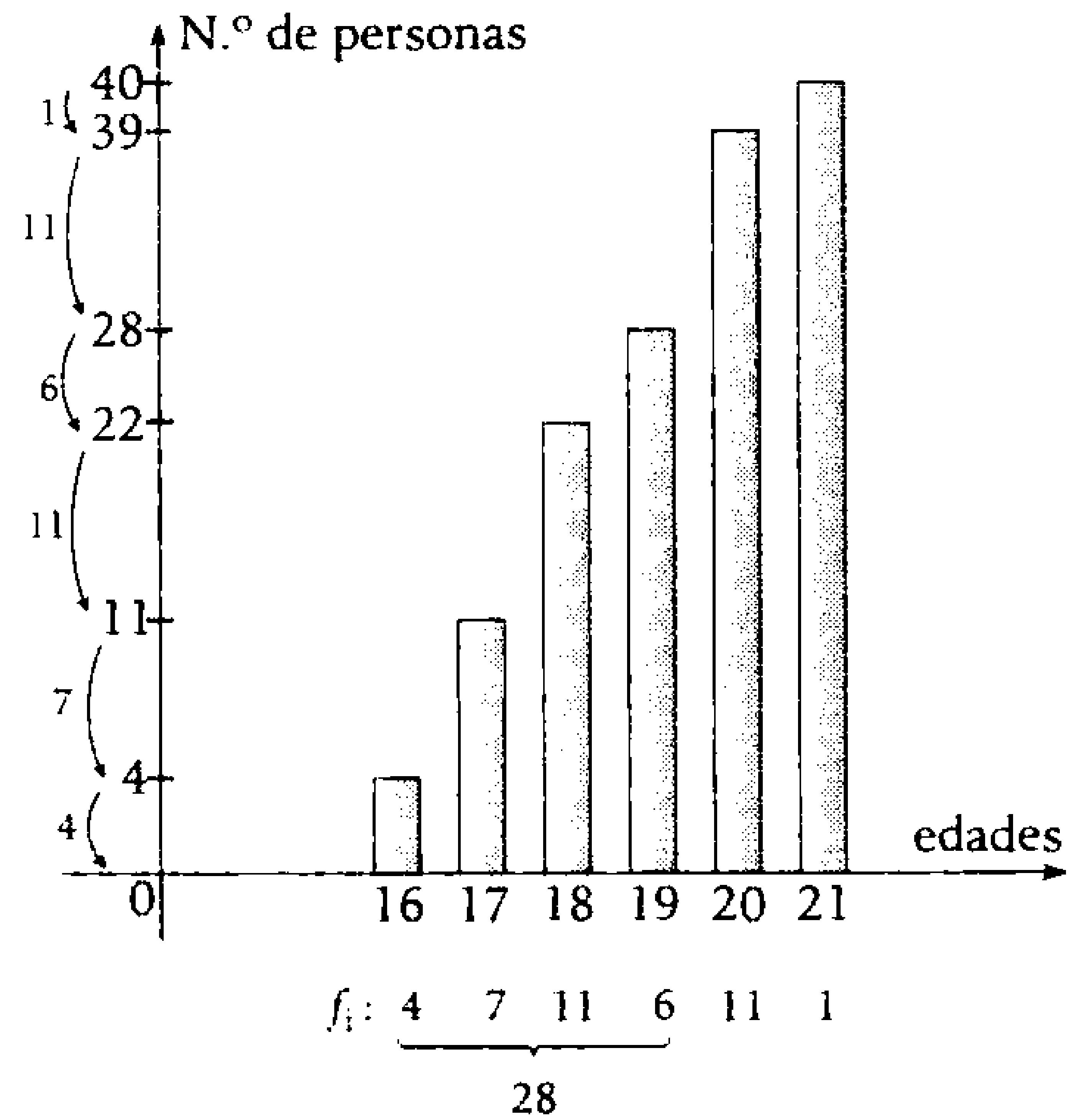
PROBLEMA N.° 49

Dado el siguiente diagrama escalonado, de variable discreta (edades), ¿qué tanto por ciento de las personas tiene una edad mayor o igual a los 16 años, pero menor de 20 años?



A) 57,5%
B) 87%
C) 70%
D) 13,5%
E) 58,5%

Resolución



De la gráfica:

- Tamaño de la muestra $n = 40$
- Cantidad de personas que tienen 16 años o más pero menos de 20 años son 28 personas.

40 — 100%

28 — $x\%$

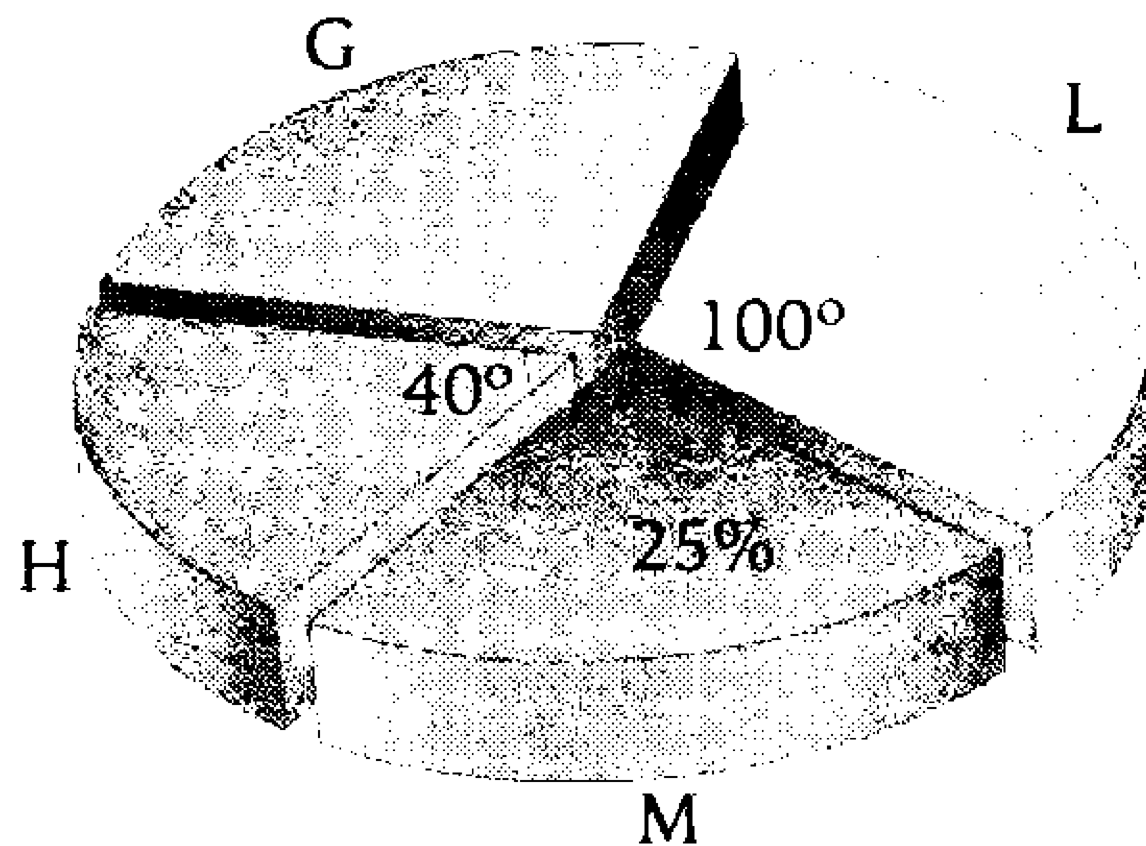
$$\rightarrow \frac{x\%}{28} = \frac{100\%}{40};\ x\% = 70$$

Por lo tanto, el 70% de personas tiene una edad mayor o igual a los 16 años, pero menor de 20 años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 50

En un colegio se realizó una encuesta para conocer cuál de los siguientes cursos le agrada más a los estudiantes: Historia (H), Matemáticas (M), Lenguaje (L) y Geografía (G). Es así que se forma el siguiente diagrama circular:



Si a 26 alumnos les gusta Geografía, ¿a cuántos alumnos les gusta Historia o Lenguaje?

A) 20 B) 28 C) 32
D) 37 E) 42

Resolución

Sean:

g: la cantidad de alumnos que les gusta G.

ℓ: la cantidad de alumnos que les gusta L.

m: la cantidad de alumnos que les gusta M.

h: la cantidad de alumnos que les gusta H.

También se sabe que en un diagrama circular, se cumple 360° < > 100%

$$\frac{100\%}{360°}=\frac{h}{40°}=\frac{\ell}{100°}$$

$$\rightarrow\ h=\frac{100\%}{9};\ \ell=\frac{250\%}{9}$$

Luego

$$g+\ell+m+n=100\%$$

$$\rightarrow\ g=\frac{325\%}{9}$$

Además

$$\frac{325\ \%}{9}(\text{total})=26$$

$$\rightarrow\ \text{total}=72$$

Piden

$$h+\ell=\frac{350\ \%}{9}(\text{total})$$

$$\rightarrow\ h+\ell=28$$

Por lo tanto, a 28 alumnos les gusta Historia o Lenguaje.

Clave **B**

Desde la antigüedad hasta nuestros días, el hombre ha busca[illegible] representar lo que observa en el mundo, así lo demuestran [illegible] pinturas rupestres, los sistemas de numeración y los teore[illegible] matemáticos más complejos. La evolución del hombre, y su v[illegible] en sociedad, le exigieron contar aquellos elementos con los q[illegible] convivía y agruparlos en conjuntos que pudiese distinguir.

De manera similar, el desarrollo de la Aritmética como ciencia [illegible] avanzado a la par de los requerimientos de la vida práctica [illegible] hombre. Por ello, conocer y aplicar las teorías aritméticas [illegible] implica gran dificultad; incluso los problemas más comple[illegible] aquellos que nos exigen un mayor grado de abstracción, son r[illegible] que podemos afrontar, pues en nosotros se encuentran [illegible] aptitudes para resolverlos.

Problemas resueltos de Aritmética, el número y sus aplicaciones es un texto indispensable para el conocimiento, práctica y análisis de la Aritmética. En él encontrarás lo siguiente:

- Solucionario de los problemas propuestos en el libro de *Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones*.
- Más de 950 problemas desarrollados.
- Preguntas tipo examen de admisión de diferentes universidades e instituciones educativas.
- Diferentes métodos didácticos para afrontar los problemas.
- Gráficos, comentarios y notas que permiten una comprensión adecuada y rápida.

www.elumbreras.com.pe